FAIVRE-DUPAIGRE. LAMIRAND

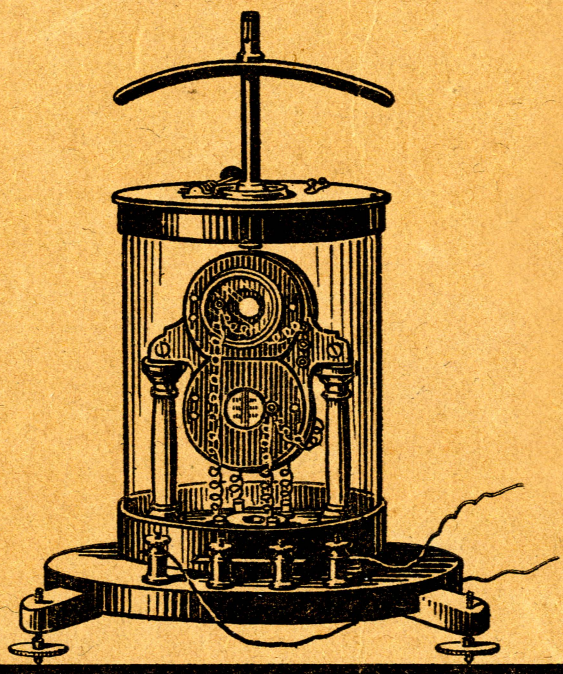
COURS DE PHYSIQUE

III

ÉLECTRICITÉ

par

M. JOYAL



MASSON et Cie ÉDITEURS

OUVRAGES

POUR LES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ET LES CANDIDATS A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION

COURS DE PHYSIQUE

SOUS LA DIRECTION DE

J. FAIVRE-DUPAIGRE, J. LAMIRAND

I. — **Optique,** par MARC BRUHAT, 13e édition revue, 1 vol. in-8° broché de 438 pages, avec 576 figures et de nombreux problèmes.

II. — **Chaleur,** par M. JOYAL, 14e édition revue, 1 vol. in-8° broché de 350 pages, avec 175 figures et de nombreux problèmes.

III. — **Electricité,** par M. JOYAL, 14e édition, revue et augmentée, 1 vol. in-8° broché de 392 pages, avec 277 figures et de nombreux problèmes.

COURS DE CHIMIE

I. — **Chimie générale et métalloïdes** (*Programme de Mathématiques spéciales*), par J. LAMIRAND et CH. BRUNOLD, 7e édition, 1 vol. in-8° broché de 620 pages, avec 258 figures et de nombreux problèmes.

II. — **Métaux,** par J. LAMIRAND et H. PARISELLE, Recteur de l'Académie de Grenoble, 5e édition revue et augmentée, 1 vol. in-8° broché de 394 pages, avec 138 figures et 4 planches

III. — **Chimie organique,** par J. LAMIRAND et H. PARISELLE, 5e édition revue, 1vol. in-8° broché de 784 pages, avec 75 figures.

COURS DE
PHYSIQUE

POUR LES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

SOUS LA DIRECTION DE

J. FAIVRE-DUPAIGRE ET J. LAMIRAND

INSPECTEURS GÉNÉRAUX HONORAIRES DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE
ANCIENS PROFESSEURS AU LYCÉE SAINT-LOUIS

III

ÉLECTRICITÉ

PAR

M. JOYAL

PROFESSEUR AU LYCÉE JANSON DE SAILLY

QUATORZIÈME ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE

MASSON ET Cie, ÉDITEURS
120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS, VIe
1948

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, même photographiques, réservés pour tous pays.

Copyright 1941, by Masson et Cie

(Printed in France)

PRÉFACE

DE LA DOUZIÈME ÉDITION

CETTE NOUVELLE ÉDITION *du Cours d'Electricité de la classe de Mathématiques Spéciales a été rédigée dans le même esprit que la précédente. Nous n'y avons apporté que des modifications de détails. Nous avons voulu donner aux candidats aux grandes Ecoles un livre précis, mis à jour, qui soit pour eux un instrument de travail.*

L'expérience garde la place principale ; les développements théoriques ne viennent qu'à la fin de chaque question pour interpréter les phénomènes observés. Nous avons modifié l'ordre habituel des questions traitées tout en nous conformant, le plus possible, aux instructions ministérielles.

Nous avons étudié l'électrodynamique immédiatement après l'électrostatique, car il nous a semblé que le lien entre ces deux parties apparaîtrait mieux. De plus, ceci nous a permis de rapprocher le magnétisme et l'électromagnétisme et d'étudier les lois de l'électromagnétisme aussitôt après avoir établi les propriétés des feuillets magnétiques.

Nous avons introduit la théorie électronique. Nous sommes à une époque où la considération des électrons pénètre de plus en plus toute la physique. Il nous a semblé que les candidats aux grandes Ecoles ne devaient pas ignorer l'essentiel de cette théorie. Nous nous sommes bornés volontairement à quelques aperçus rapides afin de ne pas alourdir l'exposé.

Certains chapitres ne sont pas explicitement au programme de la classe de Mathématiques Spéciales. Toutefois, ils ont trouvé place dans ce volume car les questions traitées sont indispensables pour la compréhension parfaite de l'ensemble. Nous nous sommes limités à un exposé plus sommaire.

Enfin, pour permettre au lecteur d'appliquer immédiatement les notions acquises, nous avons mis, à la fin de chaque chapitre, quelques exercices

qui peuvent se faire rapidement. Les élèves doivent trouver là l'occasion de prendre contact avec les valeurs usuelles des grandeurs physiques et d'acquérir l'entraînement nécessaire à tout candidat à un concours quelconque. Nous avons ajouté les réponses de nombreux exercices afin de permettre aux élèves travaillant seuls de contrôler l'exactitude de leurs résultats.

Parmi les ouvrages dont nous avons tiré profit, nous devons citer ceux de M. Bouasse *ainsi que le* Cours d'électricité *de* M. G. Bruhat.

PREMIÈRE PARTIE

NOTIONS FONDAMENTALES UNITÉS

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS FONDAMENTALES

L'objet de ce chapitre est de rappeler et de préciser quelques notions fondamentales qui seront utilisées dans la suite.

I. — ANGLE SOLIDE

*1. — **Angle solide.** — L'angle solide d'un cône de sommet A est, par définition, mesuré par l'aire découpée par ce cône sur une sphère de centre A et de rayon unité.*

Etablissons les formules permettant de calculer les angles solides dans deux cas particuliers importants.

1° ANGLE SOLIDE D'UN CÔNE ÉLÉMENTAIRE. — Considérons un cône de sommet A (fig. 1) dont les génératrices s'appuient sur le contour d'une petite surface BC de centre D.

Le cône de sommet A est dit *élémentaire* si la surface BC a des dimensions très petites par rapport à la distance AD = r du sommet du cône au centre D de la surface. Dans ces conditions, la surface BC peut être considérée comme plane. Soit dS son aire.

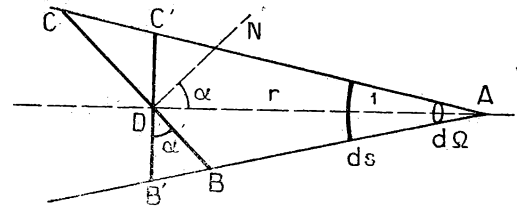


FIG. 1

Evaluons l'angle solide élémentaire $d\Omega$ du cône de sommet A. Coupons ce cône par une sphère de centre A et de rayon unité. Le cône découpe sur cette sphère une surface ds qui, par définition, mesure l'angle solide $d\Omega$.

Traçons la sphère de centre A et de rayon AD = r. Le cône découpe sur

cette sphère une calotte sphérique B'C' d'aire dS'. Les deux sphères de rayons 1 et r étant homothétiques dans le rapport r, nous avons :

$$dS' = r^2\, ds = r^2 d\Omega ;$$

Mais dS' peut être considérée comme la projection de dS et, par suite, si α est l'angle de la normale à la surface BC avec le rayon moyen AD du cône, nous avons :

$$dS' = dS \cos \alpha$$

On en déduit :

$$dS \cos \alpha = r^2 d\Omega$$

$$\boxed{d\Omega = \frac{dS \cos \alpha}{r^2}}$$

L'angle solide $d\Omega$ s'appelle encore angle solide sous lequel de A on voit la surface dS.

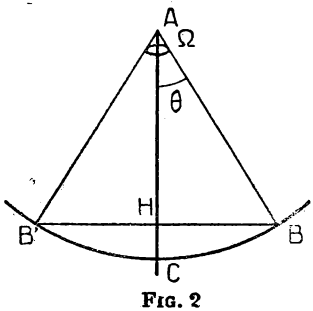


FIG. 2

2° ANGLE SOLIDE D'UN CÔNE DE RÉVOLUTION. — Soit un cône de révolution de sommet A (fig. 2) et d'angle générateur Θ. Coupons-le par une sphère de centre A et de rayon 1. L'angle solide Ω du cône est mesuré, par définition, par l'aire de la calotte sphérique BCB' découpée par le cône sur cette sphère. Donc :

$$\Omega = 2\pi \times AB \times CH$$

Or $AB = AC = 1$ $\quad CH = AC - AH = AC - AB \cos \Theta = 1 - \cos \Theta$.

L'angle solide Ω est donc donné par la formule :

$$\boxed{\Omega = 2\pi (1 - \cos \Theta)}$$

Dans le cas particulier où $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\Omega = 2\pi$. *L'angle solide sous lequel d'un point on voit un plan indéfini est égal à* 2π.

Si $\Theta = \pi$, le cône remplit tout l'espace autour de A et $\Omega = 4\pi$.

L'angle solide total autour d'un point est égal à 4π.

II. — MOMENTS D'INERTIE

2. — Moments d'inertie. — 1° DÉFINITIONS. — *On appelle moment d'inertie d'une masse ponctuelle m par rapport à un axe* Δ *la quantité* $I = mr^2$, *r étant la distance de la masse à l'axe* Δ.

Dans le cas d'un ensemble discontinu de masses ponctuelles ou d'un ensemble continu (corps solide), le moment d'inertie du système par rapport à un axe est la somme des moments d'inertie de ses différentes parties. Par suite :

α) Pour un ensemble discontinu, le moment d'inertie est $I = \Sigma mr^2$, la somme étant étendue à toutes les masses.

β) Pour un corps solide, le moment d'inertie est $I = \iiint r^2\, dm$, l'intégrale étant étendue à tout le volume du corps.

2° Résultats. — Rappelons quelques résultats relatifs à des corps solides, homogènes, de formes géométriques simples.

α) *Parallélépipède.* — Soit un parallélépipède droit (fig. 3) d'arêtes $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$. Considérons un axe Δ passant par le centre O du solide et parallèle à l'arête AA'. Le moment d'inertie du parallélépipède par rapport à l'axe Δ est donné par la formule :

$$I = M\,\frac{a^2 + b^2}{12},$$

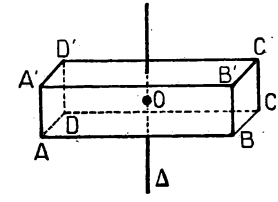


Fig. 3

M étant la masse totale du parallélépipède.

β) *Sphère.* — Le moment d'inertie d'une sphère de masse M par rapport à un diamètre est donné par la formule :

$$I = \frac{2}{5} MR^2,$$

R étant le rayon de la sphère.

γ) *Cylindre.* — Le moment d'inertie d'un cylindre de révolution de masse M et de rayon R, *par rapport à l'axe de révolution*, est donné par la formule :

$$I = M\,\frac{R^2}{2}.$$

3° Changements d'axe. — Enonçons le théorème fondamental relatif aux moments d'inertie d'un solide par rapport à différents axes *parallèles*.

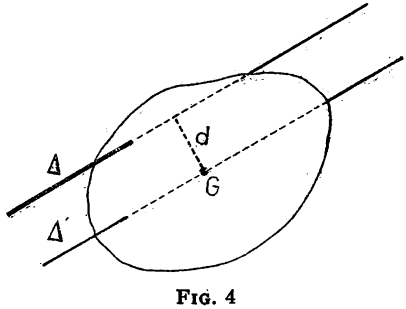


Fig. 4

Le moment d'inertie d'un corps solide par rapport à un axe Δ est égal à la somme du moment d'inertie du corps par rapport à l'axe Δ' parallèle à Δ et passant par le centre de gravité G du corps, et du moment d'inertie, par rapport à Δ, de la masse totale du corps, supposée concentrée au centre de gravité G.

Si M est la masse du corps, *d* la distance du centre de gravité à Δ et

I_Δ et $I_{\Delta'}$ les moments d'inertie du corps par rapport aux axes Δ et Δ', le théorème précédent se traduit par la relation :

$$I_\Delta = I_{\Delta'} + Md^2$$

Montrons sur un exemple comment on applique ce théorème. Soit à déterminer le moment d'inertie d'un cylindre de révolution par rapport à une génératrice Δ. Le moment d'inertie par rapport à l'axe de révolution Δ' est, comme nous l'avons indiqué plus haut,

$$I_{\Delta'} = \frac{1}{2} MR^2.$$

Par suite :
$$I_\Delta = I_{\Delta'} + MR^2 = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2,$$
$$I_\Delta = \frac{3}{2} MR^2.$$

III. — MOUVEMENTS PENDULAIRES

*3. — **Mouvement d'un solide mobile autour d'un axe.*** — Cette étude présente un grand intérêt car les appareils de mesure utilisés en physique sont généralement constitués par des systèmes mobiles autour d'un axe.

1° Equation du mouvement. — Considérons un système mobile autour d'un axe Δ (fig. 5) et un point M du système. Le plan π normal à l'axe Δ et passant par M coupe l'axe en O. La position du système à un instant quelconque peut être définie par l'angle Θ que fait la droite OM liée au système avec une direction repère fixe *Ox* située dans π.

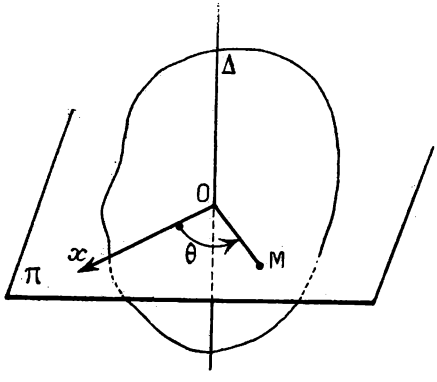


Fig. 5

Désignons par I le moment d'inertie du système par rapport à l'axe de rotation. Appliquons le théorème des forces vives à la rotation élémentaire $d\Theta$ effectuée pendant l'intervalle de temps dt.

L'énergie cinétique du corps à l'instant t est $W = \frac{1}{2} I \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2$. Sa variation pendant l'intervalle de temps dt est égale à :

$$dW = I \frac{d\Theta}{dt} \frac{d^2\Theta}{dt^2} dt = I \frac{d^2\Theta}{dt^2} d\Theta.$$

Le travail des forces dans ce déplacement comprend le travail des réactions de l'axe qui est nul et le travail des forces directement appliquées. Chaque force F peut être décomposée suivant une composante parallèle à l'axe Δ, dont le travail est nul puisqu'elle est normale au déplacement, et une composante f, située dans le plan normal à Δ, qui rencontre celui-ci en O (fig. 6). Le travail élémentaire de f est :

$$d\mathcal{C} = f \times PP' \times \sin\varphi = f \times OP\, d\Theta \times \sin\varphi.$$

Or $OP \sin\varphi = OH$, et par suite le produit $f \times OP \sin\varphi$ représente le moment de f par rapport à O, c'est-à-dire le moment de F par rapport à l'axe Δ.

Le travail élémentaire de F est donc :

$$d\mathcal{C} = \text{Moment de } F_\Delta \times d\Theta.$$

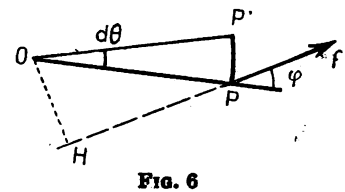


Fig. 6

Désignons par N la somme des moments par rapport à l'axe de rotation des forces appliquées au système. Le travail de ces forces dans le déplacement $d\Theta$ est $N d\Theta$ et, en appliquant le théorème des forces vives, nous avons la relation :

$$I \frac{d^2\Theta}{dt^2} d\Theta = N\, d\Theta,$$

$$\boxed{I \frac{d^2\Theta}{dt^2} = N}$$

La quantité $I \frac{d^2\Theta}{dt^2}$ s'appelle le *moment des forces d'inertie* par rapport à l'axe. En résumé :

L'équation du mouvement d'un système mobile autour d'un axe s'obtient en égalant le moment par rapport à l'axe des forces d'inertie $\left(I \frac{d^2\Theta}{dt^2}\right)$ *à la somme des moments, par rapport à l'axe, des forces appliquées au système.*

2° Application. — Pour appliquer correctement la formule précédente, il faut calculer les moments en valeurs *algébriques*. Pour cela, choisissons un sens positif pour mesurer les rotations définies par l'angle $\widehat{xOM} = \Theta$. Prenons par exemple le sens dans lequel il faut tourner pour amener Ox sur OM. Prenons comme sens positif sur Δ le sens Oz tel que le trièdre Ox, OM, Oz soit direct, c'est-à-dire ait même sens que le trièdre de référence $O'x'y'z'$ (fig. 7). Les moments par rapport à l'axe Δ des forces appliquées au système mobile seront mesurés algébriquement sur l'axe Δ ainsi orienté.

Précisons sur un exemple. *Cherchons l'équation du mouvement du pendule simple* constitué par un point matériel de masse m suspendu à un point fixe O (fig. 8) par un fil tendu, inextensible et sans masse, de longueur l. La position du pendule à un instant quelconque est définie par l'angle Θ que fait le fil OM avec la verticale descendante Ox. Choisissons comme

sens positif pour mesurer Θ le sens indiqué par la flèche. Il en résulte que le sens positif sur l'axe normal au plan de figure et passant par O sera d'arrière en avant.

La force agissante est le poids *mg* du point matériel. Son moment par rapport à O est, en valeur absolue, $mg \times OH$. Or $OH = l \sin \Theta$; le moment est donc $mg \times l \sin \Theta$. Comme il est dirigé d'avant en arrière, sa valeur algébrique est $-mgl \sin \Theta$. L'équation du mouvement sera :

$$I \frac{d^2\Theta}{dt^2} = -mgl \sin \Theta,$$

I étant le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation.

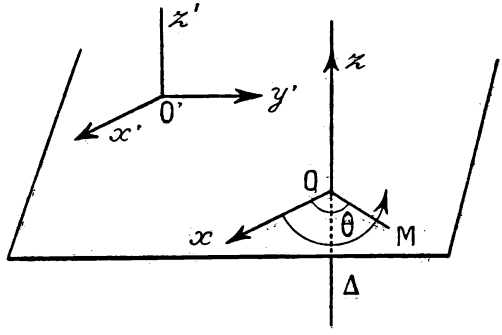


FIG. 7

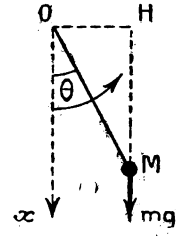


FIG. 8

D'une façon générale, quand on écarte un solide de sa position d'équilibre d'un angle Θ positif, les moments des forces ou des couples *de rappel* sont *négatifs*.

3° EQUILIBRE. — L'équation du mouvement permet d'énoncer les conditions d'équilibre d'un système mobile autour d'un axe. Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que $\Theta = C^{te}$. Par suite $\frac{d^2\Theta}{dt^2} = 0$ et

$$\boxed{N = 0}$$

Pour qu'un système mobile autour d'un axe soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme algébrique des moments des forces par rapport à cet axe soit nulle.

4. — Mouvements pendulaires. — Dans les appareils de mesure utilisés fréquemment, le système mobile autour d'un axe est soumis à des forces extérieures sous l'action desquelles il prend une position d'équilibre stable. Si l'on écarte le système de sa position d'équilibre d'un angle Θ_0 et qu'on le laisse libre, il revient à sa position d'équilibre. Etudions ce mouvement de retour. Nous supposerons que :

a) lorsque le système fait un angle Θ avec sa position d'équilibre, il est soumis à des forces qui tendent à l'y ramener et dont le moment par rapport à l'axe est proportionnel à l'angle d'écart Θ. Nous le désignerons par

—KΘ, K étant, d'après nos conventions du paragraphe précédent, une constante *positive* ;

b) lorsque le système se déplace, il est soumis à des forces qui s'opposent à son mouvement et qu'on appelle *forces d'amortissement*. Nous supposerons ces forces proportionnelles à la vitesse angulaire $\frac{d\Theta}{dt}$. Nous représenterons le moment de ces forces par rapport à l'axe par $-f\frac{d\Theta}{dt}$, f étant, d'après nos conventions, une constante positive.

Ces hypothèses sont en général satisfaites dans les appareils de mesure *à condition que* Θ *soit petit.*

Dans ces conditions, quand le système fait un angle Θ avec sa position d'équilibre, la somme algébrique des moments des forces est $N = -f\frac{d\Theta}{dt} - K\Theta$. L'équation du mouvement est donc :

$$I\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -f\frac{d\Theta}{dt} - K\Theta,$$

ou

$$\boxed{I\frac{d^2\Theta}{dt^2} + f\frac{d\Theta}{dt} + K\Theta = 0}$$

1° Amortissement nul. — Les forces d'amortissement sont supposées nulles ou négligeables. Si l'amortissement est nul, c'est que $f = 0$. L'équation du mouvement devient :

$$I\frac{d^2\Theta}{dt^2} + K\Theta = 0.$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique $I r^2 + K = 0$ admet deux racines imaginaires $r = \pm i\sqrt{\frac{K}{I}}$. L'intégrale générale est :

$$\Theta = \Theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{K}{I}}\, t + \varphi\right),$$

Θ_0 et φ étant deux constantes déterminées par les conditions initiales. Par exemple : élongation initiale et vitesse initiale.

L'équation du mouvement nous montre *que le système est animé d'un mouvement périodique.* Lorsque la quantité $\sqrt{\frac{K}{I}}\, t$ augmente de 2π, Θ reprend la même valeur. Le mouvement a donc une période T telle que :

$$\sqrt{\frac{K}{I}}\, T = 2\pi,$$

d'où

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}}$$

En résumé, *lorsque les forces d'amortissement sont négligeables, un système mobile écarté légèrement de sa position d'équilibre y revient en effectuant des oscillations de période* $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$, I étant le moment d'inertie du système par rapport à l'axe de rotation et K une constante telle que le moment des forces par rapport à l'axe soit égal à $-K\Theta$.

Appliquons ce résultat au pendule simple. On a vu (§ 3) que la somme des moments des forces $N = -mgl \sin\Theta$. Si Θ est petit, on peut confondre le sinus avec l'angle.

$$N = -mgl\Theta, \qquad \text{d'où} \qquad K = \frac{-N}{\Theta} = mgl.$$

Le moment d'inertie du point matériel est $I = ml^2$. La période des oscillations sera :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

2° AMORTISSEMENT FAIBLE. — L'équation générale du mouvement est :

$$I\frac{d^2\Theta}{dt^2} + f\frac{d\Theta}{dt} + K\Theta = 0,$$

où f est petit.

L'équation caractéristique est $Ir^2 + fr + K = 0$. Si f est petit, le discriminant $f^2 - 4IK$ est négatif. Les racines de l'équation caractéristique sont imaginaires et égales à :

$$r_1 = -\frac{f}{2I} + i\frac{\sqrt{4IK - f^2}}{2I} \qquad r_2 = -\frac{f}{2I} - i\frac{\sqrt{4IK - f^2}}{2I}.$$

L'intégrale générale est :

$$\Theta = \Theta_0 e^{\frac{-f}{2I}t} \sin\left[\sqrt{\frac{4IK - f^2}{4I^2}}\, t + \varphi\right].$$

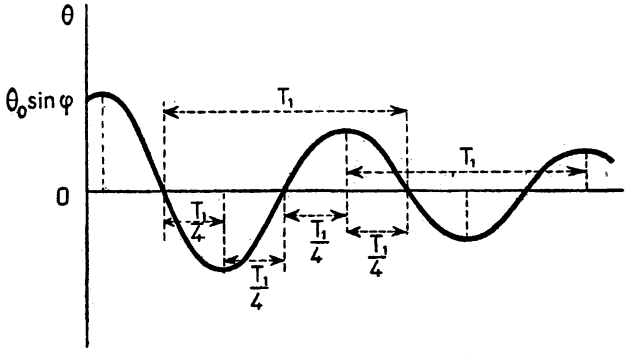


FIG. 9. — Mouvement oscillatoire amorti.

Θ_0 et φ sont deux constantes d'intégration définies par les conditions initiales. La variation de Θ en fonction du temps est représentée par la courbe ci-contre (fig. 9).

La fonction $\sin\left[\frac{\sqrt{4IK - f^2}}{2I}t + \varphi\right]$ est périodique et a pour période :

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{4I^2}{4IK - f^2}}.$$

Au bout du temps T_1 le mouvement se reproduit identique à lui-même, à cela près que toutes les élongations sont multipliées par $e^{\frac{-f}{2I}T_1}$. Le mouvement est dit *pseudo-périodique*, T_1 s'appelle la **pseudo-période** et la quantité $\frac{f}{2I}T_1$ est le **décrément logarithmique.**

Par suite, *un système mobile autour d'un axe et faiblement amorti* ($f^2 < 4$ IK) *effectuera autour de sa position d'équilibre des oscillations d'égales durées mais dont l'amplitude ira en décroissant.*

3° AMORTISSEMENT CRITIQUE. — On dit que l'on a réalisé l'amortissement critique si $f^2 = 4$ IK. Dans ce cas, l'équation différentielle du mouvement :

$$I\frac{d^2\Theta}{dt^2} + f\frac{d\Theta}{dt} + K\Theta = 0$$

a pour équation caractéristique $Ir^2 + fr + K = 0$ qui admet une racine double $r_1 = r_2 = \frac{-f}{2I}$. L'intégrale générale est :

$$\Theta = (A + Bt)\, e^{\frac{-f}{2I}t},$$

A et B étant deux constantes déterminées par les conditions initiales. La variation de Θ en fonction du temps est représentée par la courbe ci-dessous (fig. 10) :

Dans le cas d'un amortissement critique, *le système revient à sa position d'équilibre sans osciller.*

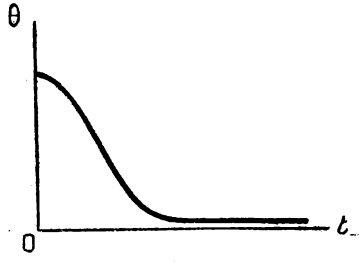


FIG. 10. — Amortissement critique

4° AMORTISSEMENT GRAND. — Supposons les forces d'amortissement suffisamment grandes pour que $f^2 > 4$ IK. L'équation du mouvement :

$$I\frac{d^2\Theta}{dt^2} + f\frac{d\Theta}{dt} + K\Theta = 0$$

a pour équation caractéristique $Ir^2 + fr + K = 0$ qui admet deux racines réelles :

$$r_1 = \frac{-f}{2I} + \sqrt{\frac{f^2 - 4\,IK}{4\,I^2}}, \qquad r_2 = \frac{-f}{2I} - \sqrt{\frac{f^2 - 4\,IK}{4I^2}},$$

L'intégrale générale est :

$$\Theta = A\, e^{r_1 t} + B\, e^{r_2 t},$$

A et B étant deux constantes déterminées par les conditions initiales. La variation de l'élongation Θ en fonction du temps est représentée par la courbe ci-contre (fig. 11) :

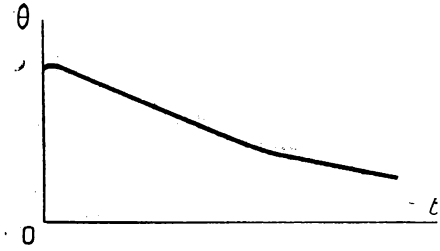


FIG. 11

Le système revient à sa position d'équilibre sans osciller. On démontre que *le retour à cette position se fait d'autant plus lentement que l'amortissement est plus fort.*

5. — Choix de l'amortissement pour un appareil de mesure. — L'amortissement dans un appareil de mesure a pour but d'assurer l'immobilisation rapide du système mobile.

Si l'amortissement est faible, le système atteint sa position d'équilibre en effectuant des oscillations dont les amplitudes ne décroissent que lentement. Il faut alors attendre longtemps l'équilibre. L'appareil n'est pratiquement utilisable que si c'est un appareil de zéro. Les appareils à faible amortissement sont donc à rejeter comme appareils usuels.

Il faut aussi abandonner un amortissement très supérieur à l'amortissement critique, car le retour à la position d'équilibre est très lent. On est donc conduit à utiliser un amortissement voisin de l'amortissement critique. Pour la commodité et la sécurité des mesures, on a intérêt à réaliser un système qui oscille ; on peut ainsi contrôler qu'il ne s'est pas produit de frottements parasites qui fausseraient les mesures.

En résumé, *les appareils de mesure seront munis de dispositifs réalisant un amortissement assez inférieur à l'amortissement critique de façon que la première oscillation soit perceptible.*

Pour les appareils de zéro, leur amortissement pourra être faible et leur période est pratiquement calculable par la formule :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}}.$$

Exercices.

1. Un pendule est constitué par un fil de 1 mètre de long à l'extrémité duquel est fixée une masse ponctuelle M = 25 *g*. Un plan P vertical, parallèle à l'axe d'oscillation du pendule et placé à 1 cm. de cet axe, exerce sur la masse M une force répulsive horizontale inversement proportionnelle au carré de sa distance à M. Cette force vaut 980 dynes lorsque la distance est 1 cm.

Trouver la position d'équilibre de M. Etudier le mouvement de M quand on l'écarte légèrement de sa position d'équilibre et qu'on la laisse libre.

2. Un fil d'acier tendu horizontalement porte en son milieu une tige AB de masse négligeable et de longueur de 2 *l* = 20 cm. Le milieu O est sur le fil. La tige porte à son

extrémité inférieure A une masse $m = 30\ g$ et le long de la moitié supérieure OB peut glisser une masse $M = 60\ g$. Ces deux masses ont de très petites dimensions. Le fil d'acier a pour constante de torsion C = 20 000 C. G. S. ; sa torsion est nulle quand AB est verticale.

Calculer la période des petites oscillations de la tige quand on l'écarte légèrement de sa position verticale dans les deux cas suivants:

α) La masse M est placée au point K_1 tel que $OK_1 = 5$ cm.

β) La masse M est placée au point K_2 tel que $OK_2 = 4$ cm.

CHAPITRE II

GÉNÉRALITÉS SUR LES MESURES

*6. — **Mesure d'une grandeur.** — Une grandeur est mesurable lorsqu'on peut définir l'égalité et l'addition de deux grandeurs de son espèce.* Par exemple les longueurs sont des grandeurs mesurables, car deux longueurs AB et A'B' sont égales lorsqu'on peut les placer l'une sur l'autre de façon que les deux extrémités A et A' d'une part, et B et B' d'autre part coïncident. De plus, la somme des deux longueurs AB et A'B' est la longueur obtenue en plaçant ces deux longueurs bout à bout.

Pour mesurer une grandeur G, on cherche combien de fois cette grandeur en contient une autre G_1 prise comme grandeur de référence et qu'on appelle l'*unité*. La comparaison de G et G_1 se traduit par un nombre g qui, par définition, mesure la grandeur G quand on prend G_1 pour unité.

Le nombre qui mesure une grandeur dépend donc de la grandeur elle-même et de l'unité choisie. On démontre dans les Cours d'Arithmétique les deux résultats suivants :

1° *Le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au rapport des nombres qui les mesurent avec la même unité* ;

2° *Le rapport des nombres qui mesurent une même grandeur avec deux unités différentes est égal à l'inverse du rapport de ces unités.*

Nous adopterons dans tout ce qui suit les notations suivantes : nous représenterons la grandeur par une lettre majuscule, le nombre qui mesure cette grandeur par la lettre minuscule correspondante et l'unité par une lettre majuscule entre crochets. Par exemple, la longueur G mesurée avec l'unité [G] aura pour mesure g ; la force électromotrice E mesurée avec l'unité [E] aura pour mesure e.

Prenons deux grandeurs G et G'. Mesurons-les avec la même unité [G] et soient g et g' leurs mesures. D'après les résultats indiqués précédemment, nous aurons :

$$\frac{G}{G'} = \frac{g}{g'}$$

Prenons maintenant une grandeur G. Mesurons-la successivement avec les deux unités $[G_1]$ et $[G_2]$ et soit g_1 et g_2 les mesures. D'après les résultats indiqués précédemment :

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{[G_2]}{[G_1]}$$

*7. — **Appareils de mesure.*** — En général, pour mesurer une grandeur, on ne la compare pas directement avec l'unité, mais on utilise un appareil de mesure qui permet de comparer les effets de deux grandeurs de même espèce. L'appareil est étalonné et donne la valeur de la grandeur à mesurer par simple lecture de la position d'une aiguille sur un cadran gradué.

Pour chaque grandeur, les appareils de mesure utilisés peuvent se classer en trois types :

1° *Les appareils à grande sensibilité*, pour déterminer avec précision les faibles valeurs de la grandeur à mesurer. C'est le cas du manomètre différentiel qui sert à mesurer les faibles différences de pression et des galvanomètres qui servent à mesurer les très faibles intensités de courant ;

2° *Les appareils pour les valeurs moyennes* de la grandeur à mesurer. Dans ce groupe se trouvent les appareils usuels comme les manomètres pour mesurer les pressions et les ampèremètres pour mesurer les intensités des courants ;

3° *Les appareils à sensibilité réduite* utilisés pour évaluer les grandes valeurs de la grandeur à mesurer. C'est le cas du manomètre à pistons inégaux pour mesurer les très grandes pressions et des ampèremètres shuntés pour mesurer les intensités des courants ;

Dans tous les cas, on exigera d'un appareil de mesure trois qualités : la *fidélité*, la *justesse* et la *sensibilité*.

Un appareil de mesure est **fidèle** lorsque ses indications ne varient pas dans le temps. Deux mesures successives d'une même grandeur doivent donner les mêmes résultats.

Un appareil de mesure est **juste** lorsque les mesures de grandeurs étalonnées donnent des résultats concordants.

Un appareil de mesure est **sensible** lorsqu'une faible variation de la grandeur à mesurer apparaît nettement sur l'appareil.

Si, par exemple, dans une balance ordinaire, une masse de 100 g. est équilibrée par une masse M invariable quel que soit le moment de la mesure, la balance est fidèle. Si de plus M = 100 g. la balance est juste. Enfin, si une masse de 1 cg. suffit pour changer l'équilibre d'une manière visible, la balance est sensible au centigramme.

ERREURS

*8. — **Erreurs.*** — Les mesures effectuées sont toujours entachées d'erreurs dues aux imperfections de nos sens et aux appareils utilisés.

La différence entre la valeur réelle d'une grandeur et la valeur mesurée s'appelle l'*erreur absolue*. On ne peut la connaître exactement puisqu'on ignore la valeur réelle, mais généralement, on peut en fixer une limite supérieure.

Le rapport entre l'erreur absolue et la valeur mesurée s'appelle l'*erreur relative*. On ne la connaît pas non plus, mais on peut en déterminer une limite

supérieure qui fait connaître la qualité de la mesure. *Plus la limite supérieure de l'erreur relative est faible, plus la mesure est bonne.*

Supposons que l'on ait mesuré une longueur AB et soit 7,50 m le résultat de cette mesure. Evaluons, d'après la méthode de mesure utilisée, une limite supérieure de l'erreur absolue commise, soit 7,5 cm. L'erreur relative correspondante aura pour limite supérieure : $\frac{7,5}{750} = \frac{1}{100}$. Nous pouvons traduire ce résultat:

1° Soit en disant que la longueur AB mesure 7,50 m à 1/100 près ;

2° Soit, ce qui est préférable dans les déterminations de précision, en écrivant :

$$AB = 7,50 \text{ m} \pm 0,075 \text{ m}.$$

Nous mettons le signe $\pm$ car nous ignorons dans quel sens l'erreur a été commise. Le résultat précédent exprime que la valeur réelle de la longueur AB est certainement comprise entre 7,50 — 0,075 = 7,425 m et 7,50 + 0,075 = 7,575 m.

Par suite, si l'on fait de nombreuses mesures sur une même grandeur, le calcul des limites supérieures des erreurs commises donne, pour chaque mesure, un intervalle dans lequel se trouve certainement la valeur réelle de la grandeur. La comparaison de tous ces résultats permet de voir si toutes les valeurs obtenues sont compatibles entre elles.

*9. — **Erreurs systématiques et erreurs fortuites.*** — Les *erreurs systématiques* tiennent à un défaut de l'instrument ou du procédé de mesure. Par exemple, une règle graduée dont les divisions sont un peu trop grandes donne systématiquement des résultats trop petits. Le sens de l'erreur est constant.

Les *erreurs fortuites* sont, au contraire, essentiellement variables en grandeur et sens. On les élimine en grande partie en prenant la moyenne arithmétique d'un grand nombre de résultats. Lorsqu'on fait ainsi un grand nombre de mesures d'une grandeur, dans les conditions où il n'y a pas d'erreurs systématiques, les erreurs les plus nombreuses sont les plus petites en valeur absolue. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, les résultats d'un grand nombre n de mesures d'une même grandeur. On prend comme valeur de cette grandeur :

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}. \qquad (1)$$

Si n est grand, les petites erreurs se compensent sensiblement et si quelque erreur plus grande n'est pas compensée, elle est du moins divisée par un nombre élevé.

Les quantités $a_1 - a$, $a_2 - a$, ..., $a_n - a$, s'appellent les erreurs *apparentes*. Leur somme algébrique est rigoureusement nulle comme le montre la relation (1). La moyenne arithmétique de leurs *valeurs absolues* ne l'est pas, naturellement ; c'est ce qu'on appelle l'*erreur moyenne* :

$$e = \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \ldots + |a_n - a|}{n}.$$

*10. — **Limite supérieure de l'erreur sur le résultat d'une mesure indirecte.*** — Les grandeurs de certaines espèces, peu nombreuses d'ailleurs, sont mesurables *directement*, c'est-à-dire par comparaison *directe* avec l'unité : de ce nombre sont les longueurs, les masses, les temps. Par exemple on mesure une longueur en millimètres en plaçant des millimètres bout à bout et en regardant combien la longueur considérée en contient.

Mais pour la plupart des grandeurs, on ne peut procéder ainsi. On ne mesure pas l'aire d'un terrain en mètres carrés en plaçant dessus, côte à côte, des mètres carrés. On mesure les longueurs des côtés et on *calcule* l'aire *par une formule appropriée.* On fait ainsi une mesure *indirecte.*

Une mesure indirecte se ramène à l'application d'une formule reliant la grandeur à évaluer à d'autres grandeurs directement mesurables (qui sont le plus souvent des longueurs, des masses et des temps).

Le problème que nous nous proposons de résoudre dans ces circonstances est le suivant. Soit :

$$x = a^{\alpha}\ b^{\beta}\ c^{\gamma} \qquad (1)$$

la formule qui relie la grandeur X à évaluer à des grandeurs A, B, C directement mesurables. Connaissant les limites supérieures des erreurs possibles dans les mesures directes de a, b, c, trouver une limite supérieure de l'erreur possible sur le résultat x.

Désignons par Δa, Δb, Δc les erreurs absolues commises dans les mesures de a, b, c. Admettons que ces erreurs soient assez petites pour qu'on puisse appliquer les règles du calcul différentiel.

Prenons les logarithmes népériens des deux membres de la relation (1) :

$$\mathrm{L}x = \alpha\,\mathrm{L}a + \beta\,\mathrm{L}b + \gamma\,\mathrm{L}c$$

d'où :

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\alpha \Delta a}{a} + \frac{\beta \Delta b}{b} + \frac{\gamma \Delta c}{c}.$$

N'espérons pas que cette relation nous permette de calculer Δx ; Δa, Δb, Δc ne sont pas connus, nous ne connaissons même pas leurs signes. Tout ce que nous pouvons affirmer, c'est que, si nous remplaçons dans le second membre les erreurs absolues par leurs limites supérieures $\Delta' a$, $\Delta' b$, $\Delta' c$ et si nous ajoutons tous les termes $\frac{\alpha \Delta' a}{a}$, $\frac{\beta \Delta' b}{b}$, ... *pris en valeur absolue,* nous obtenons une somme qui est au moins égale au premier membre pris en valeur absolue :

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \leq \left|\frac{\alpha \Delta' a}{a}\right| + \left|\frac{\beta \Delta' b}{b}\right| + \left|\frac{\gamma \Delta' c}{c}\right|.$$

Cette inégalité nous donne une limite supérieure de l'erreur possible sur x.

*11. — **Calcul des erreurs.*** — D'une façon générale, nous admettrons que les erreurs absolues sont suffisamment petites pour qu'on puisse les as-

similer à des différentielles et nous appliquerons les règles du calcul différentiel au calcul des erreurs.

Or, nous ne connaissons pas les erreurs absolues mais seulement les *valeurs absolues des limites supérieures de ces erreurs*, puisque nous ignorons le sens des erreurs commises.

Par suite, pour faire un calcul d'erreur, nous opérerons de la manière suivante :

1° *Nous appliquerons les règles du calcul différentiel à la relation* $x = f(a, b, c)$ qui permet de calculer x connaissant les mesures a, b, c.

Nous prendrons, suivant les cas, soit des différentielles ordinaires, soit des différentielles logarithmiques ;

2° *Nous grouperons ensemble les termes semblables* de façon à obtenir, entre les erreurs Δx, Δa, Δb et Δc, une relation de la forme :

$$\Delta x = A\,\Delta a + B\,\Delta b + C\,\Delta c.$$

A, B et C sont des coefficients algébriques *que nous calculerons.*

Cette opération est nécessaire car, si une même mesure intervient plusieurs fois dans un calcul, l'erreur dont elle est affectée sera toujours la même en grandeur et en sens ;

3° *Nous calculerons une limite supérieure de l'erreur sur* x en remplaçant chacun des termes du second membre par sa valeur absolue et en faisant la somme des limites supérieures connues de chaque terme :

$$|\Delta x| \leq |A| \times |\Delta' a| + |B| \times |\Delta' b| + |C| \times |\Delta' c|$$

$|\Delta' a|$, $|\Delta' b|$ et $|\Delta' c|$ étant les limites supérieures *connues* de $|\Delta a|$, $|\Delta b|$ et $|\Delta c|$.

EXEMPLE. — Calculer la quantité $H = \dfrac{(n' - n)(n + n'')}{n'' - n}$ sachant que $n = 500$, $n' = 600$, $n'' = 650$. Déterminer une limite supérieure de l'erreur commise sur H sachant que l'erreur absolue sur chacune des valeurs de n, n' et n'' ne dépasse pas 0,1.

Calculons d'abord H.

$$H = \frac{(n' - n)(n + n'')}{n'' - n} \qquad (1)$$

$$H = \frac{(600 - 500)(500 + 650)}{650 - 500} = \frac{11500}{15} = 766{,}6$$

Appelons Δn, $\Delta n'$, $\Delta n''$ et ΔH les erreurs absolues commises sur n, n' n'' et H. Différencions la relation (1)

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta n' - \Delta n}{n' - n} + \frac{\Delta n + \Delta n''}{n + n''} - \frac{\Delta n'' - \Delta n}{n'' - n}.$$

Groupons les termes semblables :

$$\frac{\Delta H}{H} = \Delta n \left(\frac{1}{n+n''} + \frac{1}{n''-n} - \frac{1}{n'-n}\right) + \frac{\Delta n'}{n'-n} + \Delta n'' \left(\frac{1}{n+n''} - \frac{1}{n''-n}\right).$$

$$\frac{\Delta H}{H} = \Delta n \left(\frac{1}{1150} + \frac{1}{150} - \frac{1}{100}\right) + \frac{\Delta n'}{100} + \Delta n'' \left(\frac{1}{1150} - \frac{1}{150}\right)$$

$$\frac{\Delta H}{H} = -\Delta n \left(\frac{1}{300} - \frac{1}{1150}\right) + \frac{\Delta n'}{100} - \Delta n'' \left(\frac{1}{150} - \frac{1}{1150}\right)$$

Passons aux limites supérieures :

$$\left|\frac{\Delta H}{H}\right| \leq \frac{|\Delta n|}{300} + \frac{|\Delta n'|}{100} + \frac{|\Delta n''|}{150}.$$

Or $|\Delta n| \leq 0{,}1 \qquad |\Delta n'| \leq 0{,}1 \qquad |\Delta n''| \leq 0{,}1$

$$\left|\frac{\Delta H}{H}\right| \leq 0{,}1 \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{100} + \frac{1}{150}\right)$$

$$\left|\frac{\Delta H}{H}\right| \leq \frac{2}{1000}.$$

H est donc connu avec une erreur relative de $\frac{2}{1000}$ au plus. Par suite

$$|\Delta H| \leq \frac{2H}{1000} \quad \text{ou} \quad |\Delta H| \leq 1{,}533 < 1{,}6$$

c'est-à-dire que H est certainement compris entre :

$$766{,}6 - 1{,}6 = 765 \text{ et } 766{,}6 + 1{,}6 = 768{,}2.$$
$$765 < H < 768{,}2$$

Nous prendrons H = 767, l'erreur commise étant inférieure à 2.

Exercices.

3. Le rapport γ des chaleurs spécifiques d'un gaz est donné, dans l'expérience de Clément et Desormes, par la formule $\gamma = \frac{h}{h-h'}$; h et h' sont les pressions du gaz avant et après l'expérience. On a trouvé : $h = 10{,}0$ cm et $h' = 2{,}9$ cm.

Calculer γ et en déduire l'incertitude sur la valeur calculée sachant que les pressions sont évaluées à 1 mm près.

Réponse : $\gamma = 1{,}41$ à 1/50 près.

4. L'angle A d'un prisme à liquide est relié à l'indice n et à la déviation minimum D par la formule :

$$\sin \frac{A+D}{2} = n \sin \frac{A}{2}.$$

Pour mesurer n on peut : soit laisser A fixe et déterminer expérimentalement la déviation minimum correspondante D ; soit laisser la déviation fixe et déterminer pour quelle valeur de A elle correspond au minimum de déviation.

Comparer la précision de ces deux méthodes en supposant que la grandeur fixe (A ou D) vaut 60° et est connue exactement. La grandeur mesurée (D ou A) est appréciée avec la même incertitude ε dans les deux cas et l'on a obtenu : dans le premier cas $D = 60°$ et dans le second cas $A = 60°$.

Réponse : A fixe, $\Delta n \leq \frac{\varepsilon}{2}$; D fixe, $\Delta n \leq \varepsilon$.

5. Le coefficient de dilatation absolue m du mercure est donné, dans la méthode de Dulong et Petit, par la formule

$$m = \frac{h - h_0}{h_0 t}.$$

Dans une détermination, on a trouvé : $h_0 = 624{,}5$ mm à 0,1 mm près ; $h - h_0 = 11{,}35$ mm à 0,02 mm près ; $t = 100°$ à 0°1 près.

Déterminer m et calculer l'incertitude sur la valeur ainsi obtenue.

Réponse : $m = 0{,}000182$ à 3/1000 près.

CHAPITRE III

SYSTÈMES D'UNITÉS

*12. — **Systèmes cohérents d'unités.*** — Mesurer une grandeur, c'est la comparer à une grandeur de même espèce prise comme unité. On pourrait choisir arbitrairement une unité pour chaque grandeur, l'ensemble de toutes ces unités constituerait un *système d'unités*. Comme ces unités n'auraient aucun lien entre elles, le système serait dit *incohérent*.

Montrons qu'avec des unités arbitraires, les formules traduisant les lois physiques, mécaniques ou géométriques contiendraient des coefficients numériques. Prenons, par exemple, comme unité de longueur le mètre et comme unité de surface la surface d'un rectangle de 3 mètres de longueur et 2 mètres de largeur. Cherchons la formule donnant la surface d'un rectangle quelconque. L'expérience montre que, quelles que soient les unités choisies, la surface s d'un rectangle est proportionnelle à sa longueur l_1 et proportionnelle à sa largeur l_2. La formule donnant cette surface sera :

$$s = \mathrm{K}\, l_1\, l_2$$

K étant une constante de proportionnalité.

Mais pour $l_1 = 3$ m et $l_2 = 2$ m nous avons le rectangle qui sert d'unité de surface, c'est-à-dire pour lequel $s = 1$. Nous écrivons donc :

$$1 = \mathrm{K} \times 3 \times 2$$

d'où

$$\mathrm{K} = \frac{1}{6}$$

La formule donnant la surface d'un rectangle quelconque sera, avec nos unités

$$s = \frac{1}{6}\, l_1\, l_2.$$

Pour éviter ce coefficient $\frac{1}{6}$, adoptons comme formule donnant la surface d'un rectangle : $s = \mathrm{K}l_1\, l_2$ avec $\mathrm{K} = 1$, c'est-à-dire la formule simple $s = l_1\, l_2$. Cette formule implique que si $l_1 = l_2 = 1$, on aura $s = 1$. L'unité de surface doit donc être celle d'un carré ayant l'unité de longueur comme côté.

Plus généralement, *choisir les coefficients de proportionnalité égaux à* 1 *dans les formules traduisant les lois physiques, géométriques ou mécaniques, revient*

à relier entre elles les unités. Celles-ci ne sont plus arbitraires, une certaine cohérence s'établit dans le système. Nous dirons que nous avons réalisé un **système cohérent d'unités.** Pour constituer un tel système il faut donc :

α) Choisir arbitrairement des unités de base appelées *unités fondamentales* ;

β) Déduire toutes les autres unités appelées les *unités dérivées* en utilisant les lois physiques, géométriques ou mécaniques traduites par des formules où les coefficients de proportionnalité seront faits égaux à 1.

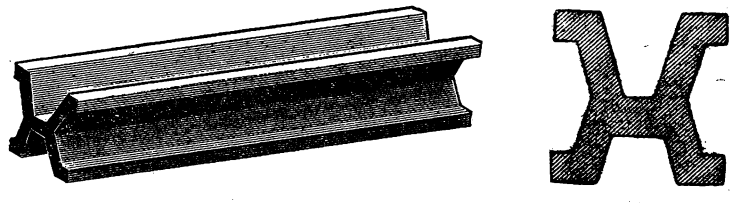
13. — Unités fondamentales. — Ce sont les unités qui servent de base à un système et à partir desquelles on déduit toutes les autres unités. Un double problème se pose : De quelle nature seront ces unités fondamentales et quel en sera le nombre ?

La nature des unités fondamentales est arbitraire à condition toutefois qu'elles soient indépendantes. Pourtant, pour la précision des définitions, on choisira de préférence des unités qui peuvent se représenter par des étalons, définis d'une façon précise, et invariables dans le temps et l'espace. On a reconnu de nombreux avantages aux systèmes définis à partir des unités de masse, de longueur et de temps.

Le nombre des unités fondamentales n'est pas moins arbitraire que leur nature. On a intérêt à diminuer ce nombre. Les différents systèmes d'unités utilisés comportent en général trois unités fondamentales.

Les unités fondamentales des différents systèmes sont définies avec précision à partir de grandeurs fixes (*étalons*) qui sont au nombre de trois :

1° LE MÈTRE INTERNATIONAL. — Il est formé par une règle prismatique en platine iridié. Sa section droite, qui a la forme indiquée sur la figure 12,



A B

FIG. 12. — Mètre étalon : A) *Vue perspective* ; B) *section* (Grandeur naturelle).

a été calculée de manière à obtenir le maximum de résistance à toute déformation. Au voisinage des deux extrémités, on a tracé deux traits fins, sur la face supérieure. *Par définition, la distance de ces deux traits à la température de 0° représente le mètre international.*

Des copies du mètre étalon, qui est déposé au Bureau international des Poids et Mesures, ont été délivrées à toutes les nations ayant adhéré au système métrique. La France possède l'étalon M. 8.

Le mètre international possède les qualités fondamentales de tout étalon : il est invariable, indestructible et facile à rétablir. Pour le contrôler,

on a cherché à le rattacher à un étalon naturel de longueur. On a mesuré avec précision la longueur d'onde d'une lumière particulièrement monochromatique : la lumière rouge de la raie du cadmium. La valeur adoptée pour la longueur d'onde de la raie rouge du cadmium est $\lambda = 0{,}64384696\ \mu$, dans l'air sec, à 15°, sous la pression normale. Cette précision correspond à une erreur de 0,1 μ sur 1 mètre, elle est comparable à l'incertitude qui résulte, pour l'étalon, de l'épaisseur des traits.

2° LE KILOGRAMME INTERNATIONAL. — Il est constitué par un cylindre de platine iridié dont le diamètre de base est égal à la hauteur (39 mm). Par définition, la masse de cet étalon est un kilogramme.

Cet étalon est déposé au Bureau international des Poids et Mesures. Des copies ont été délivrées à toutes les nations. La France possède l'étalon K.35.

Pour pouvoir reconstituer cet étalon, on a déterminé avec précision la masse du décimètre cube d'eau pure à 4°. D'après les mesures les plus récentes, 1 dm^3 d'eau pure à 4° a une masse égale à 0,999973 kg.

3° LE JOUR SOLAIRE MOYEN. — En astronomie, on distingue le jour solaire vrai, le jour sidéral et le jour solaire moyen.

Le *jour solaire vrai* est le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du soleil au même méridien. Il présente l'inconvénient de varier périodiquement et de près d'une minute pendant le cours d'une année.

Le *jour sidéral* est le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs d'une étoile déterminée au même méridien. Il est constant, mais comme il diffère de plusieurs minutes du jour solaire, il ne concorde plus, au bout d'un certain temps, avec les jours et les nuits. Il serait tout à fait incommode qu'un laps de temps représenté par un certain nombre entier de jours sidéraux ne contînt pas deux nombres entiers égaux de jours et de nuits.

Le *jour solaire moyen*, qui est l'étalon, est défini de la manière suivante :

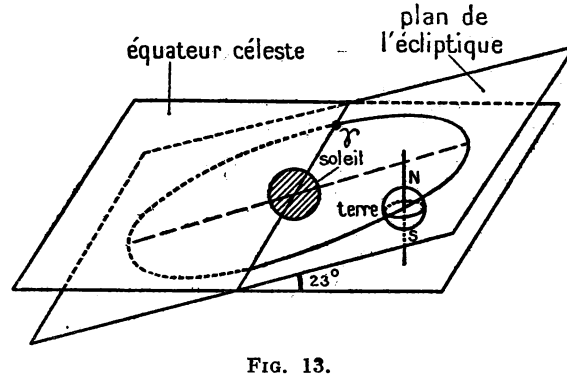


FIG. 13.

On définit d'abord l'*année* de temps solaire moyen. Le plan de l'écliptique (fig. 13) (trajectoire de la Terre) fait un angle parfaitement déterminé, de 23° environ, avec le plan de l'équateur terrestre (plan perpendiculaire à l'axe autour duquel la Terre tourne sur elle-même). Le plan parallèle à l'équateur, mené par le centre du soleil, coupe le plan de l'écliptique suivant une droite dont les deux extrémités sur l'écliptique sont des points parfaitement déterminés ; l'un d'eux s'appelle le point γ. Par définition, l'*année* de temps solaire moyen (ou *année tropique*)

est le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs de la Terre au point γ.

Il s'agit maintenant de subdiviser cette *année* en un certain nombre de *jours* égaux qu'on appellera *jours solaires moyens*. Là se présente une difficulté due toujours à la nécessité d'un accord avec la vie civile. L'année tropique ne contient pas un nombre entier de jours civils, ou de jours solaires vrais. Il revient encore au même de dire que le temps que met la Terre à faire un tour autour du Soleil (à aller du point γ au point γ) n'est pas un multiple entier du temps qu'elle met à faire un tour sur elle-même, ou encore, que la Terre ne présente pas au Soleil le même méridien lors de ses passages successifs au point γ.

Il faut donc trouver un nombre *entier n* d'années tropiques assez grand pour contenir un nombre *entier k* de jours solaires vrais. Les astronomes ont trouvé que 400 années tropiques contiennent très sensiblement 146 097 jours solaires vrais, c'est-à-dire qu'après 400 tours d'écliptique, la Terre présente de nouveau au Soleil le même méridien (très sensiblement).

Alors, *par définition du jour solaire moyen*, 400 années tropiques valent 146 097 *jours solaires moyens*. Donc *une année tropique vaut* : $\frac{146\,097}{400} =$ 365,242 *jours solaires moyens* [1].

14. — ***Unités dérivées.*** — Nous avons vu que les unités dérivées se déduisent des unités fondamentales en adoptant dans les formules traduisant les lois physiques, géométriques ou mécaniques, des coefficients de proportionnalité égaux à 1. Mais, *pour définir une même unité*, on peut avoir à sa disposition plusieurs formules différentes traduisant des lois distinctes. Laquelle choisira-t-on pour définir l'unité dérivée ? Par exemple, nous pouvons définir l'unité de force soit par la formule $f = kmg$ qui donne le poids d'un corps, soit par la formule $f = \varepsilon \frac{mm'}{r^2}$ qui traduit la loi des attractions entre deux masses m et m' situées à la distance r dans l'air.

Nous serons guidés pour ce choix par la remarque suivante : dans la pratique, pour mesurer une grandeur quelconque, on la compare à une unité *de même espèce.* Pour la facilité des mesures, il est commode de représenter cette unité, qui est une unité dérivée, par un étalon légal parfaitement défini. Pour le construire, on se basera sur la relation de définition de l'unité dérivée considérée. Cette relation devra, par suite, correspondre à une expérience susceptible d'une grande précision.

Donc, *la formule choisie pour définir une unité dérivée devra correspondre*

[1] L'année civile contient généralement 365 jours : cette durée est trop courte. Si les années civiles étaient toutes égales, 400 années civiles ne contiendraient que 146 000 jours. Il manquerait 97 jours, soit plus de trois mois. Les saisons ne se feraient plus du tout aux époques normales de l'année.

Supposons tout d'abord que la correction soit de 100 jours (au lieu de 97) pour 400 années. Il suffirait d'ajouter un jour tous les quatre ans (année bissextile). Mais on aurait alors 3 jours en trop à la fin des 400 années. On a convenu de ne pas prendre bissextiles les années *séculaires* dont les deux premiers chiffres forment un nombre qui n'est pas multiple de 4. Ainsi l'année 2 000 sera bissextile ; les années 2 100, 2 200, 2 300 ne le seront pas ; l'année 2 400 le sera, etc.

à des expériences permettant des mesures très précises. Dans l'exemple précédent, on préférera la formule $f = kmg$ à la formule $f = \varepsilon \frac{mm'}{r^2}$ car l'accélération de la pesanteur g se mesure avec une précision 1000 fois plus grande que la constante d'attraction ε.

En résumé, certaines unités dérivées importantes seront représentées par des étalons légaux. Ainsi, bien que les unités électriques dérivent des unités mécaniques, on a représenté l'ohm et l'ampère par des étalons.

15. — ***Dimensions des unités dérivées.*** — Pour effectuer les problèmes de changements d'unités, il est commode d'utiliser des formules symboliques appelées *équations aux dimensions.*

Prenons, par exemple, la formule $v = l/t$ qui permet de calculer la vitesse v d'un mobile animé d'un mouvement uniforme en fonction de l'espace l parcouru pendant le temps t.

Cette formule établit une relation *numérique* entre les trois nombres v, l et t qui mesurent, dans une certaine expérience, une vitesse V_1, une longueur L_1 et un temps T_1. Si nous changeons les unités employées pour mesurer ces mêmes grandeurs, nous obtenons des nombres v', l' et t', mais *si les conventions de définition de l'unité de vitesse à partir des unités de longueur et de temps sont conservées, nous avons* : $v' = l'/t'$.

En divisant membre à membre v et v' nous obtenons :

$$\frac{v}{v'} = \frac{l}{l'} \times \frac{t'}{t}. \qquad (3)$$

Le rapport $\frac{v}{v'}$ des nombres qui mesurent *une même grandeur* V_1 avec les unités $[V]$ et $[V']$ est égal au rapport inverse des unités (§ 6) : $\frac{v}{v'} = \frac{[V']}{[V]}$.

De même, si $[L]$ et $[L']$ sont les deux unités de longueurs utilisées et $[T]$ et $[T']$ les deux unités de temps :

$$\frac{l}{l'} = \frac{[L']}{[L]}, \qquad \frac{t'}{t} = \frac{[T]}{[T']}.$$

Par suite, la relation (3) donne, entre les unités, la relation :

$$\frac{[V']}{[V]} = \frac{[L']}{[L]} \times \frac{[T]}{[T']};$$

Posons $\frac{[V']}{[V]} = V$, $\frac{[L']}{[L]} = L$, $\frac{[T']}{[T]} = T$, la relation précédente s'écrit :

$$V = \frac{L}{T} \qquad \text{ou} \qquad V = LT^{-1}.$$

La relation $V = LT^{-1}$ s'appelle l'*équation aux dimensions d'une vitesse.* C'est une relation entre les quantités V, L et T qui représentent des *rapports* de

deux quantités de même espèce, c'est-à-dire des **nombres**. Elle permet de calculer l'un de ces nombres connaissant les deux autres.

Il semblerait que, pour obtenir l'équation aux dimensions d'une grandeur, nous devrions recommencer chaque fois un raisonnement analogue. Mais d'une façon générale, la forme de l'équation aux dimensions d'une unité dérivée est la même que celle de la relation, entre des valeurs numériques, utilisée pour définir cette unité. Pour une vitesse, l'équation aux dimensions est $V = LT^{-1}$ et la formule qui sert à la calculer est $v = ll^{-1}$.

Donc, si la formule permettant de calculer la mesure x d'une grandeur X_1 est : $x = a^\alpha b^\beta c^\gamma$, l'équation aux dimensions de la grandeur X_1 sera :

$$X = A^\alpha B^\beta C^\gamma;$$

ce qui signifie que si [X], [A], [B], [C] sont les grandeurs unités d'un premier système, [X'], [A'], [B'], [C'] les grandeurs unités d'un deuxième système *ayant les mêmes conventions de définition des unités dérivées*, on aura :

$$\frac{[X']}{[X]} = \left(\frac{[A']}{[A]}\right)^\alpha \times \left(\frac{[B']}{[B]}\right)^\beta \times \left(\frac{[C']}{[C]}\right)^\gamma.$$

L'équation aux dimensions est une relation entre des rapports d'unités, elle n'a pas d'autre signification. Elle ne peut pas nous renseigner sur la *nature* d'une grandeur. D'ailleurs, pour une unité donnée, la forme de l'équation aux dimensions dépend des conventions faites pour le choix des formules. Nous en verrons des exemples plus loin (§ 273).

Les équations aux dimensions nous permettront :

1° D'effectuer tous les problèmes relatifs aux changements d'unités puisqu'elles permettent de calculer le rapport de deux unités quelconques de deux systèmes connaissant les rapports des unités fondamentales ;

2° De vérifier l'homogénéité des formules. En effet, les formules traduisant les lois physiques rendent compte de faits expérimentaux et par suite doivent être d'une forme indépendante du système d'unités adopté. Pour cela, il faut qu'un changement d'unités altère de la même façon les deux membres de la formule, c'est-à-dire que les deux membres aient l'un et l'autre la même équation aux dimensions. Il est donc commode, dans un calcul, de garder des relations littérales et de contrôler, de temps en temps, l'homogénéité des relations. Si les deux membres d'une relation n'ont pas les mêmes dimensions, c'est que la relation est inexacte.

16. — ***Différents systèmes d'unités mécaniques.*** — Il existe quatre systèmes principaux d'unités mécaniques. Ce sont :

1° LE SYSTÈME C. G. S. — C'est le système adopté par les Physiciens. Il est défini par les trois unités fondamentales suivantes :

Le *centimètre* comme unité de longueur. Le centimètre est la 100e partie du Mètre international (§ 13-1°) ;

Le *gramme* comme unité de masse. Le gramme est la 1 000e partie du Kilogramme international (§ 13-2°) ;

La *seconde* comme unité de temps. La seconde est la 86 400e partie du jour solaire moyen (§ 13-3°).

2° Le système M. K. S. — Il est défini par les trois unités fondamentales suivantes : Le *mètre* comme unité de longueur ; — Le *kilogramme* comme unité de masse ; — La *seconde* comme unité de temps.

3° Le système M. T. S. — C'est le système légal en France défini par la loi du 2 avril 1919. Il a pour base les trois unités fondamentales suivantes :

Le *mètre* comme unité de longueur ;

La *tonne* comme unité de masse. La tonne est égale à 1 000 fois l'étalon international de masse(1 000 kg) ;

La *seconde* comme unité de temps.

4° Le système M. Kf. S. — Ce système se distingue des précédents en ce que l'une de ses unités fondamentales est une unité de force au lieu d'une unité de masse. Les trois unités fondamentales sont :

Le *mètre* comme unité de longueur ;

Le *kilogramme-force* comme unité de **force**. Le kilogramme-force est, par définition, le poids d'une masse de 1 kilogramme en un lieu où l'accélération de la pesanteur est $g = 980{,}665$ *cm/s*² ;

La *seconde* comme unité de temps ;

Nous allons étudier les unités dérivées de chacun de ces systèmes.

17. — ***Système C. G. S.*** — Les unités fondamentales sont le centimètre, le gramme et la seconde. Les unités dérivées sont :

Unité de vitesse. — Elle est choisie de manière que la formule du mouvement uniforme ne contienne pas de facteur de proportionnalité (K = 1) et s'écrive : $e = vt$.

En d'autres termes, nous devons avoir $v = 1$, lorsque simultanément $e = 1$ et $t = 1$. Donc, *l'unité C. G. S. de vitesse est la vitesse d'un mouvement uniforme dans lequel le mobile parcourt un centimètre par seconde.*

On l'appelle *centimètre par seconde*, et on la représente par le symbole : *cm/s*.

Unité d'accélération. — On raisonne comme dans le cas précédent, mais pour la formule du mouvement uniformément varié :

$$v = \gamma t$$

On a, par définition, $\gamma = 1$ lorsque simultanément : $v = 1$ et $t = 1$.

Donc, *l'unité C. G. S. d'accélération est l'accélération d'un mouvement uni-*

formément accéléré dans lequel la vitesse du mobile s'accroît, en une seconde d'un centimètre par seconde.

On l'appelle *centimètre par seconde par seconde*, et on la représente par le symbole : cm/s^2.

UNITÉ DE FORCE. DYNE. — On utilise la formule :

$$f = m\gamma .$$

On a, par définition, $f = 1$ lorsque simultanément : $m = 1$ et $\gamma = 1$.

Donc, *l'unité C. G. S. de force ou* ***dyne*** *est la force qui imprime à une masse d'un gramme une accélération d'un centimètre par seconde par seconde.*

UNITÉ DE TRAVAIL. ERG. — On utilise la formule :

$$\mathcal{C} = fe.$$

On a : $\mathcal{C} = 1$ lorsque $f = 1$ et $e = 1$.

Donc, *l'unité C. G. S. de travail ou* ***erg*** *est le travail effectué par une force d'une dyne qui déplace son point d'application d'un centimètre dans sa direction.*

UNITÉ DE PUISSANCE. — On utilise la formule :

$$P = \frac{\mathcal{C}}{t}.$$

On a : $P = 1$, lorsque : $\mathcal{C} = 1$ et $t = 1$.

Donc, *l'unité C. G. S. de puissance est la puissance d'un moteur qui fait un travail d'un erg pendant une seconde.*

On l'appelle *erg par seconde* et on la représente par le symbole : *erg/s.*

UNITÉ DE PRESSION. — On utilise la formule :

$$p = \frac{f}{s}.$$

On a : $p = 1$, lorsque $f = 1$ et $s = 1$.

Donc, *l'unité C. G. S. de pression ou* ***barye*** *est une pression d'une dyne par centimètre carré.*

18. — ***Unités pratiques rattachées au système C. G. S.*** — Certaines unités du système C. G. S. sont beaucoup plus petites que les grandeurs de même espèce dont on s'occupe couramment en pratique : tels sont, par exemple, la *dyne*, l'*erg* et l'*erg par seconde*. Les grandeurs correspondantes sur lesquelles portent les calculs pratiques, évaluées avec ces unités, auraient des valeurs numériques très grandes et incommodes.

On utilise, dans la pratique, d'autres unités qui valent 10^n fois les précédentes, n étant un entier assez grand.

De ce nombre sont :

La *mégadyne* qui vaut 10^6 dynes ;

Le *joule* qui vaut 10^7 ergs.

Le *watt* qui est la puissance d'un moteur faisant un joule par seconde et qui vaut par conséquent 10^7 *ergs/s*. L'*hectowatt*, le *kilowatt*, valent respectivement 100 et 1 000 watts.

De ces dernières unités de puissance dérivent de nouvelles unités de travail, telles que le *watt-heure*, l'*hectowatt-heure*, le *kilowatt-heure* qui sont les travaux faits *en une heure* par des machines ayant respectivement comme puissances : un watt, un hectowatt, un kilowatt. Le *watt-heure* vaut par conséquent 3 600 joules.

19. — ***Système : mètre, kilogramme-masse, seconde.*** — Le *mètre*, le *kilogramme-masse*, la *seconde*, dont les définitions sont données précédemment, sont respectivement les unités de longueur, de masse et de temps de ce système. Les formules de définition des unités dérivées sont les mêmes que pour le système C. G. S. Par suite, les unités dérivées sont les suivantes :

VITESSE. — Le mètre par seconde *m/s*, qui vaut 100 u. C. G. S. de vitesse.

ACCÉLÉRATION. — Le mètre par seconde par seconde *m/s²*, qui vaut 100 u. C. G. S. d'accélération.

FORCE. — La force qui imprime à une masse d'un kilogramme une accélération d'un mètre par seconde par seconde ; elle vaut 100 000 ou 10^5 dynes.

TRAVAIL. — Le travail exécuté par l'unité de force précédente déplaçant son point d'application d'un mètre dans sa direction ; il vaut 10^7 ergs, c'est-à-dire un *joule*.

PUISSANCE. — La puissance d'un moteur qui fait un travail d'un joule par seconde ; elle vaut par conséquent un watt.

PRESSION. — La pression exercée par l'unité de force s'exerçant sur une surface de 1 m^2. Elle vaut 10 baryes.

20. — ***Système : mètre, tonne-masse, seconde.*** — C'est le système légal en France. Il ne diffère du précédent que par l'unité de masse qui est 1 000 fois plus grande. Les unités dérivées sont :

VITESSE. — Le mètre par seconde.

ACCÉLÉRATION. — Le mètre par seconde par seconde.

Ces unités sont les mêmes que dans le système précédent parce qu'elles ne dépendent que des unités de longueur et de temps qui n'ont pas changé.

FORCE. — L'unité de force, le **sthène**, est la force qui imprime à une masse d'une tonne une accélération d'un mètre par seconde par seconde. Elle vaut 1 000 fois l'unité du système précédent, donc 10^9 dynes.

TRAVAIL. — L'unité de travail est le travail d'une force d'un sthène qui déplace son point d'application d'un mètre dans sa direction. Elle vaut 1.000 fois l'unité du système précédent, donc un **kilojoule**, ou 10^{10} ergs.

PUISSANCE. — L'unité de puissance est la puissance d'un moteur qui fait un travail d'un kilojoule par seconde, donc un **kilowatt**, ou 10^{10} *ergs/s*.

PRESSION. — L'unité de pression est la **pièze** : c'est une pression d'un sthène par mètre carré. Elle vaut 10^4 baryes. La pression atmosphérique vaut sensiblement une hectopièze, soit une mégabarye.

21. — ***Système : mètre, kilogramme-force, seconde.*** — Ce système se distingue des précédents en ce que l'une de ses unités fondamentales est une unité de force au lieu d'une unité de masse.

Le *kilogramme-force* est, par définition, le poids, en un lieu où $g = 980{,}665\ cm/s^2$ d'un corps ayant pour masse un kilogramme. D'après la formule $f = m\gamma$, il vaut : $1000 \times 980{,}665 = 980\ 665$ dynes ou 9,80665 unités de force du système : mètre, kilogramme-masse, seconde.

Les unités de vitesse et d'accélération sont, comme dans les deux systèmes précédents, le mètre par seconde et le mètre par seconde par seconde.

L'*unité de masse* qui devient, dans ce système, une unité dérivée, est la masse à laquelle une force d'un kilogramme-force imprime une accélération d'un mètre par seconde par seconde. La même force imprime à une masse d'un kilogramme une accélération de 9,80665 m/s^2 (chute d'un corps d'un kilo). L'unité de masse de ce système vaut donc 9,80665 kilogrammes ou 9806,65 grammes.

L'*unité de travail* est le travail d'une force d'un *kilogramme* qui déplace son point d'application d'un *mètre* dans sa direction ; c'est le **kilogrammètre**. Il vaut 9,80665 unités de travail du système : mètre, kilogramme-masse seconde, soit 9,80665 joules.

L'*unité de puissance* est la puissance d'un moteur qui fait un travail d'un kilogrammètre en une seconde. Elle vaut 9,80665 unités de puissance du système : mètre, kilogramme-masse, seconde, c'est-à-dire 9,80665 watts.

On utilise beaucoup plus souvent le **cheval-vapeur** qui vaut 75 unités de puissance de ce système et qui est donc la puissance d'un moteur faisant 75 kilogrammètres par seconde. Le cheval-vapeur vaut par conséquent : $9{,}80665 \times 75 = 735{,}5$ watts ou 0,7355 kW ; le cheval-vapeur et le kilowatt sont du même ordre de grandeur.

Enfin, on utilise quelquefois le *poncelet* qui est la puissance d'un moteur faisant 100 kilogrammètres par seconde.

EXEMPLE. — Soit à calculer en kilogrammètres l'énergie cinétique w d'un obus de 100 kilogrammes animé d'une vitesse de 600 *m/s*.

La masse m de cet obus exprimée en unités du système M, Kf, S est :

$$m = \frac{100}{9{,}80665}.$$

Donc

$$W = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \times \frac{100}{9{,}80665} \times 600^2 = 1{,}836 \times 10^6 \text{ kgm.}$$

22. — ***Résultats généraux.*** — Pour les quatre systèmes, les formules de définition des unités dérivées sont les mêmes. Les résultats précédents sont rassemblés dans le tableau ci-dessous.

Grandeurs	Formules de définition	Dimensions	Systèmes			
			C. G. S.	M. K. S.	M. T. S.	M. Kf. S.
Longueur..	l	L	cm	m	m	m
Masse.....	m	M	g	Kg	t	$9^{kg}80665$
Temps.....	t	T	s	s	s	s
Surface....	$s = l^2$	L^2	cm^2	m^2	m^2	m^2
Volume....	$v = l^3$	L^3	cm^3	m^3	m^3	m^3
Vitesse.....	$v = \frac{l}{t}$	LT^{-1}	cm/s	m/s	m/s	m/s
Accélération	$\gamma = \frac{v}{t}$	LT^{-2}	cm/s^2	m/s^2	m/s^2	m/s^2
Force.....	$f = m\gamma$	MLT^{-2}	dyne	10^5 C. G. S.	sthène (sn)	Kf
Pression....	$p = \frac{f}{s}$	$ML^{-1}T^{-2}$	barye	10 C. G. S.	pièze (pz)	Kf/m^2
Travail.....	$\mathcal{C} = f \times l$	ML^2T^{-2}	erg	joule	kilojoule	Kgm
Puissance..	$P = \frac{\mathcal{C}}{t}$	ML^2T^{-3}	erg/s	watt	kilowatt	Kgm/s

23. — ***Systèmes d'unités électriques.*** — Il existe quatre systèmes d'unités électriques : le système électrostatique C. G. S., le système électromagnétique C. G. S., le système pratique d'unités électriques et le système M. K. S. A.

1° Le système électrostatique C. G. S. est un système C. G. S. L'unité de masse **électrique** est déduite des unités mécaniques par la loi de Coulomb relative aux charges électriques placées dans le vide : $f = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{qq'}{r^2}$ où la constante ε_0 est prise égale à 1. L'unité de masse électrique est donc la masse électrique ponctuelle qui, placée à 1 cm d'une masse identique, la repousse *dans le vide* avec une force égale à 1 dyne.

A partir de cette unité, on en déduit, comme nous le verrons plus loin, les unités d'intensité de courant, de f. é. m., de résistance, de capacité, etc.

2° Le système électro-magnétique C. G. S. est un système C. G. S. L'unité de masse **magnétique** est déduite des unités mécaniques par la loi de Coulomb relative aux masses magnétiques $F = \frac{1}{\mu_0} \frac{mm'}{r^2}$ où la constante μ_0 est prise égale à 1 dans le vide.

L'unité de masse magnétique est donc la masse magnétique ponctuelle qui, placée à 1 cm d'une masse identique la repousse, *dans le vide*, avec une force égale à 1 dyne.

A partir de cette unité, on en déduit, comme nous le verrons dans la suite du cours, les unités de champ magnétique, de flux, de f. é. m., d'intensité, etc.

3° LE SYSTÈME PRATIQUE D'UNITÉS ÉLECTRIQUES est un système électromagnétique, c'est-à-dire dans lequel la loi des attractions magnétiques dans le vide se traduit par $F = \frac{mm'}{r^2}$ ($\mu_0 = 1$). Les trois unités fondamentales sont :

Le *joule* comme unité de travail ;

La *seconde* comme unité de temps ;

L'*ampère* comme unité d'intensité de courant. L'ampère international est l'intensité d'un courant qui dépose 1,11800 mg d'argent par seconde sur la cathode d'un voltamètre à azotate d'argent.

A ce système appartiennent les unités usuelles : ampère, volt, ohm, farad, etc. On peut chercher les unités de longueur et de masse de ce système. On trouve que l'unité de longueur vaut 10^9 cm et que l'unité de masse vaut 10^{-11} gramme.

4° LE SYSTÈME M. K. S. A. — Ce système est défini par quatre unités fondamentales au lieu de trois. Ce sont :

Le *mètre* comme unité de longueur ;

Le *kilogramme* comme unité de masse ;

La *seconde* comme unité de temps ;

L'*ampère absolu* comme unité d'intensité. L'ampère absolu est le 10^e de l'unité électromagnétique C. G. S. d'intensité. Il diffère de 2 à 3 dix-millièmes de l'ampère international.

Ce système a été proposé par M. Giorgi et adopté en 1935 par la Commission internationale électrotechnique. Il a l'avantage de présenter à la fois des unités mécaniques et des unités électriques *commodes*.

Nous verrons dans le chapitre XXX la constitution détaillée de ces différents systèmes et les rapports des unités entre elles.

24. — Problèmes relatifs aux changements d'unités. — Les problèmes de changements d'unités sont de deux sortes : il s'agit soit de déterminer une unité donnée d'un système défini par certaines unités fondamentales, soit de chercher par quel nombre est mesurée une grandeur donnée dans ce nouveau système. Dans tous les cas, il est nécessaire de déterminer la valeur de l'unité en fonction d'une unité de même nature connue. Il sera commode d'utiliser les équations aux dimensions [1]. Précisons sur deux exemples.

[1] Les équations aux dimensions ne sont utilisables que si les deux systèmes d'unités que l'on compare ont les mêmes conventions de définition des unités dérivées. C'est généralement ce qui est réalisé.

1er Exemple. — Trouver l'unité de travail du système défini par les trois unités suivantes : unité de longueur : le décamètre ; unité de masse : le centigramme ; unité de temps : l'heure.

L'équation aux dimensions d'un travail est :

$$\mathcal{T} = F \times L = M\Gamma \times L = M \times LT^{-2} \times L$$
$$\mathcal{T} = ML^2T^{-2}$$

Ce qui signifie que si $[\mathcal{T}]$, $[L]$, $[M]$, $[T]$ sont les unités de travail de longueur, de masse et de temps du système et $[\mathcal{T}']$, $[L']$, $[M']$, $[T']$ les unités correspondantes du système C. G. S., on a :

$$\frac{[\mathcal{T}]}{[\mathcal{T}']} = \frac{[M]}{[M']} \times \left(\frac{[L]}{[L']}\right)^2 \times \left(\frac{[T]}{[T']}\right)^{-2}$$

Or : $\quad \frac{[M]}{[M']} = \frac{1}{100} \qquad \frac{[L]}{[L']} = 1000 \qquad \frac{[T]}{[T']} = 3600$

$$\frac{[\mathcal{T}]}{[\mathcal{T}']} = \frac{1}{100} \times 1000^2 \times \frac{1}{3600^2} = \frac{1}{36^2} = \frac{1}{1296}$$

L'unité de travail du système vaut $\frac{1}{1296}$ erg.

2e Exemple. — Calculer le nombre qui mesure l'équivalent mécanique de la grande calorie dans le système d'unités défini par : la pression atmosphérique normale comme unité de pression, l'accélération de la pesanteur en un lieu où $g = 980$ C. G. S. comme unité d'accélération, la minute comme unité de temps.

L'équivalent mécanique de la grande calorie vaut $4{,}18 \times 10^{10}$ ergs. Déterminons l'unité de travail du nouveau système.

Cherchons l'équation aux dimensions d'un travail en fonction des grandeurs fondamentales du nouveau système : pression P, accélération Γ et temps T.

Nous avons : $\mathcal{T} = F \times L = P \times L^2 \times L = PL^3$.

Or $\qquad \Gamma = LT^{-2}$

d'où $\qquad L = \Gamma T^2 \qquad \mathcal{T} = P\Gamma^3T^6$

ce qui signifie que si $[\mathcal{T}]$, $[P]$, $[\Gamma]$ et $[T]$ sont les unités de travail, de pression, d'accélération et de temps du système et $[\mathcal{T}']$, $[P']$, $[\Gamma']$, et $[T']$ les unités correspondantes du système C. G. S., on a :

$$\frac{[\mathcal{T}]}{[\mathcal{T}']} = \frac{[P]}{[P']} \times \left(\frac{[\Gamma]}{[\Gamma']}\right)^3 \times \left(\frac{[T]}{[T']}\right)^6$$

Or $\frac{[P]}{[P']} = 76 \times 13{,}6 \times 980 \qquad \frac{[\Gamma]}{[\Gamma']} = 980 \qquad \frac{[T]}{[T']} = 60$

$$\frac{[\mathcal{T}]}{[\mathcal{T}']} = 76 \times 13{,}6 \times 980 \times 980^3 \times 60^6 = 4{,}42 \times 10^{25}.$$

L'unité de travail du nouveau système vaut donc $4{,}42 \times 10^{25}$ ergs. Par suite, un travail de $4{,}18 \times 10^{10}$ ergs sera mesuré par le nombre :

$$J = \frac{4{,}18 \times 10^{10}}{4{,}42 \times 10^{25}} = 0{,}94 \times 10^{-15}$$

Exercices.

6. L'équation caractéristique d'un fluide est $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = rT$. Ecrire les formules de dimension de a, b et r.

7. Trouver les unités de longueur et de masse du système pratique d'unités électriques défini par les trois unités fondamentales : joule, seconde, ampère. On rappelle que l'ampère vaut $\frac{1}{10}$ d'unité électromagnétique C. G. S. et que l'équation aux dimensions de l'intensité de courant est, dans ces systèmes électromagnétiques,

$$I = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

8. Trouver les unités de longueur, de masse et de temps du système ayant : pour unité de pression, la pression atmosphérique normale soit 76 cm de mercure de densité 13,6 ; pour unité de masse spécifique, la masse spécifique du mercure à 0° : 13,6 g/cm³ ; et pour unité d'accélération, l'accélération de la pesanteur qui vaut 980 C. G. S.

Réponse : longueur : 76 cm ; masse : celle d'un cube de mercure de 76 cm de côté à 0° ; temps : 0,278 s.

DEUXIÈME PARTIE

ÉLECTROSTATIQUE

CHAPITRE IV

PHÉNOMÈNES FONDAMENTAUX DE L'ÉLECTROSTATIQUE

I. — ÉLECTRISATION

25. — ***Electrisation par frottement.*** — Prenons un bâton de résine et frottons-le avec une peau de chat. Le bâton acquiert la propriété d'attirer les corps légers comme des brins de papier, des barbes de plumes ou de petites balles de sureau. Cette propriété se manifeste encore quand nous frottons des bâtons d'ébonite, de verre, d'ambre, de soufre, etc.. On dit que ces corps sont *électrisés* ou encore qu'ils possèdent de l'électricité.

Frottons maintenant un bâton de cuivre *tenu à la main.* Il ne s'électrise pas, il n'a aucune action sur les corps légers. Mais si nous frottons le morceau de cuivre en le tenant par un manche en verre, il s'électrise.

D'une manière générale, *tous les corps peuvent s'électriser par frottement,* mais alors que pour les corps d'une premiere catégorie comme le verre, la cire, l'ébonite, la résine, l'électrisation est obtenue en les tenant directement à la main, pour un grand nombre d'autres corps, l'électrisation n'apparaît que si on les tient par un manche fait avec l'un des corps de la première catégorie.

L'expérience montre que, pour tous les corps de la première catégorie, l'électricité reste localisée aux points frottés, elle ne se propage pas. Ces corps sont dits des mauvais conducteurs de l'électricité ou des **isolants** ou encore des **diélectriques.**

Pour les corps de la deuxième catégorie, les propriétés attractives exercées sur les corps légers se manifestent non seulement aux points frottés, mais en tous les points. On en conclut que l'électricité produite en un point se transmet à tous les points du corps. Ces corps sont appelés des **conducteurs.**

26. — ***Electrisation par contact.*** — Prenons un corps A non électrisé, on dit qu'il est à l'*état neutre.* Mettons en contact avec lui un corps B électrisé. Si les deux corps A et B sont des isolants, nous constatons que le corps A est électrisé uniquement aux points qui ont été en contact avec des

parties *électrisées* de B. Si les deux corps A et B sont des conducteurs tenus par des manches isolants, nous constatons que, après avoir séparé A et B, les deux corps sont électrisés. Ainsi nous disposons là d'un second moyen pour électriser un corps conducteur.

Le corps humain et la terre sont assez bons conducteurs. Si on frotte un bâton de cuivre tenu à la main, l'électricité produite par le frottement se répand dans le bâton, le corps et la terre. Par suite l'électrisation en chaque point est inappréciable. On voit donc la nécessité d'isoler le conducteur pour pouvoir l'électriser, c'est-à-dire de le séparer du corps humain et de la terre par un isolant.

Enfin, pour décharger un conducteur, il suffit de le toucher avec le doigt en un point quelconque. On met le conducteur en communication avec le sol et l'électricité se répartit sur toute la surface de la terre.

27. — ***Autres modes d'électrisation.*** — En plus du frottement et du contact, on connaît de nombreux procédés pour faire apparaître de l'électricité. Nous indiquerons :

1° ELECTRISATION PAR INFLUENCE. — Quand nous approchons un conducteur A d'un corps électrisé B, nous constatons que le corps A s'électrise. Cette électricité ainsi développée par action à distance de B sur A sera étudiée plus complètement dans la suite du cours (Ch. VIII). B est appelé le corps influençant, A est le corps influencé. On dit que A s'électrise par *influence*.

2° PIÉZO-ÉLECTRICITÉ. — Pierre Curie, en 1882, a constaté qu'une lame de quartz, convenablement taillée, s'électrise par compression ou par traction. Le phénomène est d'ailleurs réversible, c'est-à-dire que si l'on électrise convenablement la lame précédente, elle s'allonge ou se raccourcit. D'autres cristaux fort nombreux, mais présentant tous une certaine dissymétrie, ont la propriété de s'électriser par compression ou traction. Ces corps sont *piézo-électriques*. Le phénomène de la piézo-électricité a reçu des applications pratiques : mesure des forces, production des ultra-sons pour effectuer des sondages en mer.

3° ELECTRISATION PAR LES SOURCES D'ÉLECTRICITÉ. — Prenons une pile ou un accumulateur. Mettons l'un des pôles au sol et touchons l'autre avec un conducteur isolé. Celui-ci s'électrise. Avec une seule pile, l'électrisation est faible, mais si l'on dispose d'un grand nombre d'éléments, on peut obtenir des électrisations faciles à mettre en évidence.

Signalons enfin que l'électrisation peut s'effectuer soit par échauffement ou refroidissement de certains cristaux comme la tourmaline (pyro-électricité), soit par les ions, par les électrons, par divers rayonnements.

28. — ***Attractions et répulsions électriques.*** — Construisons un pendule formé d'une balle légère en moelle de sureau suspendue à une potence en verre par un fil isolant. Pour avoir un pendule parfaitement isolé,

le pied de la potence plonge dans de la paraffine. On a réalisé un *pendule électrique* dont la balle de sureau conductrice est parfaitement isolée. Cette balle étant très légère, l'appareil sera très sensible aux forces horizontales qui s'exerceront sur la balle.

Approchons un corps électrisé A. La balle de sureau est attirée. Elle vient au contact, prend une partie de l'électricité du corps A et est ensuite repoussée par A. Tous les corps électrisés agissent de la même façon sur le pendule électrique *initialement neutre*. Un tel appareil, qui permet de déceler l'électrisation d'un corps, s'appelle un **électroscope**.

*29. — **Existence de deux espèces d'électricité.*** — On peut se demander si les charges électriques développées par différents moyens sont de natures différentes. Pour cela, prenons deux pendules électriques isolés A et A'.

Electrisons A en le touchant avec un bâton de verre frotté avec du drap : le pendule A est repoussé par le bâton de verre.

Electrisons A' en le touchant avec un bâton de résine frotté avec une peau de chat : le pendule A' est repoussé par le bâton de résine.

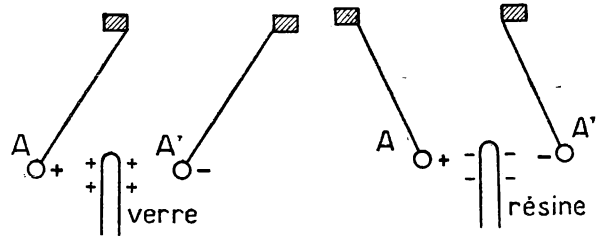


FIG. 14

Or, on constate que le pendule A, qui a partagé la charge du bâton de verre, est attiré par le bâton de résine et que le pendule A', qui a partagé la charge du bâton de résine, est attiré par le bâton de verre (fig. 14). L'électrisation des deux bâtons n'est donc pas la même, on dit qu'ils sont chargés d'électricités différentes.

D'une façon générale, l'expérience montre que tout corps électrisé attire l'un des deux pendules (A ou A') et repousse l'autre. Il se comporte vis-à-vis de A et de A' soit comme le bâton de verre, soit comme le bâton de résine. Nous pouvons donc énoncer les résultats suivants :

1° *Il existe deux espèces d'électricité et deux seulement* ;

2° *Deux corps chargés de la même espèce d'électricité se repoussent* ;

3° *Deux corps chargés d'électricité d'espèces différentes s'attirent.*

On pourrait distinguer ces deux espèces d'électricité en les appelant *électricité vitrée* et *électricité résineuse*, mais ces dénominations prêteraient à confusion ; le verre, la résine peuvent en effet acquérir telle ou telle espèce d'électricité suivant la nature du corps avec lequel on les frotte. Afin d'éviter toute ambiguïté, et aussi pour traduire une propriété importante qui

sera indiquée plus loin (§ 33), on a choisi les noms d'*électricité positive* et *d'électricité négative.*

30. — ***Electroscope à feuilles.*** — L'existence des répulsions électriques entre corps chargés de la même électricité permet la construction d'un électroscope plus sensible que le pendule électrique.

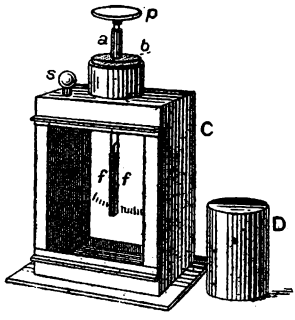


FIG. 15. — Electroscope.

La partie essentielle de cet appareil est constituée (fig. 15) par deux feuilles conductrices très légères d'or ou d'aluminium [1], suspendues à l'extrémité inférieure d'une tige conductrice verticale *a*, terminée elle-même en haut par une boule ou un plateau métallique *p*. La tige *a* est fixée dans un bouchon isolant *b* encastré dans la face supérieure d'une boîte métallique qui enveloppe de toutes parts les deux feuilles ; seule une petite portion de l'une des faces de la boîte est en verre pour qu'on puisse voir les feuilles.

Electrisons un conducteur, mettons-le en contact avec le plateau *p* ; une partie de l'électricité du conducteur arrive dans les feuilles *f*, qui se repoussent. Les feuilles, préalablement verticales, font alors l'une avec l'autre un angle tel que la pesanteur équilibre la répulsion électrique. L'ensemble est comparable à un double pendule dont les deux boules seraient chargées de la même électricité. La grande sensibilité de l'appareil tient à l'extrême légèreté des feuilles.

La cage métallique qui entoure les feuilles joue un rôle protecteur qui sera expliqué plus loin.

Très souvent l'appareil porte une graduation permettant de mesurer l'écart angulaire des feuilles ; c'est alors un **électromètre.**

REMARQUE. — **On constate que les feuilles de l'électroscope dévient avant le contact du corps électrisé. Cette déviation est due à l'électrisation par influence. L'électroscope permet donc de reconnaître si un corps est électrisé en approchant seulement le corps de l'électroscope. Ce procédé a l'avantage de conserver au corps électrisé toute son électricité.**

II. — CHARGES ÉLECTRIQUES

Nous avons fait une étude *qualitative* de l'électrisation en indiquant les modes de production et les actions mutuelles des deux sortes d'électricité. Faisons maintenant une étude *quantitative.*

31. — ***Quantité d'électricité.*** — L'attraction ou la répulsion de deux corps électrisés décroît rapidement lorsque leur distance augmente.

D'autre part, les actions de divers corps électrisés sur une même balle de

[1] Le poids spécifique de l'or est près de huit fois celui de l'aluminium, mais sa malléabilité permet de faire des feuilles beaucoup plus minces.

sureau chargée d'électricité, et à une même distance, varient avec le corps utilisé.

Prenons une balle de sureau A électrisée et chargeons de la même espèce d'électricité de très petites sphères conductrices portées par des supports isolants. Soient B_1 et B_2 deux de ces sphères. L'expérience montre que les forces répulsives f_1 et f_2 exercées sur A sont telles que le rapport $\frac{f_1}{f_2}$ est :

1° *indépendant de la charge de A ;*

2° *indépendant de la distance r* à laquelle on place les sphères, pourvu qu'elle soit la même pour les sphères B_1 et B_2.

Par suite, le rapport $\frac{f_1}{f_2}$ ne dépend que de l'état électrique de B_1 et de B_2. Si $f_1 = f_2$, nous dirons que les deux sphères B_1 et B_2 portent la même charge électrique ou encore possèdent la même quantité d'électricité. Si $f_1 = 2\ f_2$, nous dirons que B_1 possède une charge électrique double de B_2.

Plus généralement, nous dirons que le rapport $\frac{f_1}{f_2}$ mesure le rapport des charges électriques de B_1 et B_2. Si nous représentons les valeurs de ces charges par q_1 et q_2, nous aurons, ***par définition*** :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{q_1}{q_2}$$

Nous avons défini le rapport de deux charges. Pour évaluer ces charges et les représenter par un nombre, il suffit de choisir une unité. Ce choix sera fait au paragraphe 39. Actuellement, il nous suffit de comparer les charges entre elles, c'est-à-dire d'effectuer des mesures relatives.

32. — ***Comparaison des charges.*** — D'après la définition du rapport de deux charges électriques il faudrait, pour comparer les valeurs de ces charges, étudier leurs actions à une même distance sur un corps électrisé auxiliaire. Ces mesures peuvent être faites en utilisant la *balance de torsion*, appelée encore Balance de Coulomb, qui sera décrite au paragraphe 38. Cet appareil fut construit par Coulomb pour étudier la variation de la force électrique avec la distance. La force électrique y est équilibrée par la force de torsion d'un fil et les mesures portent sur l'angle de torsion du fil. Mais la précision de ces mesures est médiocre.

Il est préférable d'utiliser une méthode plus précise appelée la **méthode du cylindre de Faraday.**

On donne le nom de *cylindre de Faraday* à un cylindre métallique creux isolé. Il est ouvert à l'une de ses extrémités, mais sa hauteur est grande par rapport à son diamètre.

Plaçons ce cylindre sur le plateau *p* d'un électromètre à feuilles (fig. 16). Introduisons

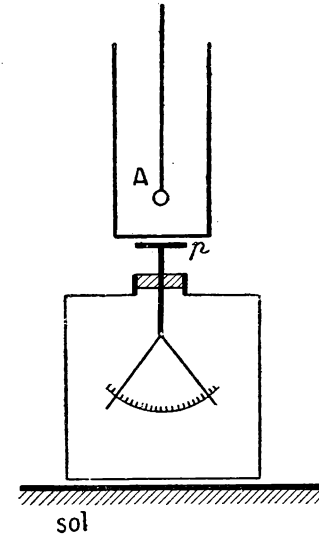


FIG. 16

à l'intérieur du cylindre un corps électrisé A tenu par un manche isolant, en ayant soin de ne pas toucher les parois. Le conducteur constitué par le cylindre et les feuilles de l'électromètre s'électrise par influence ; les feuilles divergent. A mesure que nous enfonçons le corps A dans le cylindre, nous observons que la divergence des feuilles augmente. Mais, dès que le corps A est à une certaine profondeur, *l'écart des feuilles reste invariable* et ne dépend pas de la position du corps A pourvu que celui-ci soit assez bas.

Amenons maintenant le corps A en contact avec le cylindre, la divergence des feuilles n'est pas modifiée. L'écart maximum ne dépend pas de la position du corps au fond du cylindre, il ne varie que si l'on augmente ou diminue la charge de A. Pour deux corps A_1 et A_2 introduits séparément dans le cylindre et portant la même charge, l'écart maximum est le même.

Donc, *l'écart* ***maximum*** *des feuilles d'un électromètre ne dépend que de la charge du corps introduit dans le cylindre de Faraday.*

L'appareil pourra servir à comparer des charges à condition d'être *étalonné.* Cet étalonnage est basé sur le *principe de la conservation de l'électricité.*

33. — Principe de la conservation de l'électricité. — Prenons une sphère conductrice portant une quantité d'électricité q inconnue. Introduisons-la dans un cylindre de Faraday placé sur un électromètre, nous observons un écart maximum des feuilles égal à α. Introduisons maintenant une autre sphère conductrice neutre, l'écart des feuilles reste invariable. Amenons les deux sphères en contact, l'écart des feuilles est inchangé. La quantité d'électricité portée par la première sphère s'est partagée entre les deux sphères, et nous constatons que la charge électrique totale de l'ensemble est invariable. Il y a donc *conservation de l'électricité.*

Prenons deux petits disques B et C (fig. 17), l'un de verre, l'autre d'un solide quelconque recouvert de drap. Ces deux disques sont tenus chacun par un manche isolant. Frottons-les l'un contre l'autre. Si on les maintient en contact, l'ensemble n'a aucune action sur l'électromètre. Si on les sépare ensuite, on constate, par action sur un pendule électrique électrisé, que les deux disques portent des électricités d'espèces différentes. L'électromètre montre que ces charges sont équivalentes.

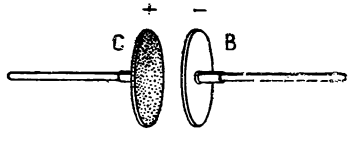


FIG. 17

La propriété de produire simultanément des quantités égales des deux électricités n'est pas particulière au frottement. D'une manière générale, *tout phénomène qui, dans un système isolé, produit de l'électricité d'une espèce, produit aussi une quantité d'électricité égale de l'autre espèce.*

Enfin, prenons deux petites sphères conductrices électrisées de même rayon. Soit q la charge *positive* portée par l'une et q' la charge *négative* portée par l'autre. Ces charges sont mesurées à la balance de Coulomb avec une unité arbitraire. Mettons les deux sphères en contact, nous constatons à la balance de Coulomb que chaque sphère porte la charge $\frac{q-q'}{2}$ si $q > q'$, ou $\frac{q'-q}{2}$

si $q < q'$. Il résulte que les quantités d'électricité d'espèces différentes se comportent comme des quantités d'électricité de même espèce et de signes contraires. De plus, *la quantité d'électricité totale est la somme algébrique des quantités d'électricité présentes.* Ceci justifie les appellations d'électricité positive et d'électricité négative données aux deux espèces d'électricité.

D'une manière très générale, nous pouvons énoncer le PRINCIPE DE LA CONSERVATION DE L'ÉLECTRICITÉ :

Dans tout système isolé, la somme algébrique des quantités d'électricité apparente est constante.

34. — Etalonnage d'un électromètre. — Prenons une batterie de piles comprenant un grand nombre d'éléments et bien isolée. Mettons le milieu en communication avec le sol. Nous constatons, avec une balance de Coulomb, que nous obtenons des charges successives égales ou équivalentes en touchant, avec des petites sphères *identiques* isolées, l'un ou l'autre des pôles de cette batterie. Nous prendrons comme unité de quantité d'électricité la valeur commune de ces charges.

Introduisons une sphère chargée de la quantité d'électricité positive unité dans le cylindre de Faraday de l'électromètre. Les feuilles divergent et atteignent leur écart maximum. Touchons la surface intérieure, l'écart des feuilles est inchangé. Si nous sortons alors la sphère, nous constatons qu'elle n'est plus chargée. Elle a communiqué sa charge à l'électromètre dont les feuilles font entre elles un angle α_1.

Introduisons une nouvelle sphère portant la charge + 1 et touchons la paroi intérieure du cylindre. L'électromètre possède alors, d'après le principe de la conservation de l'électricité, une charge égale à 2 et les feuilles font entre elles un angle α_2.

En continuant ainsi, nous faisons acquérir à l'électromètre des charges successivement égales à 1, 2, 3, 4... unités. Notons les écarts correspondants α_1, α_2, α_3 α_4... des feuilles et dressons un tableau des résultats. Nous construirons *la courbe d'étalonnage* en portant en abscisses les valeurs des charges et en ordonnées les écarts correspondants.

L'appareil ainsi étalonné permet d'évaluer la charge q d'un corps avec l'unité, d'ailleurs inconnue, choisie. Il suffit d'introduire le corps à l'intérieur du cylindre de Faraday et de mesurer l'écart maximum α des feuilles. Il n'est pas nécessaire qu'il y ait contact, donc le corps peut conserver sa charge. Connaissant α, la courbe d'étalonnage permet d'en déduire la charge q.

L'électromètre précédent sera l'instrument fondamental pour l'étude des charges électriques. Il permet en effet :

1° DE CONSTATER QU'UN CORPS EST ÉLECTRISÉ. — Il suffit d'introduire le corps dans le cylindre de Faraday. Si les feuilles divergent, c'est que le corps est électrisé. Par exemple, en faisant pénétrer un faisceau de rayons cathodiques dans un cylindre de Faraday, on constate un écart des feuilles qui montre que ces rayons sont formés de particules électrisées.

2° DE DÉTERMINER LA NATURE D'UNE CHARGE. — Commençons par charger l'électromètre avec une charge dont on connaît la nature, positive par exemple. Les feuilles divergent. Introduisons un corps légèrement électrisé dans le cylindre. Si l'écart des feuilles augmente, c'est que le corps est chargé d'électricité positive, si les feuilles se rapprochent, c'est que le corps est chargé d'électricité négative. On a pu constater ainsi que les particules électrisées constituant les rayons cathodiques étaient chargées négativement.

3° DE COMPARER LES CHARGES. — L'électromètre étalonné permet de mesurer une charge en fonction d'une unité arbitraire. Il est donc commode pour des mesures *relatives*, puisque le rapport de deux grandeurs de même espèce est indépendant de l'unité choisie.

III. — NATURE DE L'ÉLECTRICITÉ

Toutes les notions précédentes sont expérimentales. Nous nous sommes bornés simplement à décrire les phénomènes. Mais on peut chercher à en présenter une explication rationnelle, c'est-à-dire à établir une théorie qui permette d'interpréter simplement tous les phénomènes électriques.

*35. — **Théories anciennes de l'électricité.*** — Franklin, pour interpréter les phénomènes électriques, émit l'hypothèse qu'un « fluide électrique » devait exister en quantité normale dans tous les corps neutres. Une quantité supérieure à la quantité normale se manifestait comme charge positive tandis qu'une quantité moindre que la quantité normale constituait la charge négative. C'était la *théorie du fluide unique.*

D'autres physiciens préférèrent supposer que la matière à l'état neutre ne possédait aucune propriété électrique parce qu'elle contenait en quantités égales deux fluides impondérables qu'ils appelèrent électricité positive et électricité négative. C'était la *théorie des deux fluides.*

Pendant la deuxième moitié du XIXe siècle, l'attention s'est portée sur les forces qui s'exercent entre les corps électrisés. L'influence du milieu interposé entre les deux corps avait été étudiée par Faraday [1]. On supposa alors que les forces électriques se transmettaient sous la forme d'ondes électriques créant un « *état de tension* » du milieu. Certains même, confondant la cause et l'effet, affirmaient qu'une charge électrique était un état de tension du milieu. Pourtant les phénomènes d'électrolyse, étudiés par Faraday, imposaient la notion de grains d'électricité.

Depuis 1900, on a précisé et développé la théorie granulaire de l'électricité basée sur l'existence de l'électron. Déjà en 1897, Lord Kelvin écrivait : « Les lois de Faraday sur l'électrolyse semblent imposer une structure atomique à l'électricité ».

[1] *Faraday* (1791-1867), physicien et chimiste anglais dont les découvertes principales sont relatives aux courants d'induction et à l'électrolyse. Ses travaux ont contribué avec ceux d'Ampère à établir la théorie de l'électromagnétisme.

36. — Théorie électronique. — La théorie électronique s'appuie sur de nombreux faits démontrés et est universellement admise par tous les physiciens. Elle se rattache directement à la conception actuelle de la constitution de la matière que nous rappellerons sommairement.

Un corps simple quelconque : cuivre, oxygène, aluminium est constitué par des *molécules* dont chacune est une association d'éléments identiques ou *atomes*. Dans un corps composé, chaque molécule est un assemblage d'atomes des éléments constituants.

L'atome peut être considéré comme l'image d'un système solaire à une échelle extraordinairement réduite. Il y a au centre un noyau autour duquel gravite un essaim d'électrons.

L'électron est un véritable grain d'électricité négative. On a pu mesurer sa masse, sa charge et sa vitesse. La masse de l'électron est 9×10^{-28} gramme et sa charge, qu'on appelle la charge élémentaire, est $e = -1{,}59 \times 10^{-19}$ coulomb. Les expériences de Millikan ont montré que toute charge électrique était un multiple entier de la charge élémentaire e.

L'atome étant électriquement neutre, le noyau central porte une charge positive égale, en valeur absolue, à la charge négative de l'ensemble des électrons. La structure de ce noyau est complexe.

Le noyau des atomes est stable et il a fallu les moyens puissants de la technique moderne pour le décomposer. Au contraire, les électrons sont mobiles. Ils tournent autour du noyau et peuvent même sortir de l'atome [1]. Si l'on pouvait observer un fragment de cuivre, on verrait que beaucoup d'atomes ont perdu des électrons. De plus, des électrons libres circulent entre les atomes à une vitesse énorme. Ces déplacements d'électrons libres dans les métaux ont lieu dans tous les sens avec le plus grand désordre, d'où un effet *moyen* nul. Tous les corps possédant comme le cuivre des électrons libres mobiles sont les conducteurs de l'électricité.

Au contraire, les atomes des corps isolants n'ont pas d'électrons libres. Si un des atomes perd un électron, il ne peut revenir à l'état initial que par une intervention étrangère, tandis que, pour un conducteur, un électron libre pourrait être capté par cet atome.

Cette conception de la matière permet d'interpréter les phénomènes électriques sans l'intervention d'aucun « fluide ». Un corps électrisé négativement est un corps qui possède un supplément d'électrons ; un corps électrisé positivement est un corps auquel on a soustrait des électrons. Comme cet excès ou ce manque d'électrons est un nombre *entier* d'électrons, il en résulte que toute charge électrique est un multiple entier de la charge élémentaire e. C'est ce résultat qui a été établi expérimentalement par Millikan.

[1] Cette libération n'est possible qu'avec les corps dont les atomes possèdent un petit nombre d'électrons périphériques (un, deux ou trois). Ils les abandonnent facilement pour prendre une structure stable de gaz rare (8 électrons périphériques). Parmi ces corps, on trouve les métaux.

Au contraire, un corps comme le soufre, qui a 6 électrons périphériques, ne les perd pas, mais a tendance à en capter deux autres pour atteindre la structure stable de gaz rare.

Lorsqu'on fait apparaître sur un corps quelconque un supplément d'électrons, c'est qu'on a emprunté ces électrons à un autre corps. Autrement dit, on ne peut pas produire une charge électrique négative sans faire apparaître une charge positive équivalente. C'est le principe de la conservation de l'électricité.

Nous verrons dans la suite les interprétations électroniques des divers phénomènes étudiés.

CHAPITRE V

LOI DE COULOMB

37. — ***Loi de Coulomb*** (1). — D'après la définition du rapport de deux charges électriques ponctuelles, nous voyons que les forces attractives ou répulsives qui s'exercent entre deux petites sphères conductrices électrisées de charges q et q' sont égales, opposées et proportionnelles à q et à q'. Le coefficient de proportionnalité sera une fonction de la distance r des deux sphères. Nous pouvons poser :

$$f = qq' \varphi (r)$$

Pour connaître entièrement la force f, il reste à déterminer $\varphi (r)$. C'est ce qui a été fait expérimentalement par Coulomb vers 1785. Il a énoncé la loi suivante qui porte son nom :

LOI DE COULOMB. — **Deux masses électriques ponctuelles exercent l'une sur l'autre une force f dirigée suivant la droite qui les joint, proportionnelle à chacune des deux charges électriques et inversement proportionnelle au carré de leur distance r.**

Appelons q et q' les valeurs algébriques des charges en présence et r leur distance. La loi de Coulomb se traduit par la relation :

$$\boxed{f = \frac{1}{\varepsilon} \frac{qq'}{r^2}}$$

ε est une constante de proportionnalité qui dépend des unités choisies pour évaluer q, q' et r et aussi *de la nature du milieu* interposé. Le facteur ε, essentiellement positif, s'appelle le *pouvoir inducteur spécifique* du milieu (2).

Les expériences de Coulomb manquent de précision. Elles ont pourtant permis à Coulomb de formuler la loi fondamentale de l'électrostatique qui, plus tard, a été reconnue exacte par la vérification précise de ses conséquences. *La loi de Coulomb doit donc être considérée comme une hypothèse fondamentale de l'électrostatique justifiée par la vérification expérimentale de l'ensemble de ses conséquences.*

Les expériences de Coulomb n'ont plus qu'une importance historique. Nous les rappellerons rapidement.

(1) *Coulomb* (1739-1809). Physicien français qui a établi les lois fondamentales de l'électrostatique et de l'électromagnétisme, à l'aide de la balance de torsion. On lui doit aussi de remarquables travaux sur l'élasticité et le frottement.

(2) Le rôle exact du milieu sera précisé au Chapitre X.

38. — ***Expériences de Coulomb.*** — Les forces attractives ou répulsives réalisées par Coulomb étant très petites, les méthodes utilisées durent être très sensibles. Ces méthodes furent :

1° Une méthode *statique*, celle de la balance de torsion, surtout utilisée pour l'étude des forces répulsives ;

2° Une méthode *dynamique* dite méthode des oscillations, surtout appliquée à l'étude des forces attractives.

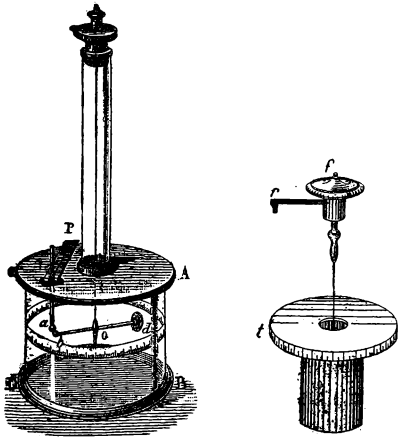


FIG. 18. — Balance de Coulomb.

1° BALANCE DE TORSION. — L'appareil (fig. 18) se compose d'un fil de torsion en argent de constante de torsion C, supportant à sa partie inférieure une fine aiguille isolante de gomme laque. L'aiguille porte à l'une de ses extrémités une petite boule *b* en moelle de sureau dorée, à l'autre extrémité est un contrepoids *d* en papier qui sert, en outre, à amortir les oscillations. L'extrémité supérieure du fil est prise dans un *micromètre de torsion* comprenant un tambour gradué *t* et un index de repérage *r*.

L'ensemble est enfermé dans une cage en verre. Une division en degrés tracée sur une bande de papier est collée sur la cage à la hauteur du plan horizontal de l'aiguille. Une deuxième balle de sureau *a* est portée par une tige isolante et peut être disposée à la place même qu'occupe la boule mobile *b* dans la position d'équilibre.

Les deux balles étant en contact, on leur communique une charge qu'elles se partagent. Elles se repoussent. La balle fixe étant au zéro de la graduation, la balle mobile prend une position d'équilibre faisant un angle α_1 avec la position de départ. On tord ensuite l'extrémité supérieure du fil à l'aide du micromètre de torsion jusqu'à ce que la distance angulaire des boules devienne $\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{2}$. Soit A_2 la rotation de l'index. La torsion du fil est alors $A_2 + \alpha_2$.

On tord davantage le fil à sa partie supérieure jusqu'à ce que la distance angulaire des boules devienne $\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{2} = \frac{\alpha_1}{4}$. La rotation de l'index du micromètre à partir du zéro est A_3 et par suite la torsion totale du fil est $A_3 + \alpha_3$.

L'expérience montre que l'on a, à $\frac{1}{100}$ près :

$$\alpha_1 \times \alpha^2_1 = (A_2 + \alpha_2)\ \alpha^2_2 = (A_3 + \alpha_3)\ \alpha^2_3.$$

Le produit $\alpha^2 (A + \alpha)$ est donc constant. Comme la distance des boules est grossièrement proportionnelle à α et que la force répulsive est approximativement proportionnelle à $(A + \alpha)$, on en déduit que la force varie en raison inverse du carré de la distance.

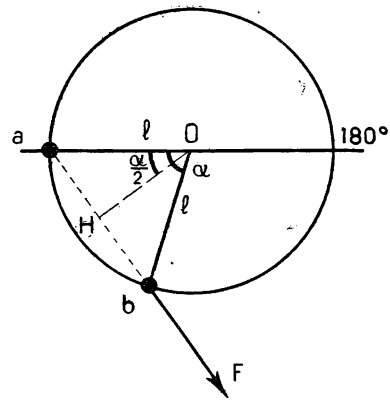


FIG. 19

REMARQUE. — En réalité, la condition rigoureuse d'équilibre s'obtient en écrivant que la somme des moments des forces par rapport à l'axe de rotation est nulle.

Le moment dû à la torsion est $C (A + \alpha)$. Le moment de la force F est : $F \times OH$. La condition d'équilibre sera :

$$F \times OH = C (A + \alpha) \qquad (1)$$

Si la loi de Coulomb est exacte, on doit avoir $F = \frac{k}{\overline{ab}^2}$. Posons $Oa = l$, nous avons (fig. 19) : $ab = 2l \sin \frac{\alpha}{2}$ $OH = l \cos \frac{\alpha}{2}$.

La condition (1) devient

$$\frac{k}{4 l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \times l \cos \frac{\alpha}{2} = C (A + \alpha)$$

$$(A + \alpha) \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{k}{4 Cl}$$

C'est donc la quantité $(A + \alpha) \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ qui doit rester constante dans les expériences précédentes. Remarquons que, dans les expériences de Coulomb, $\alpha_1 = 36°$ et par suite nous avons à $\frac{1}{100}$ près, pour les trois mesures effectuées :

$$(A + \alpha) \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = (A + \alpha) \frac{\alpha^2}{4}.$$

2° MÉTHODE DES OSCILLATIONS. — Une aiguille isolante de gomme laque porte à l'une de ses extrémités un petit disque b en papier doré. Elle est suspendue à un fil de cocon *sans torsion* et maintenue horizontale à l'aide d'un contrepoids. Le fil du cocon est fixé à un curseur à vis pouvant glisser le long d'une règle graduée (fig. 20).

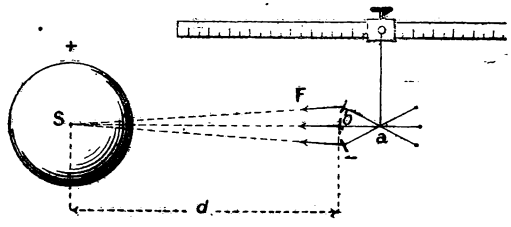


FIG. 20

A une distance grande par rapport à la demi-longueur $ab = l$ de l'aiguille et dans le plan horizontal de l'aiguille est le centre S d'une sphère métallique isolée et éloignée de tout autre corps.

Donnons à S et à b des charges électriques de noms contraires. L'aiguille prend une position d'équilibre stable et elle effectue, autour de cette position, des oscillations pendulaires de période $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{fl}}$, I étant le moment d'inertie de l'équipage et f la force exercée par la sphère sur l'aiguille.

Pour les distances d_1 d_2 d_3... du centre S de la sphère à l'extrémité b de l'aiguille, on mesure les périodes d'oscillations T_1 T_2 T_3... et on constate que l'on a très sensiblement :

$$\frac{T_1}{d_1} = \frac{T_2}{d_2} = \frac{T_3}{d_3}$$

Montrons que ce résultat est une conséquence de la loi de Coulomb.

En effet, nous verrons (§ 51) que, si la loi de Coulomb est exacte, l'action exercée par une sphère uniformément électrisée sur une masse électrique ponctuelle est la même que si toute la charge était concentrée au centre. Par suite, la force f doit être de la forme : $f = \frac{A}{d^2}$ et la période T des oscillations devient :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{fl}} = 2\pi d\sqrt{\frac{I}{Al}} \qquad \text{d'où } \frac{T}{d} = \sqrt{\frac{4\pi^2 I}{Al}} = C^{te}$$

C'est cette conséquence qui a été vérifiée expérimentalement.

Les deux méthodes précédentes permettent de vérifier la loi de Coulomb d'une façon approchée. C'est pourquoi nous préférons poser la loi de Coulomb comme une hypothèse fondamentale vérifiée par ses conséquences.

*39. — **Unités de quantité d'électricité.*** — On convient, dans un système *électrostatique* d'unités, de choisir toujours l'unité de quantité d'électricité de manière qu'on ait : $\varepsilon = 1$ dans le vide. La valeur de ε pour l'air est alors 1,00059 ; on la confond le plus souvent avec 1 dans la pratique.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'on ait : $q = q' = 1$, lorsque, simultanément, $r = 1$ et $f = 1$ dans le vide (ou pratiquement dans l'air). Cela revient à dire qu'on choisit comme unité de quantité d'électricité la quantité ponctuelle qui, agissant dans le vide sur une quantité ponctuelle égale placée à l'unité de distance, la repousse avec une force égale à l'unité de force.

Considérons en particulier le système C. G. S. *On appelle unité* ***électrostatique*** (1) *C. G. S. de quantité d'électricité, la quantité qui, agissant dans le vide sur une quantité égale placée à* 1 *cm de distance, la repousse avec une force d'une dyne.*

Grâce à ce choix, la formule de Coulomb se simplifie lorsque les masses q et q' sont dans le vide (et pratiquement dans l'air) et devient alors :

$$f = \frac{qq'}{r^2}. \qquad (1)$$

L'unité de quantité d'électricité du *système pratique* est le **coulomb** qui vaut par définition 3×10^9 unités électrostatiques C. G. S. Cette unité, commode pour évaluer les quantités d'électricité dans les phénomènes *électro-*

(1) Nous verrons (§ 225) la définition d'une autre unité de quantité d'électricité, basée sur les actions mutuelles des courants et des aimants, et qu'on appelle *unité électromagnétique C. G. S*

dynamiques, est beaucoup plus grande que les quantités d'électricité qui interviennent dans les phénomènes *électrostatiques*. Par exemple : d'une part, deux quantités d'électricité égales qui, placées à un mètre l'une de l'autre dans l'air se repousseraient avec une force d'un kilogramme-poids, ne vaudraient chacune que $\frac{1}{30000}$ de coulomb environ ; d'autre part, une lampe de 100 bougies à filament métallique est traversée en une seconde par une quantité d'électricité de l'ordre d'un coulomb.

Equation de dimension de l'unité électrostatique de quantité d'électricité. — Dans la relation (1), faisons $q = q'$, nous en déduisons $q = r\sqrt{f}$, et comme l'équation de dimension de l'unité de force est (§ 22) :

$$F = LMT^{-2},$$

l'équation de dimension de l'unité électrostatique de quantité d'électricité est :

$$Q = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Cette équation n'est valable que dans un système *électrostatique*.

40. — ***Application de la loi de Coulomb.*** — La loi de Coulomb est relative aux forces qui s'exercent entre des charges électriques *ponctuelles*. Nous étendrons son domaine d'application en adoptant l'hypothèse suivante qui complète la loi de Coulomb :

Les forces exercées par deux corps électrisés l'un sur l'autre sont les résultantes de toutes les forces élémentaires exercées les unes sur les autres par les charges électriques réparties sur ces deux corps.

La constante ε intervenant dans le calcul de ces forces est le pouvoir inducteur spécifique *du milieu interposé entre les deux corps.*

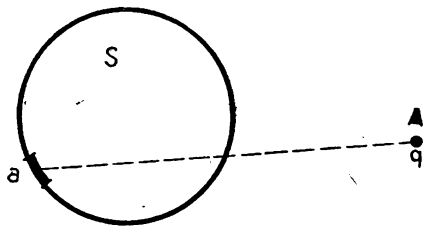


FIG. 21

Par exemple, pour calculer l'action exercée par une couche sphérique d'électricité répartie sur une sphère S (fig. 21) sur une charge électrique ponctuelle q placée en A, nous décomposerons la surface de la sphère en éléments assez petits pour que la charge de chaque élément puisse être considérée comme ponctuelle et nous ferons la somme *géométrique* des forces exercées par ces éléments sur la charge q. Chaque force se calculera par application de la loi de Coulomb en prenant comme constante ε le pouvoir inducteur spécifique du milieu qui entoure la sphère.

Remarquons que notre hypothèse, vérifiée d'ailleurs par toutes ses conséquences, n'est nullement évidente. Prenons, en effet, l'élément a de la sphère (fig. 21). Il y a entre a et A autre chose que le milieu ambiant et pourtant, dans notre calcul, la charge portée par a intervient comme si l'intervalle

entre a et A était constitué par le milieu dans lequel se trouve la sphère. Ceci revient à considérer, pour le calcul de la force en A, la sphère pleine d'une substance de même pouvoir inducteur spécifique que le milieu ambiant.

D'une manière générale, quand nous aurons des charges électriques réparties sur des surfaces fermées, nous supposerons l'intérieur de ces surfaces rempli d'une substance de même pouvoir inducteur spécifique que le milieu ambiant. Nous pourrons alors appliquer la loi de Coulomb ou les théorèmes qui s'en déduisent.

En résumé, l'électrostatique est basée sur deux principes fondamentaux :

1° La loi de Coulomb qui se traduit par la formule $f = \frac{1}{\varepsilon}\frac{qq'}{r^2}$ et qui s'applique aux charges ponctuelles ;

2° L'hypothèse précédente qui exprime que les forces électriques peuvent être considérées comme les résultantes de forces élémentaires calculées d'après la loi de Coulomb.

REMARQUE. — En adoptant la loi de Coulomb $f = \frac{1}{\varepsilon}\frac{qq'}{r^2}$, ε étant une constante variable avec le milieu interposé, nous supposons :

1° que le diélectrique est unique;

2° que le milieu est inerte et n'ajoute rien à la force. La loi de Coulomb perd toute signification s'il y a plusieurs diélectriques. Nous adoptons cette hypothèse parce qu'elle est suffisante dans le cas d'un seul diélectrique et qu'elle conduit à des résultats conformes à l'expérience. Nous verrons plus loin (§ 100) une autre conception des actions électriques qui conduit aux mêmes formules générales, mais qui semble plus conforme à la réalité.

Exercices.

9. Le fil d'argent d'une balance de Coulomb subit une torsion de 360° pour un couple de 1,57 C. G. S. Les boules portent les charges + 0,5 et — 0,5 U. E. S. et on tourne le tambour supérieur de 1 radian dans le sens qui écarte les boules.

Trouver les positions d'équilibre de la boule mobile sachant qu'elle se meut sur un cercle de rayon $a = 10$ cm.

Réponse : 2 positions d'équilibre : $\alpha_1 = 23°5$ (instable) ; $\alpha_2 = 50°$ (stable).

10. Deux boules conductrices égales A et B, dont la distance des centres $d = 50$ cm, portent : la première une charge $Q = 16$ U. E. S. et l'autre une charge $q = 4$ U. E. S., une troisième boule C, égale aux deux autres, est mobile sur la ligne qui les joint. Elle est primitivement neutre. On l'amène en contact avec A et on l'abandonne à elle-même. Trouver sa position d'équilibre. Discuter la stabilité.

Réponse : AC = 29,3 cm et l'équilibre est stable.

11. Une tige cylindrique de section S = 5 cm², convenablement lestée, flotte verticalement sur un liquide de masse spécifique $\mu = 13{,}6\,g$ par cm³. Elle porte à sa partie supérieure une boule A isolée portant une charge $m = 0{,}2$ micro-coulomb. A 4 cm au-dessus de la position *initiale* de A, on place une autre boule B portant une charge négative $m' = 0{,}2$ micro-coulomb.

Déterminer la position d'équilibre de la tige et discuter la stabilité. (Les rayons des sphères A et B sont supposés très petits.)

Accélération de la pesanteur : $g = 980$ C. G. S.

Réponse: deux positions d'équilibre : $A_1B = 3{,}58$ cm (stable) ; $A_2B = 1{,}45$ cm (instable).

CHAPITRE VI

CHAMP ÉLECTRIQUE

I. — DÉFINITION — CALCUL DE QUELQUES CHAMPS

*41. — **Champs électriques. Vecteur champ en un point.*** — Une masse électrique doit être considérée de deux points de vue différents : elle est *active*, en tant que capable d'agir sur les autres masses électriques, et elle est *passive* en tant que capable de subir les actions exercées par ces autres masses.

Nous appelons *champ de forces électriques*, ou plus simplement *champ électrique*, toute région de l'espace telle que si l'on supposait placée en l'un quelconque de ses points une masse électrique *qui ne serait que passive*, elle serait soumise à une force.

Un champ électrique est caractérisé en chaque point par un *vecteur* que nous appelons le *champ en ce point*. Par définition, *la direction, le sens et l'intensité du vecteur champ en un point, sont la direction, le sens et l'intensité de la force qu'exercerait le champ sur une masse d'électricité positive égale à l'unité placée en ce point, et qui ne serait que passive.*

Une masse électrique de valeur algébrique q placée en un point est alors soumise à une force $\vec{f}$ liée au vecteur champ $\vec{H}$ en ce point par la relation :

$$\vec{f} = q\vec{H} ;$$

la force $\vec{f}$ a le sens du vecteur champ $\vec{H}$ ou le sens contraire, suivant que l'on a : $q > 0$ ou $q < 0$.

Il en résulte que, si des masses électriques sont dans un milieu où elles peuvent se déplacer (milieu *conducteur*), les masses d'électricité *positive* se déplacent *dans le sens du champ*, et les masses d'électricité négative en sens contraire.

Nous allons dans le chapitre actuel faire une étude théorique du champ électrique en appliquant la loi de Coulomb $f = \frac{1}{\varepsilon}\frac{qq'}{r^2}$, ε étant le pouvoir inducteur spécifique du milieu qui, pour le vide, est égal à l'unité.

Ceci revient à dire qu'une masse électrique ponctuelle produit à la distance r un champ dont l'intensité a pour expression :

$$H = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{r^2}$$

Une telle étude présente un double intérêt. D'une part, elle établit des propriétés susceptibles d'une vérification expérimentale précise, dont l'en-

semble permet une démonstration *à posteriori* de la loi de Coulomb. D'autre part, les formules qui seront établies dans ce chapitre seront applicables à tous les champs régis par la loi de l'inverse carré de la distance. Tous ces champs de force (champs magnétiques, champs de gravitation) sont appelés **champs newtoniens.**

42. — Unité électrostatique C. G. S. d'intensité de champ. — Il résulte de la formule : $f = qH$, que l'on a $H = 1$ lorsque simultanément $f = 1$ et $q = 1$. Donc : *l'unité électrostatique C. G. S. d'intensité de champ électrique est l'intensité du champ qui exerce une force d'une dyne sur une masse électrique égale à l'unité C. G. S.*

La formule :

$$H = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{r^2},$$

conduit à une seconde définition de la même unité. On peut dire, d'après cette formule, qu'on a : $H = 1$ lorsque simultanément $q = 1$, $r = 1$ et $\varepsilon = 1$.

Donc *l'unité électrostatique C. G. S. d'intensité de champ électrique est l'intensité du champ créé dans le vide, à 1 cm de distance, par une masse électrique égale à l'unité C. G. S.*

Les formules : $f = qH$ et $H = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{r^2}$ conduisent toutes deux, pour l'unité électrostatique C. G. S. d'intensité de champ, à l'équation de dimension :

$$H = L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

43. — Couches d'électricité sans épaisseur. Densité en un point. — Cette notion de couche électrique sans épaisseur tire son intérêt de la propriété des conducteurs électrisés en équilibre qui, ainsi que nous le verrons dans les chapitres suivants, ne possèdent jamais d'électricité dans leur masse même, et où la distribution est uniquement superficielle (surface extérieure ou surface des cavités internes).

Avant d'étudier les propriétés de couches superficielles de formes simples (plane, sphérique...), nous devons définir la *densité en un point* d'une telle couche.

Soit Δq la quantité d'électricité portée par un élément de surface d'aire ΔS pris sur la couche considérée autour d'un point A. Faisons tendre vers zéro l'aire ΔS de manière que l'élément de surface considéré se réduise au point A. La quantité d'électricité Δq tend aussi vers zéro, mais le rapport $\frac{\Delta q}{\Delta S}$ tend vers une limite σ qu'on appelle, par définition, la *densité* de la couche au point A. Donc :

$$\sigma = \frac{dq}{dS}.$$

UNITÉ ÉLECTROSTATIQUE C. G. S. DE DENSITÉ SUPERFICIELLE. — Considérons une couche d'électricité superficielle uniformément distribuée, c'est-à-dire ayant même densité σ en tous ses points. Une portion de cette couche, d'aire S, porte une quantité d'électricité q et nous avons :

$$\sigma = \frac{q}{S}.$$

Cette relation donne $\sigma = 1$ lorsqu'on y fait simultanément $q = 1$ et $S = 1$. D'où la définition suivante : *l'unité électrostatique C. G. S. de densité superficielle est la densité d'une couche sans épaisseur uniformément distribuée qui possède, par centimètre carré, une quantité d'électricité égale à l'unité C. G. S.*

Il résulte du paragraphe 39 que l'équation de dimension de cette unité est :

$$\Sigma = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

Elle est identique à celle de l'unité d'intensité de champ (§ 42). Nous établirons dans les paragraphes qui suivent des relations confirmant cette identité.

44. — Champ produit par une couche mince, plane, circulaire, de densité uniforme en un point de son axe. — Considérons une couche circulaire uniforme d'électricité de densité superficielle σ. Cherchons le champ en un point M de l'axe. Par raison de symétrie, le champ a pour direction l'axe OM du cercle. Son sens dépend de la nature des charges. Si nous supposons la couche circulaire formée de charges positives, le champ est dirigé comme l'indique la figure 22.

L'intensité h du champ est la somme algébrique des projections sur OM des champs dus à tous les éléments de surface du cercle.

Un élément de surface dS de centre A porte la quantité d'électricité σdS et crée en M un champ élémentaire dh' dirigé suivant AM et égal, d'après la loi de Coulomb, à :

$$dh' = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\sigma\, dS}{AM^2} \quad ;$$

La composante dh de ce champ suivant l'axe est :

$$dh = dh' \cos\alpha = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\sigma\, dS \cos\alpha}{AM^2}.$$

Or α représente aussi l'angle de AM avec la normale en A à la surface dS. Par suite la quantité

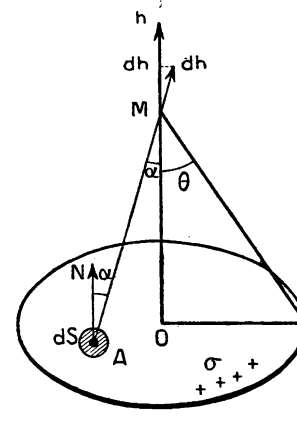


FIG. 22

$\frac{dS \cos \alpha}{AM^2}$ est l'angle solide sous lequel de M on voit l'élément de surface dS (§ 1). Soit $d\Omega$ cet angle solide élémentaire :

$$dh = \frac{\sigma}{\varepsilon} d\Omega.$$

En faisant la somme des dh pour tous les éléments du cercle, nous obtenons le champ :

$$h = \frac{\sigma}{\varepsilon} \Omega$$

Ω étant l'angle solide sous lequel de M on voit toute la surface du cercle. Si θ est l'angle générateur du cône de sommet M et s'appuyant sur le contour circulaire, nous avons vu au paragraphe 1 que $\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$. D'où :

$$\boxed{h = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}(1 - \cos\theta)}$$

Cas particuliers. — 1° Lorsque le rayon du cercle devient infini $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\cos\theta = 0$. *Le champ produit par une couche de densité uniforme σ recouvrant un plan indéfini, en un point extérieur, est donné par la formule :*

$$h = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}.$$

Remarquons que l'intensité du champ est indépendante de la distance du point au plan ;

2° Dans le cas d'une couche circulaire finie, mais lorsque le point M est voisin du centre O du cercle, on a encore $\theta \# \frac{\pi}{2}$ et h est pratiquement égal à $\frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}$.

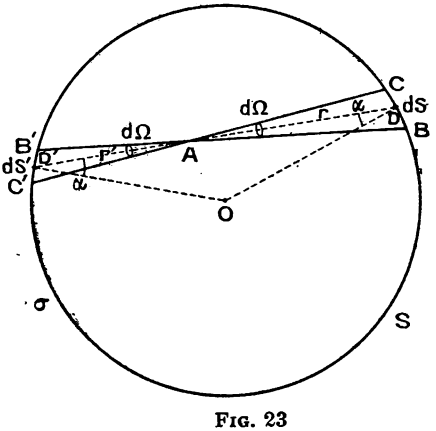


Fig. 23

45. — Champ d'une couche sphérique infiniment mince de densité uniforme en un point situé à l'intérieur. — Soit une couche sphérique superficielle de densité uniforme σ, et un point A situé à l'intérieur (fig. 23).

Considérons deux cônes infiniment petits d'angle solide $d\Omega$, de sommet A et opposés par le sommet. Ils découpent sur la couche sphérique deux éléments BC et B'C' d'aires infiniment petites dS et dS' portant des quantités d'électricité $\sigma\, dS$ et $\sigma\, dS'$.

Soit D et D' les centres de BC et B'C' ; r et r' les distances respectives AD et AD'. Les éléments de surface BC et B'C' créent au point A des champs de direction DD', de sens contraires et d'intensités $d\mathrm{H}$ et $d\mathrm{H}'$. Nous avons, *d'après la loi de l'inverse carré de la distance* :

$$d\mathrm{H} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\sigma d\mathrm{S}}{r^2}, \qquad \text{et} \qquad d\mathrm{H}' = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\sigma d\mathrm{S}'}{r'^2}.$$

D'autre part, la droite DD' fait avec les normales OD et OD' aux deux éléments BC et B'C', deux angles égaux, car le triangle DOD' est isocèle. Soit α la valeur commune de ces angles. Nous avons (§ 1) :

$$d\Omega = \frac{d\mathrm{S}\cos\alpha}{r^2} \qquad \text{et} \qquad d\Omega = \frac{d\mathrm{S}'\cos\alpha}{r'^2}$$

Par suite :

$$\frac{d\mathrm{S}}{r^2} = \frac{d\Omega}{\cos\alpha} = \frac{d\mathrm{S}'}{r'^2}$$

et nous pouvons écrire : $$d\mathrm{H} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\sigma\, d\Omega}{\cos\alpha} = d\mathrm{H}'$$

Donc l'ensemble des deux éléments BC et B'C' produit au point A un champ nul. La totalité de la couche sphérique peut être ainsi partagée en groupes de deux éléments tels que chaque groupe produise en A un champ nul : **le champ en *A*, dû à toute la couche, est nul.**

***Réciproquement**, la loi de l'inverse carré de la distance est la seule pour laquelle le champ d'une couche sphérique mince uniforme ait en un point intérieur quelconque une intensité nulle.*

C'est ce que nous allons démontrer.

Une loi quelconque de variation du champ en fonction de la distance peut toujours se mettre sous la forme :

$$\mathrm{H} = q\,\frac{f(r)}{r^2}.$$

Supposons que $f(r)$ ne soit pas une constante. Montrons que l'intensité du champ en un point quelconque intérieur à une couche sphérique ne peut être nulle.

En effet, si $f(r)$ n'est pas constant, nous pouvons trouver deux valeurs r_1 et r_2 ($r_1 < r_2$) telles qu'entre ces limites la fonction $f(r)$ varie toujours dans le même sens, par exemple soit toujours *croissante*.

Sur une droite passant par un point A (fig. 24) portons en sens opposés deux longueurs $\mathrm{AM}_1 = r_1$ et $\mathrm{AM}_2 = r_2$. Puis considérons la sphère de

diamètre M_1M_2. Supposons que cette sphère porte une répartition uniforme de masses électriques de densité superficielle σ et calculons le champ produit par cette couche au point A. Considérons deux cônes infiniment petits d'angle solide $d\Omega$ opposés par le sommet A et coupant la sphère suivant deux éléments de surface BC et B'C' de centres D et D'. Posons AD = r et AD' = r'. Le plan PP' perpendiculaire au diamètre M_1M_2 au point A partage la surface sphérique en deux parties ; le point D est sur la partie M_1, le point D' sur la partie M_2 et les longueurs r et r' sont telles que $r_1 < r < AP < r' < r_2$.

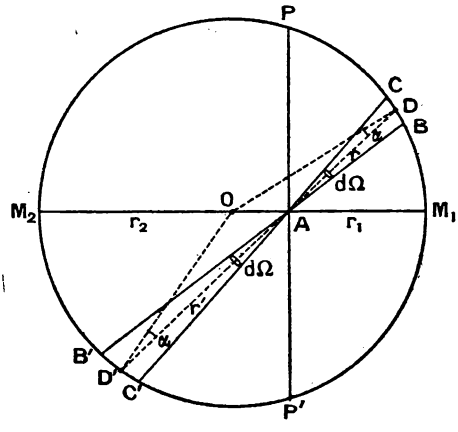


FIG. 24

Les champs de sens contraires produits en A par les éléments BC et B'C' ont respectivement pour intensités :

$$dH = \frac{\sigma\, dS}{r^2} f(r), \qquad \text{et} \qquad dH' = \frac{\sigma\, dS'}{r'^2} f(r'),$$

Or :

$$d\Omega = \frac{dS \cos \alpha}{r^2} = \frac{dS' \cos \alpha}{r'^2}$$

D'où

$$dH = \frac{\sigma\, d\Omega}{\cos \alpha} f(r), \qquad \text{et} \qquad dH' = \frac{\sigma\, d\Omega}{\cos \alpha} f(r').$$

D'après notre hypothèse sur le sens de variation de la fonction $f(r)$, nous avons $f(r') > f(r)$ d'où :

$$dH' > dH$$

Donc l'ensemble des deux éléments BC et B'C' produit en A un champ de direction DD' et d'intensité $dH' - dH$; la composante de ce champ suivant M_1M_2 a un sens déterminé, par exemple le sens AM_1 si la couche d'électricité qui recouvre la sphère est positive.

Partageons maintenant la totalité de la surface sphérique en groupes de deux éléments analogues à BC et à B'C' ; l'ensemble des éléments BC constitue la partie PM_1P' de la surface et l'ensemble des éléments B'C' en constitue la partie PM_2P'. Chaque groupe de deux éléments produit en A un champ non nul, et les composantes de ces champs suivant M_1M_2 ont *toutes un même sens*, par exemple AM_1, si la couche sphérique est positive. Donc, dans l'hypothèse où $f(r)$ n'est pas une constante, et où par suite la loi de variation des actions électriques avec la distance n'est pas la loi de l'inverse carré, le champ au point A dû à la totalité de la couche sphérique n'est pas nul.

PRINCIPE D'UNE MÉTHODE DE VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DE LA LOI DE L'INVERSE CARRÉ DE LA DISTANCE. — Une couche sphérique mince uniforme peut être réalisée pratiquement. C'est le cas de la couche d'électricité qui recouvre une sphère *conductrice* éloignée de tout corps. Or nous verrons (§ 65) qu'une telle couche produit en un point quelconque intérieur à la sphère un champ nul. Donc $f(r)$ est une constante et la loi de variation des actions électriques avec la distance est la loi de l'inverse carré.

On trouve là une des meilleures vérifications de la loi de Coulomb.

II. — FLUX DE FORCE

46. — Lignes de force. Surfaces de niveau. — On appelle *ligne de force* dans un champ électrique, toute ligne ayant la propriété d'être tangente en chacun de ses points à la direction du champ en ce point (fig. 25).

D'un point, où existe une masse électrique isolée, partent une infinité de lignes de force dans toutes les directions autour du point.

En un point du champ, où n'existe pas de masse électrique apparente, la direction du champ est parfaitement définie : il ne passe par un tel point qu'une seule ligne de force.

Toute ligne de force est affectée d'un *sens* : c'est le sens du champ en chacun de ses points.

— On appelle *surface de niveau* dans un champ électrique, toute surface ayant la propriété d'être orthogonale en chacun de ses points à la ligne de force qui passe par ce point.

Ces surfaces, ainsi définies par une propriété *géométrique*, doivent leur intérêt à ce qu'elles coïncident avec les *surfaces équipotentielles* (§ 56) douées d'une propriété *physique* importante.

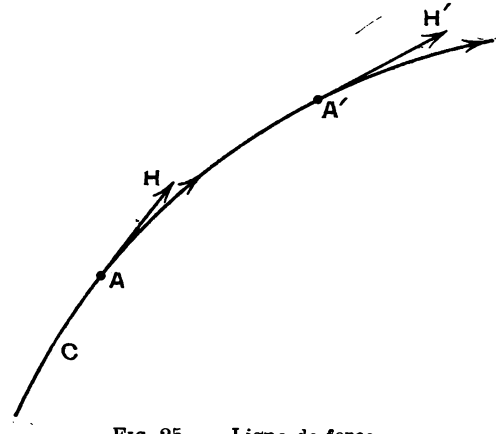


FIG. 25. — Ligne de force.

On appelle *tube de force* le canal formé par l'ensemble des lignes de force passant par chacun des points d'un contour fermé.

47. — Représentation de quelques champs électriques particuliers, par leurs lignes de force et leurs surfaces de niveau. — 1° CHAMP D'UNE MASSE ÉLECTRIQUE PONCTUELLE. — Les lignes de force (fig. 26) sont des droites passant par le point O où se trouve la masse électrique considérée. Leur sens est lié au signe de cette masse.

Les surfaces de niveau (traits pointillés) sont des sphères ayant pour centre le point O.

2° CHAMP D'UN ENSEMBLE DE DEUX MASSES ÉLECTRIQUES PONCTUELLES ÉGALES ET DE NOMS CONTRAIRES. — Les lignes de force (fig. 27) vont du point O où se trouve la masse $+q$ au point O′ où se trouve la masse $-q$. Le plan yy' perpendiculaire au segment de droite OO′ en son milieu M est un plan de symétrie pour chacune des lignes de force ; toutes le traversent normalement.

La droite indéfinie passant par les points O et O′ est une ligne de force. Elle est partagée en trois segments par les points O et O′ ; sur chaque

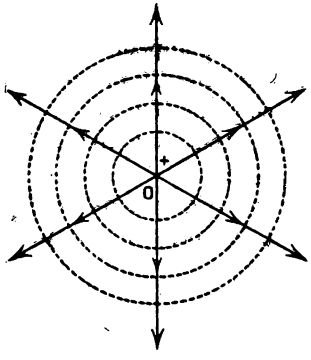


FIG. 26

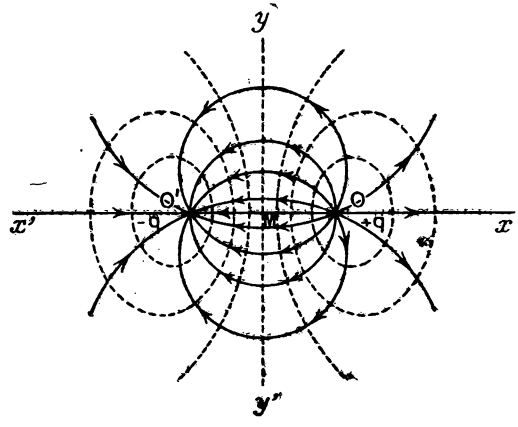


FIG. 27

segment limité au point O, le sens de la ligne de force s'éloigne de O ; sur chaque segment limité au point O′, le sens de la ligne de force s'approche du point O′.

L'une des surfaces de niveau est le plan yy'. Les autres sont des surfaces de révolution autour de OO′ ; leurs traces sont des courbes fermées qui entourent soit le point O, soit le point O′.

3° CHAMP D'UN ENSEMBLE DE DEUX MASSES ÉGALES ET DE MÊME NOM. — Soit deux masses égales d'électricité *positive* par exemple, situées en O et O′ (fig. 28). Au milieu M du segment OO′, l'intensité du champ est nulle. Aucune ligne de force ne passe au point M, mais en tout point aussi voisin de M qu'on le veut passe une ligne de force déterminée. En tous les points de la droite indéfinie OO′ (sauf au point M), la ligne de force est la droite OO′. En tous les points de la droite indéfinie yy' perpendiculaire à OO′ en son milieu (sauf

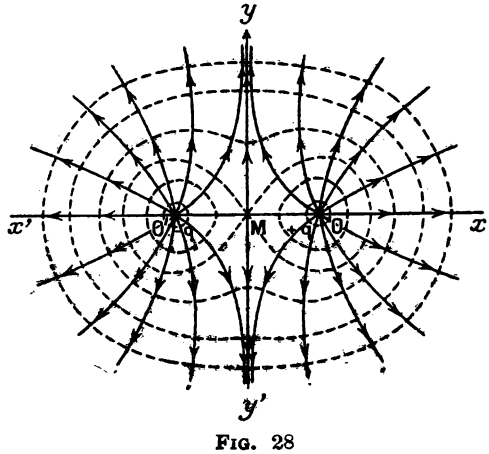


FIG. 28

au point M), la ligne de force est la droite yy'. Les lignes de force autres que cette dernière partent toutes soit de O, soit de O'.

Les surfaces de niveau sont de révolution autour de la droite OO'. On peut en distinguer deux espèces : les unes entourent un seul des deux points O et O', les autres entourent les deux. La surface intermédiaire a une méridienne en forme de ∞ dont les deux branches se coupent au point M.

4° CHAMP ÉLECTRIQUE UNIFORME. — On donne ce nom à un champ dont les lignes de force sont des droites parallèles, ou ce qui revient au même, dont les surfaces de niveau sont des plans parallèles (fig. 29). Nous démontrerons (§ 59) que l'intensité d'un tel champ a la même valeur en tous ses points.

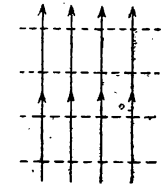


FIG. 29
Champ uniforme.

Une région d'un champ électrique quelconque peut être considérée comme pratiquement uniforme pourvu que : 1° elle ne contienne aucune masse électrique ; 2° ses dimensions soient suffisamment petites vis-à-vis de sa distance aux masses électriques les plus proches.

48. — ***Flux de force.*** — Considérons, dans un champ électrique, un élément de surface dS assez petit pour qu'en chacun de ses points le champ électrique puisse être considéré comme constant en direction, sens et grandeur. Soit H l'intensité du champ et α l'angle que fait le champ avec la normale à l'élément dS (fig. 30).

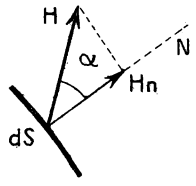


FIG. 30

Par définition, on appelle **flux de force** ou simplement *flux*, à travers l'élément dS la quantité scalaire définie par la relation :

$$d\Phi = H\, dS \cos\alpha.$$

On peut considérer que $H \cos\alpha$ est la valeur de la composante normale H_n du champ suivant la normale à l'élément de surface et écrire :

$$d\Phi = H_n\, dS.$$

Considérons maintenant une surface finie. Elle peut être considérée comme la juxtaposition d'une infinité d'éléments. *Le flux à travers cette surface est, par définition, la somme des flux relatifs aux divers éléments.* Mais remarquons que, pour chaque élément, la normale est partagée par la surface en deux demi-normales et que le signe de cos α varie avec la demi-normale choisie. Nous conviendrons, pour évaluer le flux à travers chacun des éléments, d'appeler α l'angle du vecteur champ avec la demi-normale *extérieure*. Par suite, le flux total sera la somme algébrique des flux élémentaires, et, d'après nos conventions, tout flux sortant sera positif, tout flux rentrant sera négatif.

UNITÉ DE FLUX. — Dans un champ uniforme d'intensité H, le flux qui traverse une surface plane d'aire S a pour expression :

$$\Phi = HS \cos \alpha$$

Faisons $H = 1$, $S = 1$ et $\cos \alpha = 1$, nous avons $\Phi = 1$.

En particulier, *dans le système électrostatique C. G. S., l'unité de flux est le flux qui traverse une portion de surface plane ayant une aire d'un centimètre carré, placée normalement aux lignes de force dans un champ électrique uniforme dont l'intensité est égale à une unité électrostatique C. G. S.*

L'équation aux dimensions d'un flux est, dans le système électrostatique :

$$\Phi = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

Elle est identique à l'équation aux dimensions d'une quantité d'électricité. Nous en trouverons une confirmation dans le théorème de Gauss (§ 50).

49. — Flux de force envoyé dans un cône par une masse électrique située en son sommet. — Considérons une masse électrique ponctuelle q placée au point A et un cône élémentaire de sommet A et d'angle solide $d\Omega$ (fig. 31).

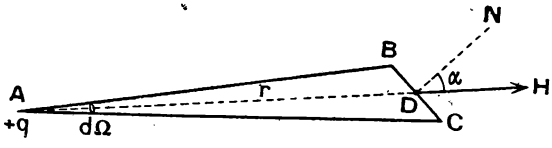


FIG. 31

Calculons le flux envoyé par la charge q, que nous supposerons positive, à travers une section quelconque dS du cône. Le champ produit par la charge q au centre D de la surface dS est dirigé suivant AD et son intensité est :

$$H = \frac{1}{\varepsilon} \frac{q}{r^2},$$

r étant la distance AD. Soit α l'angle du champ avec la normale DN à dS, le flux a pour expression :

$$d\Phi = H\, dS \cos \alpha = \frac{1}{\varepsilon}\, q\, \frac{dS \cos \alpha}{r^2};$$

Or $\frac{dS \cos \alpha}{r^2}$ est préeisément la mesure de l'angle solide $d\Omega$. Donc :

$$d\Phi = \frac{q}{\varepsilon}\, d\Omega.$$

$d\Phi$ est donc indépendant de r et de α. *Il est le même à travers toutes les sections du cône élémentaire.* Le flux $d\Phi$ est caractéristique du cône, nous l'appellerons, pour simplifier, flux envoyé « *dans le cône* » par la masse q.

Considérons maintenant un cône d'angle solide fini Ω ayant son sommet au

point A où se trouve la masse ponctuelle q. Nous pouvons le considérer comme la juxtaposition d'un nombre infini de cônes infiniment petits d'angle solide $d\Omega$. Le flux envoyé dans chaque cône élémentaire par la masse q est $d\Phi = \frac{q}{\varepsilon} d\Omega$ et, comme les flux s'ajoutent algébriquement, le flux total a pour expression :

$$\Phi = \int \frac{q}{\varepsilon} d\Omega = \frac{q}{\varepsilon} \int d\Omega = \frac{q}{\varepsilon} \Omega$$

$$\boxed{\Phi = \frac{q}{\varepsilon} \Omega}$$

50. — ***Théorème de Gauss.*** — Il se rapporte au flux sortant d'une *surface fermée* S. Le champ électrique est produit par des charges électriques qui peuvent être à l'extérieur de S, à l'intérieur de S ou sur la surface S. Etudions successivement chacun de ces trois cas.

1° MASSES EXTÉRIEURES. — Considérons d'abord *une* masse électrique ponctuelle q placée en un point A (fig. 32) extérieur à une surface fermée S.

Un cône élémentaire de sommet A et d'angle solide $d\Omega$ découpe sur S deux éléments de surface BC et B'C' d'aires dS et dS'. Les flux relatifs à ces deux éléments sont, en valeur absolue, tous deux égaux à $\frac{q}{\varepsilon} d\Omega$ mais les angles α et α' du champ avec la normale *extérieure* sont tels que ces deux flux sont de signes contraires. Leur somme algébrique est donc nulle. Tous les cônes élémentaires de sommet A et coupant la surface donnent de même un flux nul. Donc *le flux total dû à la charge* q *et sortant de* S *est nul.*

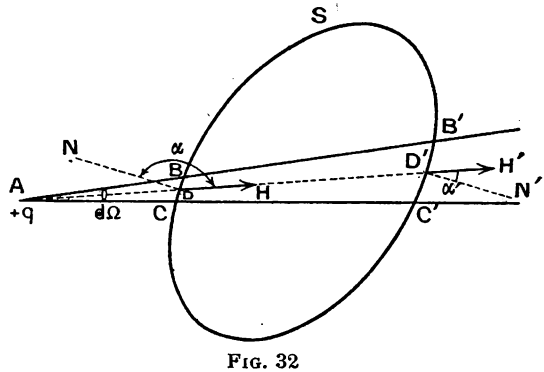


FIG. 32

Le raisonnement précédent a été fait sur une surface S complètement convexe. Si la surface présente des parties concaves (fig. 33), remarquons que les cônes élémentaires de sommet A la coupent nécessairement un nombre *pair* de fois. Les flux pour les différents éléments découpés sur S sont égaux, mais alternativement négatifs et positifs. Leur somme algébrique est encore nulle.

Supposons maintenant qu'il existe à l'extérieur de la surface S plusieurs masses électriques distinctes : q_1 en A_1, q_2 en A_2, q_3 en A_3... Considérons un élément de surface BC de centre D (fig. 34). Les masses q_1, q_2, q_3..., créent en D des champs $\vec{H}_1$, $\vec{H}_2$, $\vec{H}_3$..., faisant avec la demi-normale extérieure des

angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Le champ résultant $\vec{H}$ fait avec cette demi-normale un angle α et, d'après la propriété d'un système de vecteurs, nous avons :

$$H \cos \alpha = H_1 \cos \alpha_1 + H_2 \cos \alpha_2 + H_3 \cos \alpha_3 + \ldots ;$$

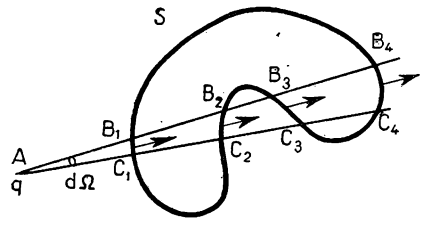


FIG. 33

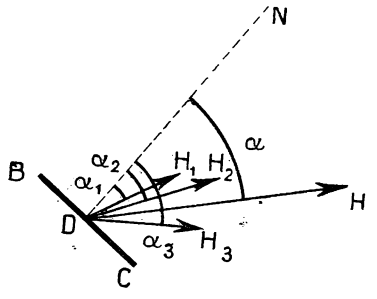


FIG. 34

Soit dS l'aire de l'élément BC. La relation précédente s'écrit :

$$H dS \cos \alpha = H_1 dS \cos \alpha_1 + H_2 dS \cos \alpha_2 + H_3 dS \cos \alpha_3 + \ldots . ;$$

Ceci exprime que le flux envoyé par l'ensemble des masses à travers l'élément BC est la somme algébrique des flux envoyés séparément par chacune des masses. Il en sera de même pour la surface entière.

Par suite, comme chaque masse envoie un flux nul, le flux total sera nul. D'où :

Le flux sortant d'une surface fermée et dû à des masses électriques ***extérieures*** *est nul.*

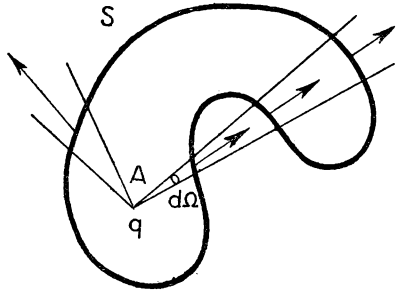


FIG. 35

2° MASSES INTÉRIEURES. — Considérons *une* masse intérieure q placée au point A (fig. 35). Un cône élémentaire de sommet A et d'angle solide $d\Omega$ coupe la surface fermée S un nombre *impair* de fois. Les flux pour les différents éléments découpés sur S sont égaux et alternativement positifs et négatifs. Le flux total pour un cône élémentaire est donc $\frac{q}{\varepsilon} d\Omega$.

L'ensemble de tous les cônes de sommet A donne un flux sortant :

$$\Phi = \int \frac{q}{\varepsilon} d\Omega = \frac{q}{\varepsilon} \int d\Omega = 4\pi \frac{q}{\varepsilon}.$$

Supposons maintenant qu'il existe à l'intérieur de la surface S plusieurs

masses électriques distinctes q_1, q_2, q_3... Les flux s'ajoutent algébriquement. Par suite, le flux total est :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots,$$

$$\Phi = \frac{4\pi}{\varepsilon}(q_1 + q_2 + q_3 + \ldots).$$

Le flux sortant d'une surface fermée et dû à des masses électriques intérieures est égal au produit par $\frac{4\pi}{\varepsilon}$ *de la somme algébrique des masses intérieures.*

3° MASSES RÉPARTIES SUR LA SURFACE. — Considérons une masse q placée en un point A de la surface S (fig. 36). Menons le plan tangent en A à la surface S. Supposons d'abord que la surface soit tout entière d'un même côté de ce plan.

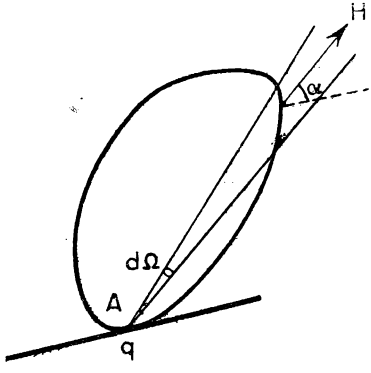


FIG. 36

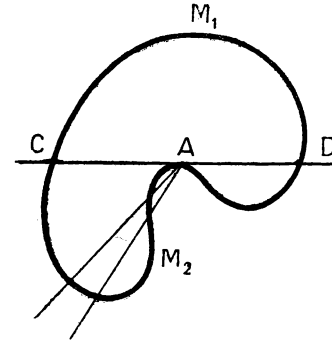


FIG. 37

Tout cône élémentaire de sommet A et d'angle solide $d\Omega$ coupe la surface un nombre *impair* de fois. Le flux total pour un cône élémentaire est donc $\frac{q}{\varepsilon}\,d\Omega$. L'ensemble de tous les cônes de sommet A forme un demi-plan d'angle solide 2π. Le flux total sortant est :

$$\Phi = \int \frac{q}{\varepsilon}\,d\Omega = \frac{q}{\varepsilon}\int d\Omega = 2\pi\frac{q}{\varepsilon}.$$

Si le plan tangent coupe la surface (fig. 37), celle-ci est divisée en deux parties CDM_1 et CDM_2. Le même raisonnement que ci-dessus nous montre que le flux sortant par la partie CDM_1 est égale à $2\pi\frac{q}{\varepsilon}$. Quant à la partie CDM_2, tout cône élémentaire de sommet A la coupe un nombre pair de fois ; le flux correspondant est donc nul.

Donc *le flux dû à une masse située sur la surface est égal à* $2\pi\frac{q}{\varepsilon}$.

Supposons maintenant qu'il existe sur la surface plusieurs masses distinctes q_1, q_2, q_3. Les flux s'ajoutent algébriquement et le flux total sera :

$$\Phi = \frac{2\pi}{\varepsilon}(q_1 + q_2 + q_3 + \ldots).$$

Le flux sortant d'une surface fermée et dû à des masses électriques réparties sur cette surface, est égal au produit par $\frac{2\pi}{\varepsilon}$ *de la somme algébrique des masses situées sur la surface.*

L'ensemble de ces trois résultats constitue le théorème de Gauss :

THÉORÈME DE GAUSS. — **Le flux de force Φ qui sort d'une surface fermée est égal au produit par $\frac{4\pi}{\varepsilon}$ de la somme algébrique Σq_i des masses intérieures augmenté du produit par $\frac{2\pi}{\varepsilon}$ de la somme algébrique Σq_s des masses superficielles. Il est indépendant des masses extérieures.**

Le théorème de Gauss se traduit par la formule :

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon}\left(4\pi\Sigma q_i + 2\pi\Sigma q_s\right)$$

51. — ***Applications du théorème de Gauss.*** — 1° CHAMP PRODUIT PAR UNE COUCHE SPHÉRIQUE MINCE DE DENSITÉ UNIFORME EN UN POINT INTÉRIEUR. — Nous avons montré (§ 45) que ce champ était nul. Nous allons retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Gauss.

Soit une couche sphérique uniforme de centre O et de rayon R (fig. 38). Considérons un point A intérieur situé à la distance r de O ($OA = r < R$). Traçons la sphère de centre O et de rayon r. Par raison de symétrie, le champ en chacun des points de cette sphère est normal à la sphère et a une intensité constante H. Le flux qui sort de cette sphère est donc $\Phi = 4\pi r^2 \times H$. Or, d'après le théorème de Gauss, ce flux est nul, puisqu'il n'y a aucune charge électrique intérieure. Nous avons :

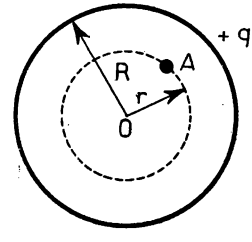


FIG. 38

$$4\pi r^2 \times H = 0,$$
$$H = 0.$$

Le champ produit par une couche sphérique homogène en un point intérieur est nul.

2° CHAMP PRODUIT PAR UNE COUCHE SPHÉRIQUE MINCE DE DENSITÉ UNIFORME EN UN POINT EXTÉRIEUR. — Soit une couche sphérique uniforme de centre O et de rayon R (fig. 39). Considérons un point A extérieur situé à la distance r de O et traçons la sphère de rayon OA.

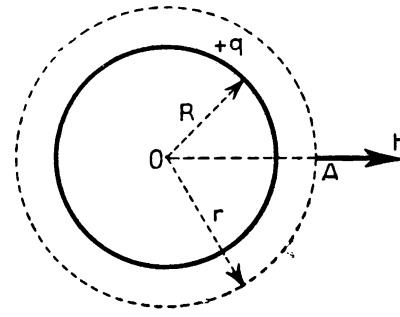


FIG. 39

Par raison de symétrie le champ en tous les points de cette sphère lui est normal et a une intensité constante H. Le flux sortant est donc :

$$\Phi = 4\pi r^2 \times H$$

Appelons q la charge totale répartie sur la sphère de rayon R. D'après le théorème de Gauss, le flux $\Phi = \frac{4\pi}{\varepsilon} q$ puisque toutes les charges sont intérieures (ε est le pouvoir inducteur spécifique du milieu ambiant [§ 40]) :

$$4\pi r^2 \times H = \frac{4\pi}{\varepsilon} q.$$

$$H = \frac{1}{\varepsilon} \frac{q}{r^2}.$$

Le champ produit par une couche sphérique uniforme en un point extérieur est le même que si toutes les charges étaient concentrées au centre de la sphère.

3° CONSERVATION DU FLUX A L'INTÉRIEUR D'UN TUBE DE FORCE. — Considérons un tube de force (fig. 40) et soit AB et A'B' deux sections quelconques de ce tube. Appelons Φ et Φ' les flux qui les traversent *dans le sens du champ*. Considérons la surface fermée constituée par les sections AB et A'B' et la portion de tube qui les joint. Cette surface ne contenant aucune charge, le flux qui sort est nul d'après le théorème de Gauss.

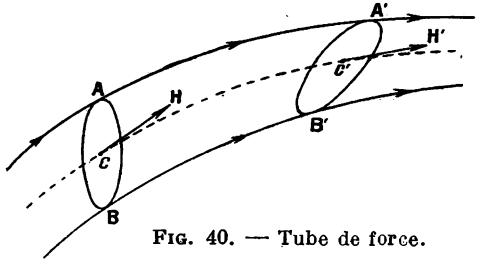


FIG. 40. — Tube de force.

Or, ce flux comprend :

1° Le flux qui sort par la paroi latérale. Ce flux est nul car en chacun des points le champ est tangent à la surface et la composante normale H_n du champ est nulle ;

2° Le flux qui *sort* par AB et qui est égal à $-\Phi$;

3° Le flux qui sort par A'B' et qui est égal à Φ'.

Ecrivons que le flux total est nul, nous avons :

$$\Phi' - \Phi = 0.$$

$$\Phi = \Phi'$$

Le flux qui traverse dans le même sens toutes les sections d'un tube de force est constant. On dit que le flux de force électrique se conserve à l'intérieur d'un tube de force.

III. — POTENTIEL

*52. — **Travail du champ électrique.*** — Considérons le champ électrique produit par une masse électrique q placée au point O. En un point quelconque M situé à la distance r de O, le champ est dirigé suivant OM et a pour intensité $\frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{r^2}$.

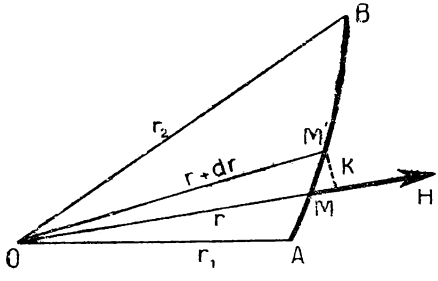


FIG. 41

Evaluons le travail du champ quand on se déplace de A en B suivant la ligne AMB (fig. 41).

Calculons le travail du champ $\vec{H}$ pour un déplacement élémentaire MM'. Désignons par r la distance OM et $r + dr$ la distance OM'. Le travail élémentaire est $d\mathcal{C} = H \times MK$. Si nous considérons MM' comme infiniment petit principal, nous avons, au 2e ordre près, MK $= dr$ et :

$$d\mathcal{C} = H\,dr = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{r^2}\,dr.$$

Le travail total, quand nous passons de A défini par OA $= r_1$ en B défini par OB $= r_2$, est :

$$\mathcal{C} = \int d\mathcal{C} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{r^2}\,dr = \frac{q}{\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}.$$

$$\mathcal{C} = \frac{q}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Cette formule nous montre que le travail pour aller de A en B est *indépendant du chemin suivi.* Il est égal à la différence des valeurs prises par la fonction $\varphi(r) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{r}$ pour les valeurs r_1 et r_2 correspondant aux extrémités du déplacement.

Si nous considérons maintenant un champ électrique produit par des masses q_1, q_2, q_3... placées en des points O_1, O_2, O_3..., le travail du champ total dans un déplacement sera la somme *algébrique* des travaux des champs produits par chacune des masses. Par suite, ce travail ne dépendra que des extrémités A et B du déplacement.

Soit r_1 r_2 r_3... les distances du point A aux différentes masses électriques et r'_1 r'_2 r'_3... les distances du point B aux mêmes masses. Les travaux des champs dus aux masses q_1 q_2 q_3... sont respectivement :

$$\mathcal{C}_1 = \frac{q_1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right),\quad \mathcal{C}_2 = \frac{q_2}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r'_2}\right),\quad \mathcal{C}_3 = \frac{q_3}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r'_3}\right).$$

Le travail total est :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 + \dots$$

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\varepsilon}\left[\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \dots\right) - \left(\frac{q_1}{r'_1} + \frac{q_2}{r'_2} + \frac{q_3}{r'_3} + \dots\right)\right]$$

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\Sigma\,\frac{q}{r} - \Sigma\,\frac{q}{r'}\right)$$

Le travail est égal à la différence des valeurs V_A et V_B prises par la fonction $V = \frac{1}{\varepsilon}\,\Sigma\,\frac{q}{r}$ aux points A et B.

$$\mathcal{T} = V_A - V_B .$$

On dit que **le champ électrique dérive d'un potentiel**, V s'appelle la **fonction potentiel.** D'une manière générale, toute fonction $\varphi = V + C^{te}$ est telle que $\mathcal{T} = \varphi_A - \varphi_B$ et peut servir de fonction potentiel. *Nous choisirons la fonction potentiel électrique de façon qu'elle soit nulle à l'infini.* Dans ces conditions :

$$\varphi = V = \frac{1}{\varepsilon}\,\Sigma\,\frac{q}{r}.$$

53. — ***Potentiel.*** — Plus généralement, on dit qu'un champ de force quelconque dérive d'un potentiel lorsque le travail du champ pour aller d'un point A en un point B est indépendant du chemin suivi.

Il résulte immédiatement de cette définition que lorsqu'un champ dérive d'un potentiel, le travail du champ le long d'une courbe *fermée* est nul et réciproquement.

Rapportons le champ à trois axes de coordonnées Ox, Oy, Oz. Soit A (x_1, y_1, z_1) et B (x_2, y_2, z_2) les extrémités d'un déplacement. Le travail du champ dans ce déplacement ne dépendant que des positions de A et B sera une fonction de x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2.

$$\mathcal{T}_A^B = F(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2).$$

Choisissons arbitrairement un point de référence A_0 (x_0, y_0, z_0). Nous avons :

$$\mathcal{T}_A^B = \mathcal{T}_A^{A_0} + \mathcal{T}_{A_0}^B = \mathcal{T}_A^{A_0} - \mathcal{T}_B^{A_0}$$

D'où : $\mathcal{T}_A^B = F(x_1, y_1, z_1, x_0, y_0, z_0) - F(x_2, y_2, z_2, x_0, y_0, z_0)$.

Si le point A_0 est toujours le même, x_0, y_0, z_0 sont des constantes et F ne dépend plus que de x, y, z. Nous pouvons écrire :

$$\mathcal{T}_A^B = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2). \qquad (1)$$

Quand un champ dérive d'un potentiel, le travail du champ pour aller de A en B est égal à la différence des valeurs prises par une même fonction $V(x, y, z)$ pour les valeurs (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) correspondant aux extrémités du déplacement.

La fonction V (x, y, z) s'appelle fonction potentiel ou plus simplement potentiel. V (x_1, y_1, z_1) est le potentiel en A, V (x_2, y_2, z_2) est le potentiel en B. La quantité V (x_1, y_1, z_1) — V (x_2, y_2, z_2) s'appelle *différence de potentiel* entre A et B.

La différence de potentiel qui, par définition, est égale au travail du champ, est une quantité bien déterminée. Au contraire, la fonction potentiel n'est déterminée qu'à une constante près ; elle dépend du point de référence A_0 (x_0, y_0, z_0) choisi. Pour définir complètement le potentiel, il suffit de se fixer sa valeur en un point.

Pour le champ électrique, nous prendrons comme zéro du potentiel, le potentiel des points à l'infini. Nous avons vu que dans ces conditions $V = \frac{1}{\varepsilon} \Sigma \frac{q}{r}$.

*54. — **Superposition de plusieurs champs admettant chacun un potentiel.*** — Considérons plusieurs champs de même espèce, par exemple des champs électriques, dérivant tous d'un potentiel. Soit H_1, H_2..., H_p leurs valeurs respectives en un point A et V_1, V_2..., V_p les valeurs au même point des potentiels d'où ils dérivent.

Evaluons le travail du champ total pendant un déplacement partant de A et arrivant au point A' où les potentiels sont V_1', V_2'..., V_p'.

Les travaux des différents champs sont, d'après la définition du potentiel :

$$\mathcal{C}_1 = V_1 - V_1' \qquad \mathcal{C}_2 = V_2 - V_2' \ldots\ldots \mathcal{C}_p = V_p - V_p'.$$

Le travail du champ résultant est égal à la somme algébrique des travaux des champs composants :

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \ldots + \mathcal{C}_p = (V_1 - V_1') + (V_2 - V_2') + \ldots + (V_p - V_p')$$
$$\mathcal{C} = (V_1 + V_2 + \ldots + V_p) - (V_1' + V_2' + \ldots + V_p').$$

Cette formule nous montre que :

1° *Le travail du champ résultant ne dépend que des points A et A', c'est-à-dire que ce champ dérive d'un potentiel* ;

2° *Le potentiel V en chaque point est la somme algébrique des potentiels des champs composants.*

*55. — **Relations entre le potentiel et le champ.*** — Considérons un point M situé dans un champ dérivant d'un potentiel. Au point M de coordonnées x, y, z par rapport à trois axes, le champ $\vec{H}$ a pour composantes H_x, H_y et H_z ; le potentiel a pour valeur V. En un point voisin M' $(x + dx, y + dy, z + dz)$ le potentiel a pour valeur V + dV.

Le travail du champ $\vec{H}$ dans le déplacement MM' a pour expression : $d\mathcal{C} = \vec{H} \times \vec{MM'}$ (1) $= H_x\,dx + H_y\,dy + H_z\,dz$.

(1) La notation $\vec{H} \times \vec{MM'}$ représente le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{MM'}$.

Par définition, ce travail est égal à la variation du potentiel :

$$d\mathcal{C} = V - (V + dV) = H_x\,dx + H_y\,dy + H_z\,dz.$$

$$d\mathcal{C} = -\,dV = H_x\,dx + H_y\,dy + H_z\,dz. \qquad (1)$$

Or, la fonction potentiel $V(x, y, z)$ admet pour différentielle totale

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz \qquad (2)$$

Par comparaison des relations (1) et (2), nous avons :

$$H_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad H_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad H_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

D'où le résultat important suivant :

Les composantes suivant trois axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, du vecteur champ $\vec{H}$ *en un point sont respectivement égales aux dérivées partielles du potentiel en ce point,* ***changées de signe.***

CONSÉQUENCES. — 1° Si nous effectuons un déplacement dans le sens du champ, le travail $d\mathcal{C}$ est positif. La variation dV du potentiel sera négative puisque $d\mathcal{C} = -\,dV$. Donc, *le sens du champ est le sens des potentiels décroissants.*

2° Pour qu'un champ dérive d'un potentiel, il faut et il suffit que les composantes H_x H_y H_z puissent être les dérivées partielles d'une fonction — V. Pour cela, nous devons avoir :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

3° Considérons un déplacement élémentaire $MM' = ds$. Décomposons le champ en deux vecteurs : l'un $\vec{H}_s$ dirigé suivant MM', l'autre $\vec{H}_t$ perpendiculaire. Dans ce déplacement, le travail de $\vec{H}_s$ est $H_s\,ds$ et le travail de $\vec{H}_t$, normal au déplacement, est nul. Le travail du champ $\vec{H}$ est donc égal à $H_s\,ds$. D'après la définition du potentiel, ce travail est aussi égal à $-\,dV$.

$$d\mathcal{C} = H_s\,ds = -\,dV.$$

$$\boxed{H_s = -\frac{dV}{ds}}$$

D'une façon générale, un champ est complètement défini si l'on connaît la valeur du potentiel en chaque point. Nous pouvons, en effet, calculer les composantes du champ et déduire toutes les propriétés de ce champ en chaque point.

56. — ***Surfaces équipotentielles.*** — On appelle ainsi toute surface pour laquelle le potentiel a la même valeur en tous les points. Toute surface équipotentielle est donc représentée par une équation de la forme :

$$V(x, y, z) = C^{te}.$$

On passe d'une surface équipotentielle à une autre en changeant la valeur de la constante.

La relation (1) du paragraphe 53 montre que le travail du champ pendant le transport de la masse unité d'un point A_1 à un autre point A_2 situé sur la même surface équipotentielle est nul. Si la trajectoire suivie est tout entière sur la surface équipotentielle considérée, le travail est nul tout le long de la trajectoire.

Si la trajectoire A_1A_2 est en dehors de la surface équipotentielle qui contient ses deux extrémités, on peut seulement affirmer que le travail *total* est nul : la somme des travaux positifs est égale en valeur absolue à la somme des travaux négatifs.

Les surfaces équipotentielles ont la propriété d'être normales en chacun de leurs points à la ligne de force qui passe par ce point et coïncident avec les surfaces de niveau. Démontrons cette propriété.

1° LES SURFACES ÉQUIPOTENTIELLES SONT DES SURFACES DE NIVEAU. — En effet, lorsque la masse unité parcourt une trajectoire quelconque située sur une surface équipotentielle, le travail ne peut être nul en chaque point que si la trajectoire est en chaque point normale à la direction du champ. Cette propriété étant vraie pour toutes les lignes tracées sur la surface, le champ est en chaque point normal à la surface ; la surface est donc une surface *de niveau.*

2° LES SURFACES DE NIVEAU SONT DES SURFACES ÉQUIPOTENTIELLES. — En effet, soit A_1 et A_2 deux points *quelconques* d'une surface de niveau. Transportons la masse unité de l'un à l'autre suivant une trajectoire située sur la surface ; le travail est nul puisque le déplacement est à chaque instant normal à la force ; les deux points A_1 et A_2 sont au même potentiel. Or A_1 et A_2 sont deux points quelconques de la surface de niveau considérée ; donc cette surface est *équipotentielle.*

57. — ***Application au champ électrique.*** — Nous avons montré (§ 52) que le champ électrique dérive d'un potentiel et nous avons vu, qu'en admettant un potentiel nul à l'infini, la fonction potentiel est :

$$V = \frac{1}{\varepsilon} \Sigma \frac{q}{r},$$

la somme étant étendue à toutes les charges.

D'après les définitions du potentiel et du champ, nous pouvons dire que le potentiel en un point A d'un champ électrique est le travail qui serait

accompli par les forces électriques agissant sur l'unité de charge positive *passive* si cette charge, placée en A, était transportée à une distance infinie par un chemin quelconque.

Nous pouvons dire aussi que *le potentiel est le travail qu'il faut fournir contre le champ pour apporter l'unité de charge positive de l'infini jusqu'au point considéré.*

Transportons la quantité d'électricité + 1 d'un point A où le potentiel est V_A en un point B où le potentiel est V_B. Par définition le travail du champ est numériquement égal à : $V_A - V_B$.

Transportons maintenant, suivant le même trajet, une quantité d'électricité de valeur algébrique q ; la force agissante est à chaque instant q fois plus grande que dans le cas précédent, il en est donc de même du travail dont l'expression est alors, en grandeur et signe :

$$\mathcal{T} = q(V_A - V_B). \qquad (1)$$

UNITÉS DE DIFFÉRENCE DE POTENTIEL. — Ces unités sont définies par la relation précédente : on doit avoir $V_A - V_B = 1$, en même temps que $q = 1$ et $\mathcal{T} = 1$.

On appelle donc ***unité électrostatique C. G. S. de différence de potentiel la différence de potentiel entre deux points tels que, pendant le transport de l'unité électrostatique C. G. S. de quantité d'électricité de l'un à l'autre, le champ accomplit un travail d'un erg.***

L'unité pratique de différence de potentiel, appelée ***volt***, (symbole V), ***est la différence de potentiel entre deux points tels que, pendant le transport d'un coulomb de l'un à l'autre, le champ accomplit un travail d'un joule.***

Appliquons à ce dernier cas la formule (1) en évaluant toutes les grandeurs en unités C. G. S. :

$$10^7 = 3 \times 10^9 \times x,$$

x étant la valeur numérique du volt en unités C. G. S. Nous en déduisons $x = \frac{1}{300}$: *le volt vaut* $\frac{1}{300}$ *unité électrostatique C. G. S. de différence de potentiel.*

L'équation de dimension de l'unité électrostatique C. G. S. de différence de potentiel est :

$$V = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

58. — ***Représentation des champs électriques.*** — Un champ électrique est complètement défini si l'on se fixe les composantes H_x, H_y, H_z du champ en chaque point ou si l'on connaît le potentiel en chaque point.

Pour représenter sur un plan la forme du champ électrique dans ce plan, nous dessinerons les lignes de force du champ et les traces des surfaces

équipotentielles correspondant à des valeurs *équidistantes* du potentiel : V_0, $V_0—V_1$, $V_0—2V_1$,....

Le champ en un point est $H = -\frac{dV}{ds}$. La variation dV a une valeur constante de chaque surface à la suivante ; par suite ds sera d'autant plus petit que H sera plus grand. *Le champ est d'autant plus intense que les surfaces équipotentielles sont plus rapprochées.*

Considérons maintenant les lignes de force. Comme le flux se conserve dans un tube de force, la section droite d'un tube est d'autant plus petite que le champ est plus intense. *Le champ est d'autant plus intense que les lignes de force sont plus serrées.*

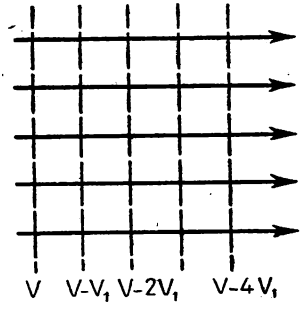


FIG. 42. — Champ uniforme.

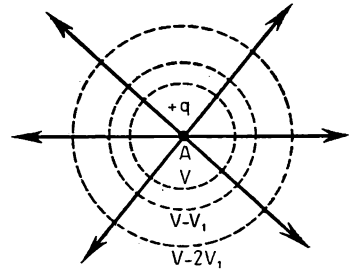


FIG. 43

Indiquons dans quelques cas particuliers, la représentation du champ électrique dans le vide.

1° CHAMP UNIFORME. — Le vecteur champ est constant en direction sens et grandeur. Les lignes de force sont des droites parallèles, les surfaces équipotentielles sont des plans équidistants. La représentation du champ a l'aspect indiqué par la figure 42.

2° CHAMP D'UNE MASSE UNIQUE. — Les lignes de force sont des droites passant par le point A où est concentrée la charge.

Les surfaces équipotentielles ont pour équation :

$$\frac{q}{r} = \text{Cte}, \qquad \text{d'où} \qquad r = \text{Cte}.$$

Ce sont des sphères. Le champ est représenté par la figure 43.

3° CHAMP DE DEUX MASSES ÉGALES ET DE NOMS CONTRAIRES. — Soit deux masses $+ q$ et $- q$ situées aux points A et A′ (fig. 44). Le potentiel en un point M a pour expression $V = \frac{q}{r} - \frac{q}{r'}$. L'équation générale des surfaces équipotentielles est :

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \text{Cte}.$$

Ce sont des surfaces de révolution autour de AA'. Au voisinage immédiat de l'un des points A ou A', ce sont pratiquement des sphères ayant pour centre A ou A'. Le champ est représenté par la figure 44.

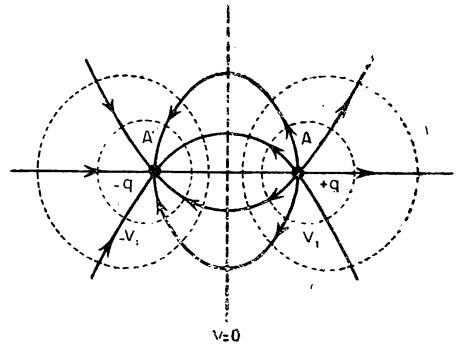


FIG. 44

4° CHAMP DE DEUX MASSES ÉGALES ET DE MÊME NOM. — Soit deux masses égales à $+ q$ situées en A et A' (fig. 45). Le potentiel en un point M a pour expression $V = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}$. L'équation générale des surfaces équipotentielles est $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} =$ Cte. Ce sont des surfaces de révolution autour de AA'. Le champ est représenté par la figure 45.

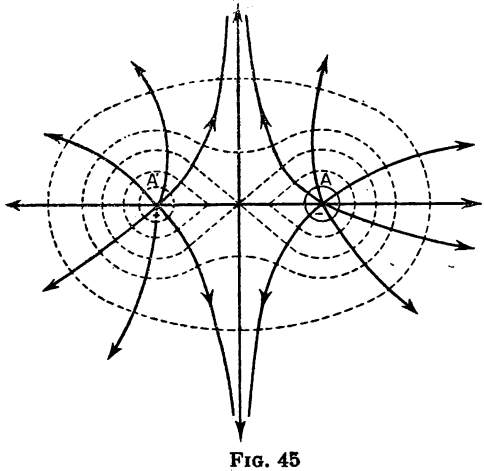


FIG. 45

Ces considérations doivent leur intérêt à la possibilité de réaliser matériellement, par une expérience facile, les lignes de force d'un champ électrique. L'ensemble de ces *lignes matérielles* constitue un *spectre électrique.*

Le spectre représenté par la figure 46 est obtenu de la manière suivante: sur une plaque de verre on colle deux feuilles d'étain A et B et on les charge d'électricités contraires en les mettant en communication avec les deux pôles d'une machine électrique. On saupoudre la plaque de petits bouts de crin qui s'électrisent par influence et se disposent, grâce aux forces électriques, suivant les lignes de force du plan des feuilles d'étain.

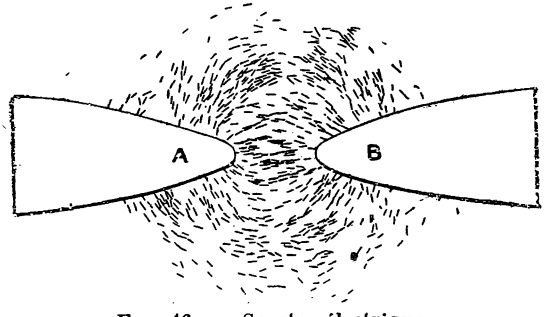


FIG. 46. — Spectre électrique.

59. — Un champ électrique ne peut avoir une direction uniforme sans avoir en même temps une intensité uniforme. — Considérons

d'abord deux points A et A′ situés sur une même ligne de force (fig. 47) ; soit H et H′ les intensités du champ en ces points. Les surfaces de niveau sont des plans parallèles. Les tubes de force sont des cylindres perpendiculaires à ces plans qui y déterminent des sections d'aires égales ($S' = S$).

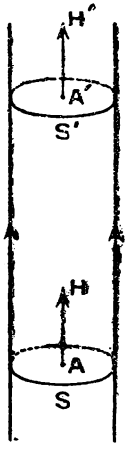


FIG. 47

Le théorème de la conservation du flux dans un tube de force (§ 51) donne :

$$\Phi' = \Phi,$$

ou :

$$HS = H'S,$$

d'où :

$$H = H'.$$

Considérons maintenant deux points A et B (fig. 48) situés sur une même surface de niveau plane correspondant au potentiel V. La surface de niveau correspondant au potentiel $V + \Delta V$ est un plan parallèle au précédent situé à la distance uniforme Δr.

La formule du paragraphe 55 :

$$H = -\frac{\Delta V}{\Delta r},$$

montre que les intensités du champ en A et en B sont égales, puisque ΔV et Δr ont les mêmes valeurs en ces deux points.

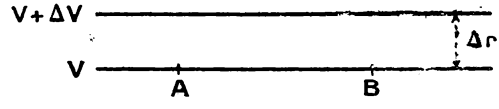


FIG. 48

En définitive, aux deux points *quelconques* A et B, le champ possède la même intensité.

Exercices.

12. Un fil indéfini d'épaisseur négligeable est chargé uniformément d'électricité. La densité par unité de longueur est λ. Calculer le champ à la distance a du fil.

Réponse : $H = \frac{2\lambda}{a}$.

13. Dans un champ électrique uniforme d'intensité H, on place en un point O où le potentiel du champ est V_0, un doublet électrique de moment μ — (c'est un système de deux charges $+q$ et $-q$ placées à une très petite distance l et telles que $ql = \mu$). L'axe de ce doublet est parallèle au champ H et de même sens.

α) Trouver le potentiel en un point quelconque A. Montrer que le potentiel reste constant sur une certaine sphère de rayon R ayant son centre en O. Trouver la relation entre R, H et μ.

β) Trouver les expressions des composantes du champ résultant h en A suivant le rayon OA et suivant la perpendiculaire à ce rayon.

Réponse : α) $v = \cos\theta\left(\frac{\mu}{r^2} - Hr\right) + V_0$; $\mu = HR^3$

β) $h_r = \frac{2\mu\cos\theta}{r^3} + H\cos\theta$; $h_t = \frac{\mu\sin\theta}{r^3} - H\sin\theta$

(*Ecole Normale Supérieure* 1939, 3e *partie*, 1° *et* 2°.)

CHAPITRE VII

ÉQUILIBRE D'UN CONDUCTEUR UNIQUE ISOLÉ

I. — DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ

60. — Définition d'un conducteur. — Nous avons défini précédemment (§ 25) un conducteur : c'est un corps tel que l'électricité développée en un point se transmet à tous les points du corps. Précisons cette définition afin de la rendre susceptible d'une traduction mathématique.

L'électricité pouvant se déplacer dans un conducteur, c'est qu'aucune force ne s'oppose au mouvement. Cela ne veut pas dire que le déplacement de l'électricité dans le conducteur s'effectue sans que des forces, analogues aux forces de frottement dans les liquides, s'y opposent. Au contraire, ce frottement existe et se manifeste, dans le cas d'un courant électrique, par un dégagement de chaleur. Cela veut dire seulement qu'une force même très faible suffit pour déplacer une charge électrique dans un conducteur. Donc :

Un conducteur sera, par définition, un corps tel qu'une charge électrique ne peut être en équilibre en l'un de ses points que si elle n'est soumise à aucune force qui tende à la déplacer.

61. — Sur un conducteur en équilibre électrique, éloigné de tout autre corps, l'électricité est localisée à la surface extérieure. — Dans les diélectriques, l'électricité reste là où elle est produite. On ne peut s'attendre à trouver aucune loi générale concernant sa distribution. Il n'en est plus de même dans les conducteurs où l'électricité se déplace librement. La loi de distribution est la suivante :

Dans un conducteur, assez éloigné des autres corps pour que ceux-ci n'interviennent pas, toute l'électricité est localisée sur la surface extérieure.

Cette importante propriété est établie par les expériences suivantes :

PREMIÈRE EXPÉRIENCE. — Prenons une sphère creuse C montée sur un support isolant (fig. 49) et possédant une petite ouverture O par laquelle on peut introduire un *plan d'épreuve* P constitué par un petit disque métallique porté à l'extrémité d'une tige isolante T. Electrisons la sphère C.

Appliquons le disque contre la surface *intérieure* de la sphère, retirons-le en ayant soin de ne pas toucher les bords de l'orifice puis faisons-le agir sur un électroscope sensible : nous constatons qu'il n'est pas électrisé. La surface de la cavité intérieure ne portait donc pas d'électricité.

Faisons ensuite une expérience analogue en touchant avec le plan d'épreuve la surface *extérieure* du conducteur ; nous constatons que celle-ci est électrisée.

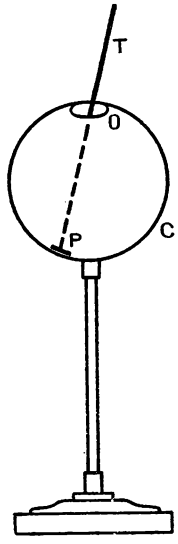


FIG. 49

Cette expérience a été réalisée par Cavendish avec une grande précision sous la forme suivante :

Prenons une sphère conductrice creuse S isolée ayant un orifice BC qui peut être fermé par un bouchon conducteur A auquel est suspendu, par un fil *isolant*, un petit conducteur S′ (fig. 50).

Chargeons le conducteur S′ puis introduisons-le dans la cavité de la sphère S et appliquons le bouchon A dans l'orifice BC. Inclinons alors l'appareil de façon à établir le contact entre S et S′. Puis redressons l'appareil de manière à supprimer le contact. A l'aide d'un crochet *isolant*, enlevons le bouchon et le conducteur S′, en ayant soin que celui-ci ne touche pas les bords de l'orifice BC. Déchargeons le bouchon A en le touchant avec le doigt, mais sans toucher S′. Nous constatons ensuite avec un électromètre très sensible que S′ ne porte plus aucune charge.

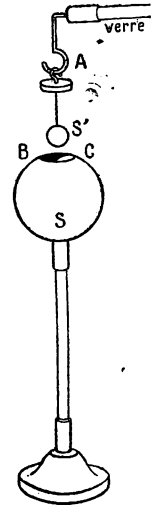


FIG. 50

La précision de cette expérience de Cavendish peut atteindre $\frac{1}{2000}$ c'est-à-dire que la charge conservée par S′ après son contact avec S est certainement inférieure à $\frac{1}{2000}$ de sa valeur primitive.

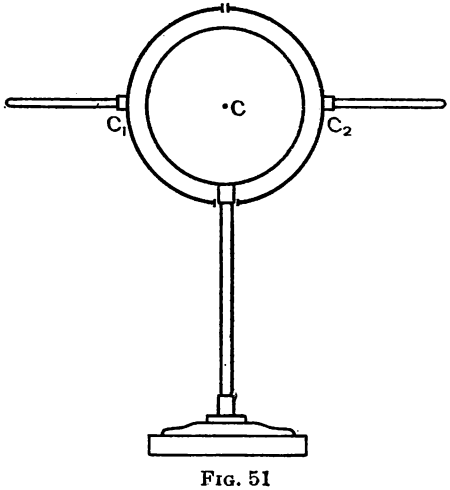


FIG. 51

Nous verrons (§ 65) que cette expérience constitue une vérification indirecte précise de la loi de Coulomb.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE. — Un conducteur sphérique C électrisé est porté par un pied isolant (fig. 51). Deux hémisphères creux C_1 et C_2 de rayon un peu plus grand sont tenus à la main à l'aide de manches isolants. Ils ne sont pas électrisés. On les réunit autour de C ; on établit le contact de l'ensemble avec C ; on supprime ce contact, puis on sépare les deux hémisphères.

On constate que les hémisphères sont maintenant électrisés et que la

sphère C ne l'est plus. Au moment du contact des deux sphères, l'électricité de la sphère intérieure s'est portée sur la surface extérieure de l'ensemble, c'est-à-dire sur les hémisphères.

Nous trouvons là un procédé général pour faire passer *toute la charge* d'un conducteur C sur un autre conducteur C'. Il suffit de mettre en contact C avec la paroi d'une cavité pratiquée dans l'intérieur de C'. Un contact *extérieur* ne conduirait qu'à un partage de la charge totale entre les surfaces des deux conducteurs.

TROISIÈME EXPÉRIENCE. — Les expériences classiques qui viennent d'être décrites, montrent seulement l'absence d'électricité sur les faces des cavités intérieures. Elles ne donnent aucun renseignement sur l'intérieur des masses métalliques.

L'absence *totale* d'électricité à l'intérieur d'une masse conductrice électrisée est établie par l'expérience suivante :

Prenons deux sphères métalliques de même rayon, par conséquent ayant des surfaces extérieures identiques, mais différant autant qu'on le voudra comme structure intérieure. L'une pourra par exemple être formée simplement d'une mince couche de métal, et l'autre pourra être pleine, ou posséder des cavités quelconques. Mettons les deux sphères en contact, loin de tout autre corps, et communiquons à l'ensemble une certaine quantité d'électricité, puis séparons-les. En appliquant la méthode indiquée au paragraphe 34, nous constatons que, *dans tous les cas*, les deux sphères ont pris des quantités d'électricité égales. La généralité de ce résultat exclut évidemment toute possibilité de distribution interne.

62. — Etude expérimentale de la répartition de l'électricité sur un conducteur. — Toute la charge d'un conducteur est répartie sur sa surface extérieure, mais cette distribution n'est pas nécessairement uniforme. Pour déterminer cette répartition, il suffit de mesurer les valeurs relatives des densités superficielles (§ 43) aux différents points. Pour cela nous utiliserons la **méthode du plan d'épreuve.**

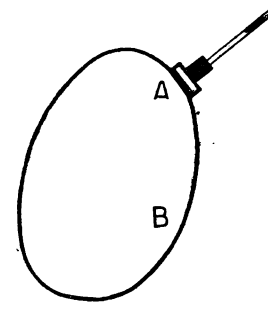


FIG. 52. — Plan d'épreuve.

Le plan d'épreuve est un petit disque métallique de faible épaisseur et d'environ un centimètre de diamètre tenu par un manche isolant. Appliquons le disque au point A (fig. 52) tangentiellement au conducteur. L'ensemble du conducteur et du disque constitue un conducteur unique dont toutes les charges seront sur la surface. Le disque se substitue à l'élément de surface qu'il recouvre et la charge de cet élément passe tout entière à l'extérieur, c'est-à-dire sur la surface supérieure du disque. Retirons le disque *bien normalement*, l'expérience montre qu'il emporte avec lui sa charge.

Pour comparer les densités superficielles en deux points A et B de la sur-

face d'un conducteur, nous appliquerons le plan d'épreuve en A puis en B. A chaque fois, nous retirerons le disque normalement au conducteur et nous le porterons dans un cylindre de Faraday posé sur un électromètre étalonné (§ 34). Le rapport des charges prises par le plan d'épreuve est égal au rapport des densités superficielles en A et B.

Le résultat obtenu serait correct si le corps conducteur électrisé étudié conservait une charge constante. Or, à chaque mesure avec le plan d'épreuve, nous enlevons un peu de la charge totale. De plus l'isolement du conducteur n'est jamais parfait et il y a des pertes d'électricité par l'air et par les supports. Pour éliminer ces causes d'erreur, nous utiliserons la *méthode des contacts alternés* indiquée par Coulomb.

Pour comparer les densités en A et B, on fait trois mesures : on détermine la densité σ_1 en A, puis la densité σ_2 en B, puis de nouveau la densité σ_1' en A. On admet qu'au moment où la densité en B était σ_2, celle en A était $\frac{\sigma_1 + \sigma_1'}{2}$.

63. — ***Résultats.*** — Les mesures des densités superficielles permettent d'énoncer les résultats généraux suivants :

1° *Le rapport des densités superficielles en deux points A et B est indépendant de la charge totale* ;

2° *Pour une charge totale donnée, il n'y a qu'un seul état d'équilibre* ;

3° *La superposition sur un même conducteur de plusieurs états d'équilibre constitue un nouvel état d'équilibre*, c'est-à-dire que, si pour les équilibres successifs correspondant aux charges totales Q_1, Q_2, Q_3 les densités superficielles en un point A sont respectivement σ_1, σ_2, σ_3 ; quand la charge totale du conducteur sera $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$, la densité superficielle en A à l'équilibre sera $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$.

4° *La densité superficielle est très petite sur les parties*

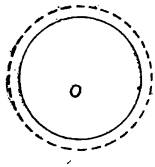


FIG. 53

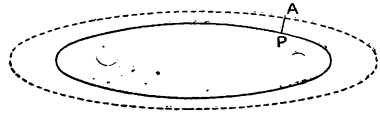


FIG. 54

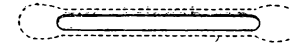


FIG. 55

rentrantes et très grande au contraire sur les parties saillantes ou aiguës.

FIG. 56

Pour représenter comment se répartit la charge sur la surface d'un conducteur, il est commode d'utiliser la représentation graphique suivante :

On porte sur la normale à la surface du conducteur en chaque point une longueur proportionnelle à la densité correspondante. Les extrémités de tous ces segments définissent une surface qui nous renseigne sur la distribution de l'électricité sur le conducteur. *Le volume compris entre celle surface et le conducteur s'appelle la* ***couche d'équilibre.*** Les figures

53, 54, 55 et 56 représentent les couches d'équilibre observées sur une sphère, un ellipsoïde allongé, un disque circulaire à bords arrondis et un cylindre de Faraday.

II. — CHAMP ÉLECTRIQUE

*64. — **Champ à l'intérieur d'une cavité creusée dans un conducteur.*** — Prenons un électroscope à feuilles d'or et recouvrons la boule de son enveloppe conductrice B (fig. 57). Nous réalisons ainsi un conducteur dont la surface extérieure est constituée par la cage de l'électroscope et l'enveloppe B. Mettons en communication cette enveloppe avec une machine électrique, nous constatons qu'aucune action ne se manifeste à l'intérieur de la cage, les feuilles restent verticales. *Le champ y est donc nul.*

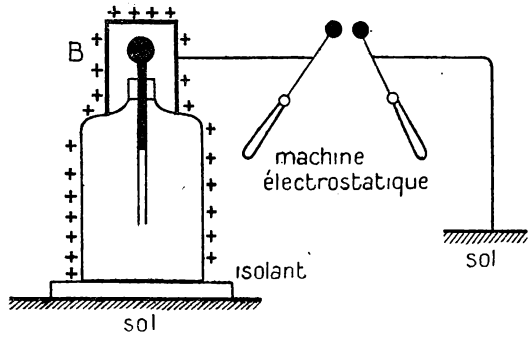


FIG. 57

Cette propriété est générale : *Le champ électrique est nul à l'intérieur d'une cavité creusée dans un conducteur électrisé en équilibre.*

Cette propriété du conducteur creux avait été établie par Faraday de la manière suivante : Faraday avait fait construire une chambre à parois conductrices reposant sur des pieds isolants. Il s'enferma à l'intérieur avec des électroscopes sensibles. La chambre étant fortement chargée, il constata qu'il ne pouvait observer aucune électrisation sur la surface intérieure des parois, ni déceler le moindre champ intérieur. Les électroscopes ne subissaient aucune action.

*65. — **Champ à l'intérieur d'un conducteur électrisé.*** — Considérons un point A situé à l'intérieur et dans la masse d'un conducteur électrisé C (fig. 58). Pour mettre en évidence le champ en A, s'il existe, il faudrait placer en A une masse électrique. Or ceci est impossible expérimentalement. Il faut faire une cavité pour atteindre A.

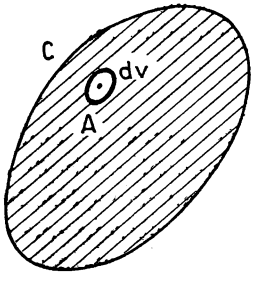


FIG. 58

Pour définir le champ en A, nous opérerons de la manière suivante : considérons une petite cavité de volume *dv* entourant le point A et soit H le champ électrique au point A dans la cavité. Nous appellerons champ au point A, la limite de H lorsque le volume *dv* de la cavité tend vers zéro. Pour que cette définition ait un sens, il suffit que

H ait une limite et que celle-ci soit constante et indépendante de la manière dont *dv* tend vers zéro.

Nous avons vu au paragraphe précédent qu'à l'intérieur d'une cavité de forme quelconque creusée dans un conducteur, le champ est nul. Donc $H = 0$ quel que soit *dv* et par suite la limite de H quand *dv* tend vers zéro est nulle. Donc :

Le champ électrique est nul en tout point pris dans la masse d'un conducteur électrisé en équilibre.

CONSÉQUENCES. — 1° Le champ électrique est nul en tout point pris à l'intérieur d'un conducteur soit dans la masse, soit dans une cavité intérieure. Par suite *un conducteur creux se comportera comme le conducteur plein qui aurait même surface extérieure.*

2° Le travail du champ électrique, quand on passe d'un point A à un autre B à l'intérieur d'un conducteur, est nul puisque le champ est nul en chaque point. La variation de potentiel $V_A - V_B = 0$, d'où $V_A = V_B$. *Le potentiel est le même en tous les points d'un conducteur.*

En particulier, la surface du conducteur sera une surface équipotentielle, c'est-à-dire une surface de niveau (§ 56). *Les lignes de forces sont donc normales à la surface du conducteur.*

3° Prenons une surface fermée quelconque tracée tout entière à l'intérieur du conducteur et limitant un volume infiniment petit. Le champ est nul en chaque point de la surface, donc le flux total qui sort de cette surface est nul. D'après le théorème de Gauss, il n'y a donc aucune charge à l'intérieur ou sur la surface de cet élément de volume. Ceci étant vrai pour tous les éléments de volume, *il n'y a donc aucune charge électrique à l'intérieur d'un conducteur*, que celui-ci soit plein ou possède des cavités. Réciproquement, l'absence de charges intérieures impose un champ nul en tout point intérieur.

C'est ce fait qui a été vérifié avec précision par Cavendish (§ 61) sur la cavité intérieure d'une sphère creuse électrisée. Or, par raison de symétrie, les masses électriques se répartissent uniformément à la surface de la sphère et constituent une couche sphérique *uniforme*. L'absence de charges intérieures a pour conséquence un champ nul en tous les points. Mais nous avons vu que, pour qu'il en soit ainsi, il fallait que la loi des attractions soit celle de Coulomb (§ 45). Donc l'expérience de Cavendish constitue une vérification indirecte de la loi de Coulomb.

66. — ***Champ au voisinage d'un conducteur électrisé.*** — Soit à calculer le champ électrique en un point A (fig. 59) infiniment voisin de la surface d'un conducteur. Entourons ce point A d'un élément de surface BC parallèle à la surface du conducteur et d'aire *d*S. Nous supposerons que la distance du point A au conducteur est infiniment petite vis-à-vis des dimensions de BC. Le tube de force s'appuyant sur le contour de BC est normal à la surface du conducteur (§ 65) et découpe sur cette surface un élément B'C' d'aire égale à *d*S.

Considérons une surface fermée Σ formée par l'élément de surface BC, la surface latérale du tube de force BCB'C' et une surface quelconque B'MC' tracée dans la masse conductrice. Calculons le flux sortant de cette surface Σ, l'emplacement du conducteur étant supposé rempli d'une substance ayant même pouvoir inducteur spécifique ε que le milieu ambiant.

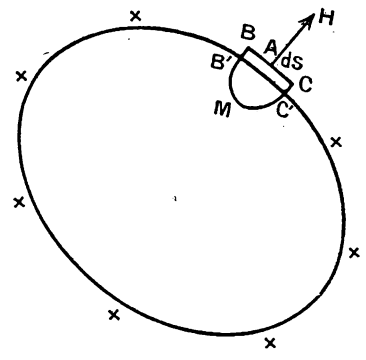


FIG. 59

1° Appliquons le théorème de Gauss. Les seules charges électriques contenues à l'intérieur de cette surface Σ sont celles qui recouvrent l'élément de surface B'C'. Si σ est la densité superficielle sur l'élément B'C' d'aire dS, la charge portée par B'C' est $dq = \sigma\, dS$ et le flux sortant est égal à :

$$d\Phi = \frac{4\pi}{\varepsilon}\,\sigma\, dS.$$

2° Calculons directement ce flux. Le flux sortant par la portion B'MC' est nul puisque le champ est nul en tout point intérieur à un conducteur. Le flux sortant par la surface latérale du tube de force BCB'C' est nul puisque, en chaque point de cette surface, le champ est tangent à la surface. Enfin le flux sortant par l'élément BC est égal à HdS puisque le champ est normal à B'C', donc à la surface parallèle BC. Par suite le flux total sortant de Σ se réduit à $d\Phi = H\,dS$.

Egalons les deux expressions trouvées, nous obtenons :

$$H\,dS = \frac{4\pi}{\varepsilon}\,\sigma\, dS.$$

d'où :

$$\boxed{H = \frac{4\pi}{\varepsilon}\,\sigma}$$

Ce résultat constitue le théorème de Coulomb.

THÉORÈME DE COULOMB. — **L'intensité du champ électrique au voisinage d'un conducteur électrisé en équilibre, est égale à** $\frac{4\pi}{\varepsilon}\,\sigma$, en appelant σ la densité superficielle sur la surface du conducteur au voisinage du point considéré et ε le pouvoir inducteur spécifique du milieu où se trouve le conducteur.

REMARQUE. — La formule précédente montre que H et σ sont de même signe, H étant positif dans le sens qui s'éloigne du conducteur. Donc, au voisinage d'une région chargée d'électricité positive *partent* des lignes de force et au voisinage d'une région chargée d'électricité négative *arrivent* des lignes de force.

67. — Pression électrostatique. — Considérons un conducteur en

équilibre et un élément de surface BC d'aire ΔS pris sur la surface du conducteur. La quantité d'électricité qui recouvre l'élément BC est soumise de la part de toutes les *autres* charges à une force Δf. Cette force est nécessairement une répulsion puisque les charges agissantes et les charges passives situées sur BC sont de même nature. De plus, elle est normale au conducteur sinon elle aurait une composante tangentielle qui déplacerait les charges et il n'y aurait pas d'équilibre. Donc la force Δf est normale à l'élément BC et dirigée vers l'extérieur.

On appelle pression électrostatique au point A centre de l'élément BC, la limite du rapport $\frac{\Delta f}{\Delta S}$ quand ΔS tend vers zéro. La formule de définition est donc :

$$p = \lim \frac{\Delta f}{\Delta S} = \frac{df}{dS}.$$

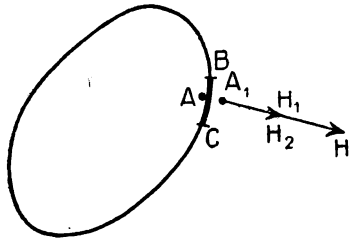


FIG. 60

Calculons la pression électrostatique en un point A d'un conducteur électrisé en équilibre (fig. 60). Considérons un élément ΔS autour du point A. Il porte une charge $\sigma\,\Delta S$, σ étant la densité superficielle au point A. Soit A_1 un point extérieur au conducteur et infiniment voisin de A. Le champ en A_1 dû à *toutes* les charges réparties sur le conducteur est, d'après le théorème de Coulomb, $H = \frac{4\pi}{\varepsilon}\sigma$. Ce champ est la résultante du champ H_1 produit par les charges situées sur l'élément BC et du champ H_2 produit par toutes les autres charges. Or le champ H_1 produit par BC au point A_1 infiniment voisin est (§ 44) : $H_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon}\,\Omega = \frac{2\pi}{\varepsilon}\sigma$ et il est normal à BC. Le champ H_2 est donc aussi normal à BC et égal à $H - H_1$.

$$H_2 = H - H_1 = \frac{4\pi}{\varepsilon}\sigma - \frac{2\pi}{\varepsilon}\sigma,$$

$$H_2 = \frac{2\pi}{\varepsilon}\sigma.$$

La force exercée par ce champ sur les charges $\sigma\,\Delta S$ qui recouvrent BC est

$$\Delta f = H_2 \times \sigma\,\Delta S = \frac{2\pi}{\varepsilon}\sigma^2\,\Delta S.$$

La pression électrostatique en A sera donc :

$$p = \lim \frac{\Delta f}{\Delta S} = \frac{2\pi}{\varepsilon}\sigma^2.$$

$$\boxed{p = \frac{2\pi}{\varepsilon}\sigma^2}$$

La pression électrostatique en un point de la surface d'un conducteur électrisé en équilibre ne dépend que de la densité superficielle en ce point. Elle est proportionnelle au carré de cette densité σ et dirigée vers l'extérieur du conducteur.

68. — ***Pouvoir des pointes.*** — L'expérience montre qu'il est impossible de conserver électrisé un conducteur terminé par une pointe. De plus, si le conducteur est en communication avec une source électrique qui lui restitue d'une manière continue les charges perdues, il se produit un mouvement d'air au voisinage de la pointe appelé *vent électrique.*

Par exemple, relions un conducteur terminé par une pointe (fig. 61) à une source électrique. Si on approche une bougie allumée de la pointe, la flamme s'incline et le vent peut être suffisant pour souffler la bougie. Si le conducteur à pointe est mobile, il se déplacera en sens contraire du vent. C'est ce qui se produit dans le *tourniquet électrique* (fig. 62).

Ces résultats peuvent s'interpréter à partir des résultats précédents. Une pointe peut être considérée comme l'extrémité du grand axe d'un ellipsoïde infiniment allongé. La densité électrique σ y est donc très grande et par suite le champ $H = \frac{4\pi}{\varepsilon}\sigma$, au voisinage de la pointe, est très intense.

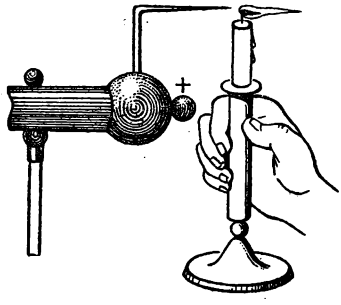


FIG. 61

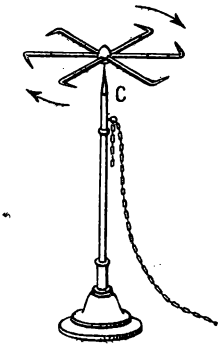


FIG. 62

Or l'air soumis à un champ intense s'ionise. Il se produit, en nombre égal, des particules chargées les unes positivement, les autres négativement et qu'on appelle des *ions.* Les ions chargés de signe contraire à la charge de la pointe sont attirés par elle et la déchargent. Les ions de même signe sont repoussés et se repoussent mutuellement en provoquant un mouvement d'air qui est le vent électrique.

Enfin, signalons que l'écoulement de l'électricité par une pointe donne lieu à des phénomènes lumineux visibles dans l'obscurité et d'aspects différents suivant la nature de l'électricité qui s'échappe : aigrette dans le cas de l'électricité positive, point brillant dans le cas de l'électricité négative.

69. — ***Interprétation électronique des propriétés des conducteurs.*** — Nous avons défini le conducteur comme un corps où les électrons peuvent se déplacer librement, c'est-à-dire qu'une force quelconque, même très faible, provoque leur déplacement. A l'état neutre, chaque élément de volume du conducteur peut être considéré comme possédant des électrons et des restes positifs qui annulent l'action des électrons.

Electrisons le conducteur négativement. Nous lui apportons un excès d'é-

lectrons. Prenons un élément de volume intérieur, il contient encore des électrons et des restes positifs. Ceux-ci attirent les électrons, mais à cause de la symétrie de ces attractions, due à ce que les restes positifs sont répartis dans toutes les directions autour de chaque électron, l'effet *moyen* sera nul. En moyenne tout se passe comme si l'électron était libre. Comme il ne se déplace pas, c'est qu'il n'est soumis à aucune force. *Le champ est donc nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre.*

D'après le théorème de Gauss, si le champ est nul c'est que chaque élément de volume intérieur possède une charge totale nulle (§ 65). Les électrons *en excès* qui constituent la charge négative du conducteur ne peuvent être à l'intérieur. Ils se répartissent donc sur la surface du conducteur :

La charge d'un conducteur en équilibre est entièrement répartie sur sa surface. Cette répartition est telle que le champ à l'intérieur soit nul.

70. — Rappel des principes fondamentaux de l'électrostatique. — Nous avons été amené, dans les chapitres précédents, à énoncer certains principes fondamentaux qui sont à la base de l'électrostatique et que nous allons rappeler. Tous ces principes sont justifiés par les vérifications expérimentales de leurs conséquences.

1er PRINCIPE. — Il peut s'exprimer soit par la loi de Coulomb, soit par le théorème de Gauss. Nous l'énoncerons ainsi :

La force qui s'exerce entre deux charges électriques ponctuelles q *et* q' *est proportionnelle aux charges* q *et* q' *et inversement proportionnelle au carré de la distance entre les charges.*

2e PRINCIPE. — Il permet de calculer l'effet produit par une répartition électrique, par application de la loi de Coulomb :

Les forces exercées par deux corps électrisés l'un sur l'autre sont les résultantes de toutes les forces élémentaires exercées les unes sur les autres par les charges électriques réparties sur les deux corps. Ces forces élémentaires se calculent par la loi de Coulomb.

3e PRINCIPE. — C'est le principe de la conservation de l'électricité.

Dans tout système **isolé**, *la somme algébrique des quantités d'électricité est constante.*

4e PRINCIPE. — C'est le principe qui résulte de la définition du conducteur. On peut l'énoncer ainsi :

La charge d'un conducteur en équilibre est uniquement superficielle et sa répartition est telle que le champ en tout point intérieur soit nul.

III. — POTENTIEL ET ÉNERGIE

71. — Potentiel d'un conducteur. — Nous avons montré (§ 65) qu'en tous les points d'un conducteur, le potentiel avait la même valeur. C'est cette valeur du potentiel en un point quelconque du conducteur que nous

appellerons *potentiel du conducteur*. Ce potentiel est complètement défini, car nous avons décidé (§ 52) de prendre pour potentiel zéro celui d'un point à l'infini.

La terre est un conducteur, donc le potentiel est le même en tous ses points. Certains de ces points sont très éloignés et peuvent *pratiquement* être considérés comme à l'infini. D'après notre convention, leur potentiel est égal à zéro. Pratiquement **le potentiel zéro est le potentiel du sol.**

Prenons un conducteur isolé chargé positivement. Mettons-le au sol. L'électricité positive s'en va dans le sol. Comme elle se déplace dans le sens du champ, c'est-à-dire dans le sens des potentiels décroissants (§ 55), c'est que le potentiel du conducteur était supérieur à celui du sol, donc *positif*.

Prenons un conducteur isolé chargé négativement. Si on le met au sol, l'électricité négative s'en va dans le sol. Comme elle se déplace en sens contraire du champ, c'est-à-dire dans le sens des potentiels croissants, c'est que le potentiel du conducteur était inférieur à celui du sol, donc *négatif*. Par suite :

Le potentiel d'un conducteur unique, éloigné de tout autre corps, sera toujours du même signe que sa charge.

72. — Capacité d'un conducteur éloigné de tout autre corps. — Considérons un conducteur isolé unique portant la charge q ; son potentiel est v. Nous avons vu (§ 63) que la superposition, sur un même conducteur, de plusieurs états d'équilibre constitue un nouvel état d'équilibre. Par suite si nous superposons n états d'équilibre identiques au premier, on a un état d'équilibre, la charge étant $Q = nq$ et le potentiel étant $V = nv$. On a donc :

$$\frac{Q}{V} = \frac{q}{v} = C^{te}.$$

Lorsqu'un conducteur est éloigné de tout autre corps, il existe un rapport constant entre sa charge et son potentiel.

Nous avons : $\frac{Q}{V} = C$, C étant une constante caractéristique du conducteur qu'on appelle la **capacité** du conducteur éloigné de tout autre corps. Cette capacité dépend de la forme et des dimensions du conducteur.

Cas particulier d'un conducteur sphérique. — Le potentiel a la même valeur en tous les points d'un conducteur en équilibre. Calculons cette valeur *au centre* du conducteur sphérique. Dans la formule :

$$V = \Sigma \frac{q}{r},$$

les dénominateurs ont alors tous une même valeur, celle du rayon R de la sphère.

Donc :

$$V = \frac{\Sigma q}{R} = \frac{Q}{R},$$

en appelant Q la charge totale de la sphère.

Comparons ce résultat à la relation $Q = CV$, nous trouvons :

$$C = R ;$$

La capacité d'une sphère conductrice éloignée de tout autre corps, a la même valeur numérique que son rayon.

Dans le système *électrostatique C. G. S.*, l'unité de capacité a bien la même équation de dimension que l'unité de longueur. Nous avons en effet trouvé aux paragraphes 39 et 57 :

$$Q = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

et :

$$V = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

d'où :

$$C = \frac{Q}{V} = L.$$

73. — ***Unités de capacité.*** — Nous aurons : $C = 1$, si nous avons en même temps : $Q = 1$ et $V = 1$. Donc : *l'unité électrostatique C. G. S. de capacité est la capacité d'un conducteur qui, éloigné de tout autre corps, possède une charge égale à l'unité électrostatique C. G. S. lorsqu'il est à un potentiel égal à l'unité électrostatique C. G. S.*

D'après ce que nous venons d'établir, *cette unité est la capacité d'une sphère conductrice d'un centimètre de rayon et éloignée de tout autre corps.*

Dans le système d'*unités pratiques*, l'unité de capacité s'appelle ***farad*** (symbole F) : *c'est la capacité d'un conducteur qui, éloigné de tout autre corps, possède une charge d'**un coulomb** lorsqu'il est à un potentiel d'**un volt**.*

VALEUR DU FARAD EN UNITÉS *C. G. S.* — Prenons un conducteur ayant une capacité d'un *farad* ; supposons qu'il ait une charge d'un coulomb et par suite un potentiel d'un volt ; appliquons-lui la formule :

$$Q = CV,$$

en évaluant toutes les grandeurs en unités C. G. S. ; soit x la valeur numérique du farad en unités C. G. S. Nous avons, d'après les paragraphes 39 et 57 :

$$3 \times 10^9 = x \times \frac{1}{300},$$

d'où :

$$x = 9 \times 10^{11}.$$

Ce serait la capacité d'une sphère conductrice ayant un rayon de : 9×10^{11} centimètres, c'est-à-dire : 9 millions de kilomètres, et éloignée de tout autre corps. Une telle capacité est beaucoup plus grande que toutes celles dont on s'occupe en pratique. Aussi emploie-t-on le plus souvent comme unité le millionième de farad, ou **microfarad** (μF) ; il vaut : 9×10^5 unités C. G. S.

Cette capacité, qui serait celle d'une sphère de 9 kilomètres de rayon, est encore beaucoup plus grande que celle des conducteurs usuels pris seuls ; mais nous verrons qu'on sait réaliser, sous le nom de *condensateurs*, des groupes de conducteurs qui, sous des dimensions acceptables, ont des capacités d'un tel ordre de grandeur.

74. — ***Mesure du potentiel d'un conducteur.*** — Prenons un conducteur électrisé S en équilibre. Mettons-le en communication par un fil **long** et **fin** avec un pendule électrique double (fig. 63), les boules étant suspendues par des fils *conducteurs*. L'ensemble du conducteur S, du fil de communication et du pendule double constitue un conducteur unique. Le potentiel est le même en tous les points. Les boules A et B du pendule prennent des charges qui, *comme on est très loin de S*, sont proportionnelles à leur potentiel. Ces boules se repoussent avec une force proportionnelle au produit de leurs charges, c'est-à-dire proportionnelle au produit de leurs potentiels qui sont égaux. La force répulsive et, par suite, l'écart des boules A et B à l'équilibre sont proportionnels au carré du potentiel. Nous pouvons d'ailleurs remplacer le double pendule par un électroscope à feuilles qui sera plus sensible. La cage sera mise au sol. *Un électroscope en communication lointaine par un fil long et fin avec un conducteur permet de mesurer le potentiel de ce conducteur.* Il suffira d'étalonner l'appareil.

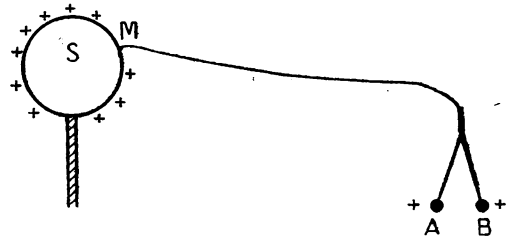


FIG. 63. — Mesure du potentiel.

Il résulte de tout ce qui précède que l'écart des feuilles d'un électroscope en communication lointaine avec un conducteur ne doit pas dépendre du point M où le fil de communication prend contact sur le conducteur. Ce résultat se vérifie expérimentalement : l'écart des feuilles est indépendant du point touché.

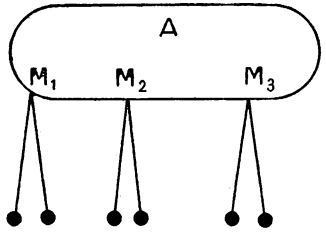


FIG. 64

75. — ***Remarques sur les indications des pendules électriques.*** — Prenons un conducteur A (fig. 64) électrisé. Suspendons à différents points M_1, M_2, M_3 de ce conducteur de *longs* pendules doubles à fils conducteurs. Ils jouent alors le rôle d'électroscopes et indiquent le

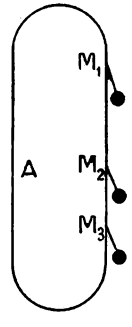


FIG. 65

potentiel du conducteur. Leur écartement est donc le même pour tous, s'ils sont identiques : il ne peut nous renseigner sur la répartition des charges électriques.

Prenons maintenant le conducteur A vertical et attachons aux points M_1, M_2, M_3 de petits pendules à fils *isolants*. Quand le corps A n'est pas chargé, les pendules pendent le long de la surface (fig. 65). Quand le corps A est chargé, chaque pendule prend une partie de la charge du point du conducteur où il le touche et il est repoussé. *L'écart du pendule est approximativement proportionnel au carré de la densité superficielle σ au point de contact initial.*

Enfin, si l'on utilise des pendules doubles *courts*, leurs écarts dépendent à la fois du potentiel et de la densité au voisinage du point d'attache. Leurs indications n'ont donc aucun intérêt puisqu'elles ne peuvent s'interpréter quantitativement.

En résumé, si l'on désire étudier la répartition des charges sur un conducteur, il faudra utiliser des pendules *simples* à fil isolant qui touchent le corps quand celui-ci n'est pas chargé.

76. — ***Energie électrique d'un conducteur électrisé.*** — Pour changer l'état électrique d'un conducteur, il faut lui fournir de l'énergie ou en recevoir suivant les cas. Ce sont ces variations d'énergie qui sont déterminées. Convenons de donner la valeur zéro à l'énergie d'un conducteur à l'état neutre. Evaluons son énergie lorsqu'il est au potentiel V_0, sa charge étant $Q_0 = CV_0$, en appelant C la capacité du conducteur.

Pour charger le conducteur, il faut amener des charges de l'infini sur le conducteur et pour cela effectuer un travail contre le champ électrique dû aux charges déjà placées sur le conducteur. Soit q la charge à un instant quelconque t pendant la période de charge. Posons $q = \alpha Q_0$, α est un coefficient qui croît d'une façon continue de 0 à 1 pendant la charge. Le potentiel, étant proportionnel à la charge, sera, à l'instant t, $v = \frac{q}{C} = \alpha \frac{Q_0}{C} = \alpha V_0$.

Amenons de l'infini la charge élémentaire $dq = Q_0 \, d\alpha$. Elle passe du potentiel 0 au potentiel $v = \alpha V_0$. Ceci exige une dépense d'énergie (§ 57) :

$$dW = v dq = \alpha V_0 \times Q_0 \, d\alpha. = V_0 Q_0 \alpha \, d\alpha.$$

L'énergie du conducteur à la fin de la charge sera la somme des travaux élémentaires qu'il a fallu fournir :

$$W = \int_0^1 Q_0 V_0 \, \alpha \, d\alpha = Q_0 V_0 \int_0^1 \alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} Q_0 V_0$$

$$W = \frac{1}{2} Q_0 V_0$$

En tenant compte que $Q_0 = CV_0$, nous avons les expressions équivalentes de l'énergie :

$$W = \frac{1}{2} Q_0 V_0 = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$$

Cette énergie se retrouve quand on ramène le conducteur à l'état neutre, par exemple en le mettant en communication avec le sol par un fil conducteur.

Exercices

14. Un conducteur sphérique isolé éloigné de tout autre corps, porte une charge égale à 1 microcoulomb. Calculer la force de répulsion qui s'exerce entre les deux hémisphères obtenus en coupant la sphère par un plan diamétral et maintenus en contact.

Rayon de la sphère : R = 10 cm.

Réponse : $f = 11250$ dynes.

15. Calculer le potentiel auquel est portée une sphère conductrice électrisée sachant que, si on la divise par un plan diamétral, les deux hémisphères au contact exercent l'un sur l'autre une force répulsive égale à 1 gramme-poids.

CHAPITRE VIII

INFLUENCE ÉLECTRIQUE

77. — ***Electrisation par influence.*** — Prenons un conducteur C en cuivre ayant la forme d'un cylindre terminé à ses extrémités par des demi-sphères (fig. 66). Ce conducteur étant initialement neutre, plaçons-le de façon que l'axe du cylindre soit vertical et attachons en différents points de ce conducteur de petits pendules simples à fil isolant qui touchent le cylindre quand celui-ci est à l'état neutre.

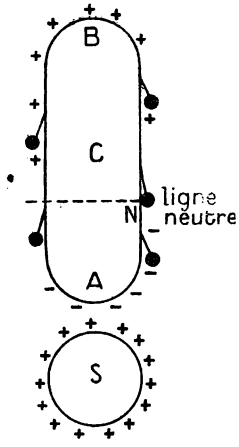


FIG. 66

Approchons une sphère électrisée S, par exemple chargée d'électricité positive. Nous observons que les pendules s'écartent du conducteur C, à l'exception de celui qui est en contact au point N. Comme l'écart d'un pendule est approximativement proportionnel au carré de la densité superficielle au point de contact initial (§ 75), nous en concluons que des charges électriques sont apparues sur la surface de C. Le plan d'épreuve permet de constater que dans la région A la plus voisine de la sphère S, apparaît de l'électricité négative, tandis que dans la région B, la plus éloignée de S, apparaît de l'électricité positive. Une partie non électrisée où se trouve le point N sépare ces deux régions et s'appelle la *ligne neutre.*

Donc *si l'on approche un corps électrisé S d'un conducteur C primitivement neutre, il apparaît sur C des électricités des deux espèces. On dit que C s'est électrisé par influence.*

D'une façon générale, on dit qu'un corps s'électrise par influence lorsqu'il s'électrise dans le champ d'un conducteur électrisé quelconque qui ne communique pas avec lui.

La théorie électronique permet une interprétation facile des phénomènes observés. Quand nous plaçons le conducteur C au voisinage de S, l'intérieur de C est soumis au champ produit par S. Les électrons, chargés négativement, se déplacent en sens inverse du champ, c'est-à-dire, si S est chargé positivement, se rapprochent de S et viennent dans la région A. Il apparaît donc sur A des charges négatives. Les restes positifs se déplacent dans le sens du champ. Ils s'éloignent de S et viennent dans la région B où apparaissent donc des charges positives. Le champ produit par ces charges en un point intérieur à C va de la région B à la région A et s'oppose au champ

dû à S. Les électrons et les restes positifs se déplaceront jusqu'au moment où ils seront en quantité suffisante pour que leur champ soit égal et de sens contraire à celui dû à S. Lorsqu'il en est ainsi en tous les points à l'intérieur de C, le champ est nul en chaque point intérieur au conducteur et l'équilibre est réalisé.

De plus, la charge totale du conducteur C qui était initialement nulle (état neutre), n'a pas changé. Donc *les électricités positive et négative développées par influence sur un conducteur sont équivalentes.* Ceci se vérifie expérimentalement en éloignant à grande distance la sphère S ; nous constatons que le conducteur C ne conserve aucune trace appréciable d'électrisation. Les électricités positive et négative qui étaient apparues se sont exactement neutralisées.

78. — ***Influence totale : Le corps influencé enveloppe complètement le corps influençant.*** — Un cas d'influence particulièrement important est celui où le corps influencé entoure complètement le corps influençant. On peut réaliser pratiquement un tel cas à l'aide d'un cylindre de Faraday, car si sa profondeur est grande par rapport à son diamètre, il se comporte *à peu près* comme un vase fermé pour les corps placés au voisinage du fond.

Introduisons, par exemple, dans un cylindre de Faraday C isolé et primitivement à l'état neutre (fig. 67), une sphère conductrice A portée par une tige isolante et électrisée positivement. Nous savons que le cylindre s'électrise sans qu'il soit nécessaire de le mettre en contact avec la sphère.

L'exploration des diverses régions du cylindre à l'aide d'un plan d'épreuve montre que la face extérieure de ce cylindre est alors chargée d'électricité positive et sa face intérieure d'électricité négative.

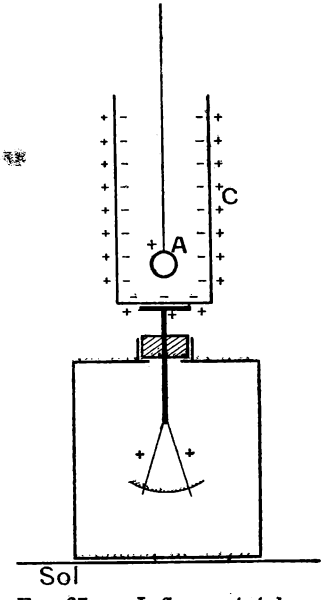


FIG. 67. — Influence totale.

QUANTITÉS D'ÉLECTRICITÉ PRODUITES. — Ces deux quantités d'électricité se détruisent complètement l'une l'autre lorsqu'on emporte la sphère influençante A ; *elles sont donc égales entre elles.* Comparons-les à la charge de la sphère.

Pour cela disposons le cylindre de Faraday C sur le plateau d'un électromètre à feuilles dont la cage est au sol. Les feuilles de l'électromètre peuvent être considérées comme faisant partie de la surface *extérieure* du cylindre de Faraday et leur écart donne des renseignements sur l'état d'électrisation de cette surface.

Au début de l'expérience, le cylindre C est seul et à l'état neutre ; les feuilles de l'électromètre pendent verticalement. Introduisons alors dans le

cylindre la sphère A électrisée positivement (1). Les feuilles de l'électromètre se chargent d'électricité positive, comme la surface extérieure du cylindre, et divergent. Tout d'abord leur écart augmente à mesure qu'on enfonce davantage la boule dans le cylindre, montrant que les charges positive et négative égales produites par influence sur le cylindre croissent dans ces circonstances. A partir d'une certaine profondeur, l'écart des feuilles devient indépendant de la position de la boule dans le cylindre ; il en est ainsi lorsque la boule est suffisamment enfoncée pour qu'elle puisse être considérée comme pratiquement entourée de toutes parts par le cylindre.

Dans ces conditions, les deux charges positive et négative du cylindre sont numériquement égales à la charge de la boule. Nous constatons, en effet, qu'en établissant alors le contact entre la boule et la paroi intérieure du cylindre, l'écart des feuilles reste invariable. Or appelons $+q'$ et $-q'$ les deux charges que possédait le cylindre, et $+q$ la charge de la boule. Avant le contact la charge extérieure du cylindre était $+q'$; après le contact elle est $+q$; l'écart des feuilles, qui ne dépend que de la charge extérieure du cylindre, n'a pas été modifié par le contact de la boule avec la sphère ; donc : $q' = q$.

Distribution. — Revenons à l'expérience dans laquelle la sphère est suffisamment enfoncée dans le cylindre pour qu'on puisse la considérer comme complètement entourée par lui.

Etudions expérimentalement la distribution de chacune des trois couches d'électricité qui recouvrent respectivement la surface de la sphère ainsi que les deux faces du cylindre. Utilisons, comme dans toutes les mesures relatives à la distribution, la méthode du plan d'épreuve (§ 62). Nous trouvons les résultats suivants :

1° La distribution sur la surface *extérieure* du cylindre est indépendante de la position de la sphère dans son intérieur ; c'est encore la même distribution que si la couche extérieure au cylindre était la seule existante ; cette couche est dite « *en équilibre d'elle-même* ».

2° Les distributions sur la sphère et sur la face intérieure du cylindre varient avec la position de la sphère.

Ces résultats sont généraux et constituent le théorème de Faraday.

Théorème de Faraday. — **Quand un corps isolé *A* agit par influence totale sur un autre corps isolé *B* l'entourant complètement :**

1° **Si q est la charge de *A*, il apparaît sur la face intérieure de *B* des charges — q et sur la face extérieure de *B* des charges + q ;**

2° **La distribution des charges extérieures + q est indépendante de la posi-**

(1) Pour réaliser correctement cette expérience il serait nécessaire de protéger le cylindre de Faraday contre toute action étrangère à la question, en l'entourant d'un conducteur en communication avec la cage métallique de l'électromètre. Nous expliquerons au paragraphe 82 la manière d'agir de ces écrans protecteurs.

tion de *A*. Elle est telle que le champ produit par ces charges seules en un point intérieur à *B* soit nul ;

3° La distribution des charges + q et — q sur le corps *A* et la face intérieure de *B* varie avec la position de *A*. Elle est telle que l'ensemble de ces charges produise un champ nul à l'extérieur de la cavité de *B*.

REMARQUE. — Si l'on met le corps influencé B au sol, la charge + q située sur la face extérieure de B s'écoule dans le sol. La charge intérieure de B et celle de A restent invariables. Leur distribution est inchangée.

79. — Influence produite par un corps électrisé sur un autre qui ne l'enveloppe pas complètement. — C'est ce qui était réalisé dans l'expérience décrite au paragraphe 77. Répétons cette expérience, c'est-à-dire approchons une sphère électrisée S d'un conducteur cylindrique AB primitivement neutre (fig. 68). Nous avons constaté que des charges négatives — q' apparaissent sur la région A et des charges positives équivalentes q' apparaissent sur la région B. Comparons ces charges à la charge q de la sphère. Pour cela touchons le cylindre AB avec le doigt pour le mettre en communication avec le sol. *Quel que soit le point touché*, le cylindre perd complètement son électricité positive et celle-là seulement. En effet, le cylindre et le sol forment un seul conducteur, l'électricité positive repoussée par les charges de S s'éloigne le plus possible et s'en va dans le sol ; l'électricité négative attirée par les charges de S reste sur le cylindre.

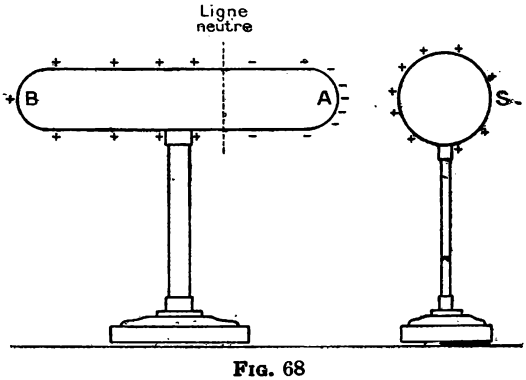


FIG. 68

Supprimons alors la communication de AB avec le sol en enlevant le doigt et mettons en contact le cylindre et la sphère. Nous constatons que ces deux conducteurs sont chargés *positivement*. La charge de l'ensemble qui est $q - q'$ est positive. Donc $q' < q$.

Ce résultat est général. *Quand un conducteur électrisé C_1 agit par influence non totale sur un conducteur C_2, il apparaît sur C_2 des charges positives et négatives équivalentes dont la valeur commune est inférieure à la charge de C_1. Les charges de signe contraire à celles de C_1 apparaissent sur la partie de C_2 la plus voisine de C_1 ; les charges de même signe que celles de C_1 apparaissent sur la partie de C_2 la plus éloignée de C_1.*

REMARQUE. — Si l'on met C_2 au sol, les charges de même signe que celles de C_1 s'en vont dans le sol et il reste sur C_2 les charges de signe contraire. Si on rompt la communication avec le sol et qu'on éloigne C_1, il reste le corps C_2 chargé de signe contraire à C_1. On a là un nouveau moyen pour charger un conducteur.

80. — ***Éléments correspondants.*** — On appelle *éléments correspondants* sur deux conducteurs deux portions de surface de ces conducteurs telles que AB et A'B' (fig. 69) situées aux extrémités d'un même tube de force astreint à ne contenir aucune masse électrique autre que celles des deux conducteurs.

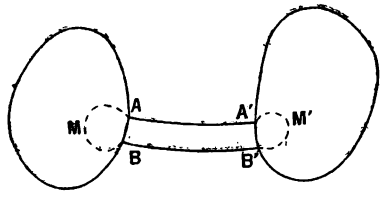


FIG. 69. — Eléments correspondants.

Considérons une surface fermée constituée par la paroi latérale du tube de force et deux portions de surface quelconque AMB, A'M'B' situées dans l'intérieur des masses conductrices, et calculons deux expressions du flux total sortant de cette surface :

1° ce flux est nul, puisqu'il ne sort aucun flux de la paroi latérale du tube de force, et qu'il en est de même pour les surfaces AMB et A'B'M' où l'intensité du champ est nulle en chaque point ;

2° soit q et q' les charges qui recouvrent respectivement les surfaces AB et A'B' des deux conducteurs ; d'après le théorème de Gauss (§ 50), le flux total sortant de la surface considérée est : $\frac{4\pi}{\varepsilon}(q + q')$.

Donc :

$$\frac{4\pi}{\varepsilon}(q + q') = 0$$

d'où :

$$q' = -q.$$

Les charges de deux éléments correspondants sont égales et de signes contraires.

81. — ***Explication théorique des phénomènes d'influence.*** — Nous avons indiqué au paragraphe 77 une interprétation électronique qui explique *qualitativement* les phénomènes d'influence. Montrons que l'on peut déduire les résultats quantitatifs à partir du théorème de Gauss et des propriétés des éléments correspondants.

1° INFLUENCE TOTALE. — Considérons un conducteur creux C de forme quelconque dans la cavité duquel se trouve un autre conducteur A électrisé positivement (fig. 70). Par influence, il apparaît sur la paroi intérieure de C

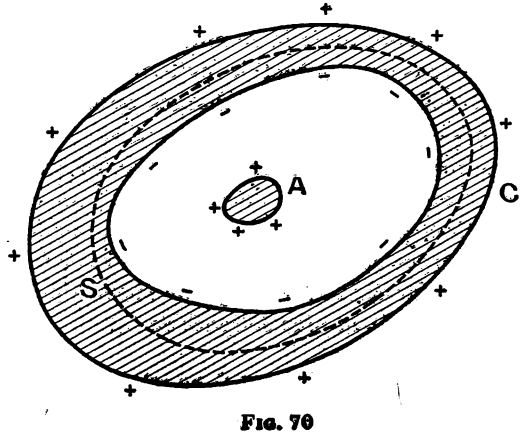


FIG. 70

des charges négatives et sur la paroi extérieure des charges positives. D'après le principe de la conservation de l'électricité (§ 33), ces charges sont égales et de signes contraires.

Imaginons une surface fermée S tracée dans la masse même du conducteur C, et calculons deux expressions du flux total sortant de cette surface considérée comme étant dans le vide :

1° ce flux est nul puisqu'en chaque point de la surface S l'intensité du champ est nulle ;

2° ce flux est, d'après le théorème de Gauss, égal à $\frac{4\pi}{\varepsilon} Q$, en appelant Q la somme algébrique des masses électriques situées à l'intérieur de S.

Donc :

$$\frac{4\pi}{\varepsilon} Q = 0,$$

ou :

$$Q = 0.$$

Or la somme Q se compose de la masse $+ q$ qui se trouve sur A et de la masse q' qui recouvre la surface de la cavité ; par suite :

$$q + q' = 0, \qquad \text{ou} \qquad q' = - q.$$

Nous retrouvons le même résultat, mais avec plus de détail, en traçant des lignes de force qui vont de la surface extérieure de A à la paroi de la cavité de C (fig. 71). Nous constituons ainsi des tubes de force qui déterminent sur ces deux surfaces des éléments correspondants possédant deux à deux des charges égales et de noms contraires (§ 80).

Nous retrouvons les résultats du théorème de Faraday. Quant à la distribution des charges, elle doit être telle que le champ soit nul à l'intérieur de A et de C.

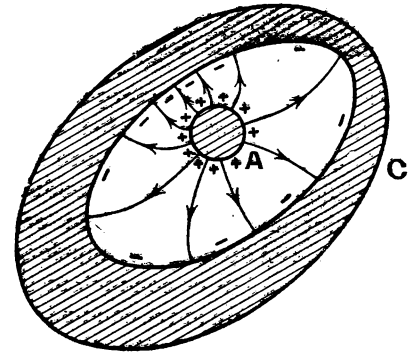


FIG. 71

2° INFLUENCE NON TOTALE. — Nous pouvons dire que, dans les expériences du paragraphe 79, la sphère S et le cylindre AB étaient placés à l'intérieur d'un conducteur creux constitué par les parois de la salle. On se trouve alors dans les conditions représentées par la figure 72.

Sur cette figure sont tracées un certain nombre de lignes de force et par suite, sont représentés des couples d'éléments correspondants. On voit qu'une partie seulement de l'ensemble des lignes de force issues de S aboutit sur le cylindre ; le reste aboutit à la paroi de la cavité qui enveloppe le tout. La région du cylindre où aboutissent les lignes de force venant de S est celle qui se recouvre d'électricité négative (§ 66) ; le théorème des éléments

correspondants (§ 80) montre que la charge négative du cylindre C n'équivaut qu'à une partie de la charge positive de la sphère S.

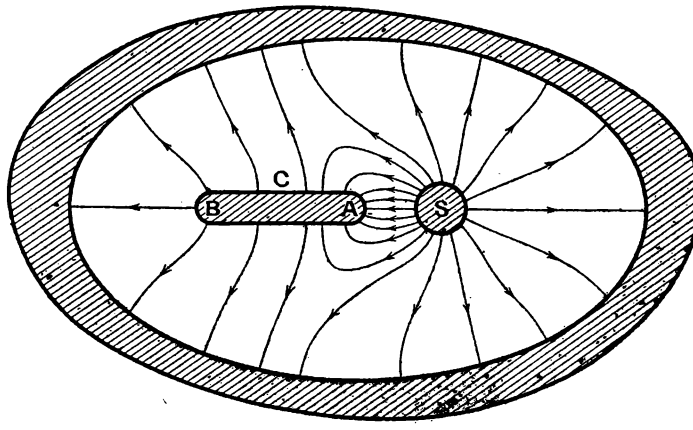


FIG. 72

D'autres lignes de force, issues de la région du cylindre couverte d'électricité positive, vont aboutir à la paroi de la cavité. Le théorème des éléments correspondants appliqué à tout l'ensemble montre encore que la charge totale de la paroi de la cavité est égale et de signe contraire à la somme algébrique des charges de la sphère et du cylindre qu'elle contient.

82. — ***Ecrans électriques.*** — On appelle *écran électrique* une surface conductrice ayant pour effet d'annuler, de l'un des côtés de la surface, les effets que pourraient produire des corps électrisés placés de l'autre côté. Nous allons montrer qu'un conducteur creux peut servir d'écran électrique.

Considérons un conducteur creux de forme quelconque (fig. 73). Pour la commodité du langage, appelons *a* sa face intérieure et *b* sa face extérieure. Dans la cavité de ce conducteur creux se trouve un conducteur A, et à l'extérieur se trouve un autre conducteur B ; A et B ont des formes et des positions quelconques, mais aucun d'eux n'est en contact avec C. Au début tous ces conducteurs sont isolés et non électrisés.

1° Electrisons le conducteur B. Le conducteur C s'électrise par influence, et les électricités se distribuent sur B et sur *b* de manière que le champ électrique, calculé comme si tout l'espace était vide, soit nul en un point quelconque du volume limité par la face *b*. En particulier, le champ électrique est nul en tout point de A : ainsi lorsque B s'électrise, il se produit

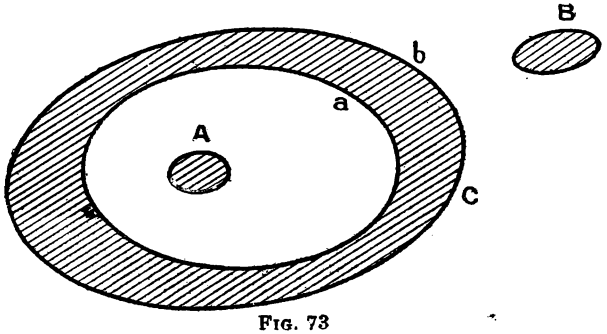


FIG. 73

aussitôt sur C une électrisation par influence dont le rôle est d'annuler l'action qu'exercerait B sur A.

Nous pouvons donc dire que, d'une manière générale, *un conducteur creux protège les corps situés dans sa cavité contre toute action électrique qui pourrait provenir des corps extérieurs.*

2° Reprenons le système dans l'état initial : les conducteurs A, B et C sont isolés et non électrisés.

Electrisons le conducteur A, positivement par exemple[1]. Le conducteur C s'électrise, par influence, négativement sur sa face intérieure *a*, positivement sur sa face extérieure *b*. Les distributions sur A et sur *a* sont telles que leur ensemble produirait, dans le vide, un champ nul en tout point extérieur au volume limité par la face *a*. En particulier l'ensemble des deux couches portées par A et *a* n'exerce aucune action sur le conducteur B.

Mais, si nous supposons tout d'abord C isolé, l'électricité que l'influence de A a fait naître sur la face *b* exerce une action sur B. En définitive le conducteur creux isolé ne protège pas les corps extérieurs contre les actions électriques provenant de corps situés dans sa cavité.

Mettons alors le conducteur creux en communication avec le sol. L'électricité que l'influence de A avait fait apparaître sur sa face extérieure *b* s'en va dans le sol, et l'action primitivement exercée sur B s'annule. Les corps extérieurs au conducteur creux ne sont donc protégés par lui, contre toute action électrique provenant de corps situés dans sa cavité, que s'il est en communication avec le sol.

En définitive, un conducteur creux en communication avec le sol, fait écran pour les actions électriques dans les deux sens ; il protège l'intérieur contre les actions électriques provenant de l'extérieur et inversement.

Cet énoncé constitue LE THÉORÈME DES ÉCRANS ÉLECTRIQUES.

83. — Emploi des écrans électriques. — Si l'on ne prend aucune précaution, l'étude d'un phénomène électrique pourra être troublée par la présence de certains conducteurs et même par celle de l'opérateur. Il ne sera possible de faire des mesures correctes qu'en protégeant le système étudié des actions extérieures. Cette **protection électrostatique** est obtenue par l'emploi d'écrans électriques.

Il suffit d'enfermer les appareils à protéger dans une enceinte métallique creuse complètement fermée. Mais toute enceinte théoriquement fermée présente toujours des ouvertures, ne serait-ce que pour permettre le passage des fils isolés de communication. Nous avons déjà fait des expériences avec des conducteurs creux incomplètement fermés et nous avons constaté que les phénomènes observés étaient les mêmes que si l'enceinte était fermée, à condition toutefois de se placer à une distance de la paroi assez grande

[1] L'opération est possible car les propriétés du conducteur creux persistent même si ce conducteur est percé d'un petit orifice permettant d'établir une communication entre A et l'extérieur.

par rapport aux dimensions des ouvertures. On assure donc une protection suffisante en enfermant les appareils à protéger dans une cage formée d'un grillage à mailles d'autant plus petites que les mesures doivent être plus précises. Enfin, cette cage sera mise en communication avec le sol pour obtenir une protection complète, c'est-à-dire une indépendance totale entre l'intérieur et l'extérieur de la cage.

Cette protection électrostatique est réalisée dans l'électroscope à feuilles grâce à la cage de l'appareil. Elle est réalisée sur les édifices publics grâce au *paratonnerre* qui est une sorte de cage formée par un ensemble de lames métalliques communiquant entre elles et avec le sol.

REMARQUE. — Les écrans électriques ne forment écran qu'à partir du moment où il y a *équilibre*. Si, par exemple, on place un électroscope sous une cloche de verre humide, et par suite légèrement conductrice, si on approche rapidement un bâton de résine électrisé, les feuilles divergent mais, le bâton restant immobile, elles retombent. Les conducteurs transmettent donc les actions électriques mais à l'équilibre le conducteur creux forme écran électrique.

84. — Interprétation de quelques phénomènes fondamentaux d'électrostatique. — Les résultats sur l'influence électrique permettent d'expliquer les attractions et les répulsions observées avec l'électroscope à feuilles et le pendule électrique.

1° ELECTROSCOPE A FEUILLES. — Utilisons, par exemple, l'électroscope dans lequel la tige conductrice qui porte les feuilles est surmontée d'une boule.

a) Reconnaître si un corps A est électrisé ou non. — Le conducteur formé par la boule, la tige et les feuilles n'est pas électrisé ; donc les feuilles pendent verticalement.

Approchons de la boule le corps à étudier A. S'il est électrisé, il agit par influence sur la boule et envoie dans les feuilles de l'électricité qui les fait diverger. Si A n'est pas électrisé, rien ne se produit, les feuilles restent verticales.

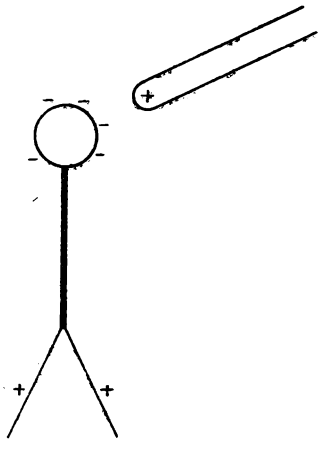


FIG. 74

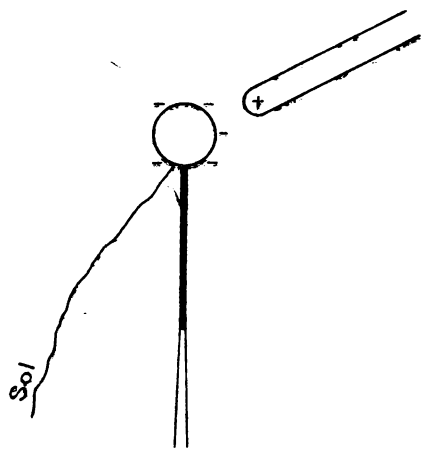


FIG. 75

FIG. 76

b) Dans le cas où A est chargé d'une seule électricité, reconnaître le nom de celle-ci. — L'électroscope doit alors être chargé préalablement d'une

électricité connue. Pour cela nous approchons de la boule de l'électroscope, par exemple une baguette de verre frottée avec du drap qui, par définition, porte de l'électricité *positive* (fig. 74). Le conducteur constitué par la boule, la tige et les feuilles s'électrise par influence (§ 79), la boule se charge d'électricité négative et les feuilles d'électricité positive ; celles-ci prennent donc une certaine divergence. On touche la boule un instant avec le doigt ; l'électricité positive (§ 79) s'en va dans le sol et les feuilles retombent (fig. 75). On retire le doigt, puis on éloigne la baguette de verre influençante ; une partie de l'électricité *négative* passe de la boule dans les feuilles qui divergent de nouveau (fig. 76).

L'électroscope est maintenant éloigné de tout autre corps et chargé d'électricité négative. Il va permettre de reconnaître la nature de l'électricité que possède le corps à étudier A ; nous allons voir en effet qu'en approchant A de la boule de l'électroscope, la divergence des feuilles doit se modifier de deux manières différentes suivant que A est chargé de l'une ou de l'autre électricité.

Supposons d'abord A électrisé *négativement*. Nous l'approchons de la boule de l'appareil. Il électrise par influence le conducteur formé par la boule, la tige et les feuilles, et envoie dans celles-ci de l'électricité négative (§ 79). Donc la charge des feuilles augmente ; il en résulte un *accroissement de leur divergence.*

Supposons au contraire le corps A électrisé *positivement*. Son influence envoie dans les feuilles une certaine quantité d'électricité positive, d'autant plus grande que le corps A est plus rapproché de la boule.

Plaçons d'abord A très loin et approchons-le lentement. Au début, la quantité d'électricité positive envoyée dans les feuilles est plus faible que leur charge négative initiale ; il y a simplement diminution de la charge des feuilles et par suite diminution de leur divergence.

Pour une certaine distance entre A et la boule, les feuilles reçoivent par influence autant d'électricité positive qu'elles possédaient d'électricité négative préalable ; leur charge devenant nulle, il en est de même de leur divergence, elles retombent verticalement.

Enfin en approchant plus encore le corps A de la boule, les feuilles se chargent d'électricité positive et divergent de nouveau.

En résumé, l'électroscope étant préalablement chargé d'électricité négative, si le corps A qu'on approche de la boule est électrisé négativement, on observe un accroissement de la divergence des feuilles ; si A est électrisé positivement, lorsque diminue la distance de A à la boule de l'électroscope la divergence des feuilles diminue d'abord, devient nulle, puis se manifeste à nouveau et peut même devenir supérieure à la divergence primitive.

Dans ces expériences, la cage métallique qui entoure les feuilles les protège contre une influence exercée directement sur elles par le corps A ; cette influence directe compliquerait les phénomènes que nous venons de décrire et rendrait la conclusion difficile.

2° PENDULE ÉLECTRIQUE UTILISÉ COMME ÉLECTROSCOPE. — Le premier

phénomène électrique connu, l'attraction des corps légers par un corps électrisé, était considéré au début comme une attraction exercée sur la matière même du corps léger. Le phénomène est plus complexe ; il est précédé d'une électrisation de ce corps léger par influence et les forces s'exercent en réalité entre les masses électriques des deux corps voisins.

Prenons, comme corps léger, la balle de sureau conductrice B d'un pendule électrique.

α) Nous l'utilisons tout d'abord pour reconnaître simplement si un corps A est électrisé ou non. Dans ce cas, le pendule n'est pas électrisé préalablement, et il peut être isolé ou non.

Supposons d'abord le pendule *isolé* (fig. 77). Nous en approchons le corps

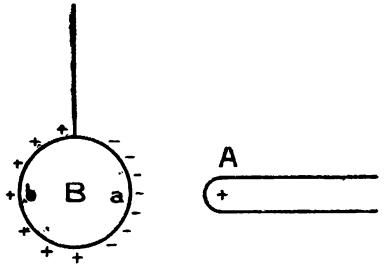


FIG. 77. — Pendule isolé.

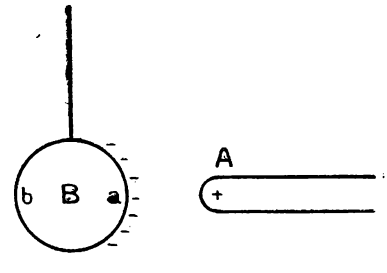


FIG. 78. — Pendule au sol.

A électrisé, par exemple, positivement. La balle de sureau s'électrise par influence, prend de l'électricité négative sur sa face *a* voisine de A, et une quantité *égale* d'électricité positive sur sa face opposée *b*. L'électricité de A exerce sur les électricités de B deux forces, l'une attractive, l'autre répulsive, qui mettent en jeu toutes deux les mêmes quantités d'électricité, mais l'attraction l'emporte parce qu'elle correspond à une distance moindre que la répulsion ($Aa < Ab$). La balle du pendule est attirée.

Si, au contraire, le pendule n'est pas isolé (fig. 78), l'électricité positive qui, dans le cas précédent apparaissait sur la face *b* de la boule, s'en va dans le sol. Des deux forces précédentes, seule l'attraction persiste. Le pendule non isolé est plus sensible que le pendule isolé, puisque l'attraction n'est pas en partie contrebalancée par une répulsion.

β) Utilisons maintenant le pendule pour reconnaître la nature de l'électricité du corps A. Le pendule doit alors être préalablement chargé d'une électricité connue et par suite nécessairement isolé ; supposons-le, par exemple, électrisé *négativement*.

Nous en approchons le corps A électrisé *positivement* (fig. 79). L'influence se produit sur la boule, indépendamment de la charge préalable, avec formation de quantités égales d'électricité négative sur la face *a* et d'électricité positive sur la face *b*. L'électricité négative de la boule est alors en quantité plus grande que son électricité positive, et elle est aussi à une distance moindre de A. Pour cette double raison l'attraction l'emporte sur la répulsion quelle que soit la distance.

Supposons au contraire le corps A électrisé *négativement* (fig. 80). Suivant la distance, la boule peut être repoussée ou attirée ; l'expérience est d'autant plus facile à réaliser que la boule est plus grosse et moins chargée. Voici l'explication :

Le corps A, agissant par influence sur la boule B, y fait apparaître des quantités égales des deux électricités, l'une positive sur la face *a*, l'autre négative sur la face *b*. Par suite de l'électrisation préalable de la boule B, la face *b* possède donc une charge négative supérieure à la charge positive de *a*, mais par ailleurs la distance A*b* est plus grande que A*a*. La valeur

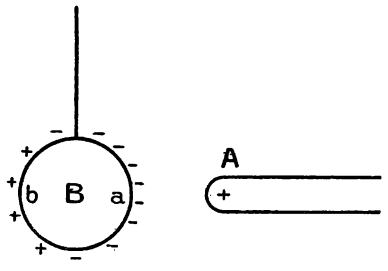


Fig. 79

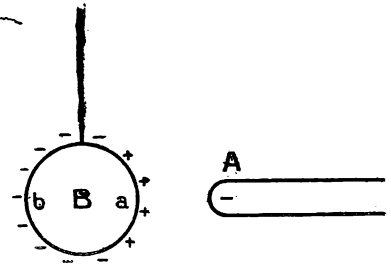


Fig. 80

relative des deux forces d'attraction et de répulsion exercées sur la boule dépend alors de sa distance au corps A. Tant que cette distance est grande par rapport au diamètre de la boule, les distances A*a* et A*b* sont relativement peu différentes ; c'est alors le facteur **quantité d'électricité** qui intervient efficacement : la répulsion l'emporte sur l'attraction. Supposons au contraire la distance de A à la boule très petite vis-à-vis du diamètre de celle-ci. D'une part, l'influence de A sur la boule est alors très grande, les deux masses d'électricité positive et négative de la boule sont relativement peu différentes. D'autre part, la distance A*b* est notamment plus grande que A*a* ; c'est alors le facteur **distance** qui est efficace, d'autant plus qu'il intervient par son carré ; l'attraction l'emporte sur la répulsion.

En résumé, une attraction ne permet pas d'affirmer que les charges de A et de la boule soient de noms contraires, mais une répulsion implique nécessairement qu'elles soient de même nom.

CHAPITRE IX

ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE CONDUCTEURS

85. — Problème général. — Etant donné un système de conducteurs, ils agissent par influence les uns sur les autres. On obtient un état d'équilibre tel que le champ à l'intérieur de chacun des conducteurs soit nul. Le problème général de l'équilibre d'un système de conducteurs consiste à déterminer les potentiels et les charges de ces conducteurs ainsi que la répartition des charges à la surface de chacun d'eux.

Généralement le système de conducteurs est soumis à certaines conditions précisant le problème : un conducteur peut être en communication constante avec une source électrique, ce qui le maintient à un potentiel déterminé ; ou bien un conducteur peut être isolé et alors sa charge totale est invariable.

Nous admettrons que : *étant donné un ensemble de conducteurs, si l'on fixe pour chacun d'eux soit le potentiel, soit la charge totale, il n'existe qu'un seul état d'équilibre.* Ceci revient à dire que dans des circonstances déterminées, une seule distribution est possible.

86. — Principe de la superposition de plusieurs états d'équilibre. — Nous aurons souvent à utiliser la proposition suivante connue sous le nom de :

THÉORÈME DE LA SUPERPOSITION DES ÉTATS D'ÉQUILIBRE : **La superposition de plusieurs états d'équilibre est aussi un état d'équilibre.**

Superposer deux états d'équilibre électrique, c'est mettre en chaque point des conducteurs une densité électrique égale à la somme des densités qui correspondent respectivement aux deux états. Si en un point A d'un des conducteurs du système la densité est σ_1 pour un premier état d'équilibre et σ_2 pour un deuxième état d'équilibre, la superposition des deux états d'équilibre s'obtient en mettant en A la densité $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$.

Considérons sur un système de conducteurs une première distribution. Puisqu'il y a équilibre, cette distribution produit en tous les points intérieurs aux conducteurs un champ nul, c'est-à-dire un potentiel constant. Soit $V_1, V_2 \ldots V_n$ les potentiels. Soit $V'_1, V'_2 \ldots V'_n$ les potentiels respectifs pour une deuxième distribution en équilibre.

Superposons les deux états d'équilibre. En chaque point les densités s'ajoutent par définition. Le potentiel électrique étant $V = \frac{1}{} \Sigma \frac{q}{}$ est une fonc-

tion *linéaire* des charges ; par suite en chaque point du champ, le potentiel résultant sera la somme des potentiels dus aux deux premiers équilibres. En particulier, à l'intérieur des conducteurs, les potentiels seront $V_1 + V'_1$, $V_2 + V'_2$, ... $V_n + V'_n$. Chacune de ces quantités est constante à l'intérieur de chaque conducteur ; par suite le champ sera nul à l'intérieur de chaque conducteur, ce qui montre que la nouvelle distribution obtenue par superposition des deux premières est encore un état d'équilibre.

Ce résultat important avait été établi précédemment (§ 63) dans le cas particulier d'un conducteur unique. C'était alors un résultat expérimental obtenu en mesurant les densités superficielles par la méthode du plan d'épreuve. Nous l'avons généralisé.

87. — Relations entre les potentiels et les charges d'un système de conducteurs en équilibre. — Considérons le cas de n conducteurs en présence, et établissons une relation entre leurs charges $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ et leurs potentiels $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Montrons que *la charge de chaque conducteur est une fonction linéaire des potentiels de tous.*

En effet, considérons un premier état d'équilibre dans lequel le conducteur 1 est au potentiel 1, tous les autres étant au potentiel zéro. Désignons alors les charges des divers conducteurs par $C_{11}, C_{21}, C_{31}\ldots, C_{n1}$. (Le premier indice correspond au numéro du conducteur et le second à l'état d'équilibre envisagé.) Superposons V_1 états d'équilibre identiques, nous avons un état d'équilibre dans lequel le potentiel du premier conducteur est V ceux de tous les autres sont nuls et les charges sont :

$$C_{11}V_1, C_{21}V_1, \ldots, C_{n1}V_1.$$

Considérons de même un état d'équilibre du système dans lequel le potentiel du second conducteur est V_2, ceux de tous les autres conducteurs étant nuls ; les charges de tous les conducteurs ont alors des expressions de la forme :

$$C_{12}V_2, C_{22}V_2, \ldots, C_{n2}V_2.$$

Continuons de même jusqu'à un n^e état d'équilibre dans lequel le potentiel du n^e conducteur est V_n, les autres étant nuls ; les charges des n conducteurs ont alors pour valeurs :

$$C_{1n}V_n, C_{2n}V_n, \ldots, C_{nn}V_n.$$

Enfin, superposons tous ces états d'équilibre. Le nouvel état d'équilibre est celui qui est indiqué au début, où les potentiels des n conducteurs sont $V_1, V_2, \ldots, V_n$, leurs charges étant $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$; et nous avons :

$$\begin{aligned}
Q_1 &= C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \ldots + C_{1n}V_n \\
Q_2 &= C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + \ldots + C_{2n}V_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q_n &= C_{n1}V_1 + C_{n2}V_2 + \ldots + C_{nn}V_n
\end{aligned}$$

Les charges sont bien des fonctions linéaires des potentiels.

Il en résulte, naturellement, que les potentiels sont des fonctions linéaires des charges.

Les coefficients C_{11}, C_{22}, ..., C_{nn}, dans lesquels les deux indices sont identiques, s'appellent les **capacités** des conducteurs correspondants, lorsqu'ils font partie du système. Les autres coefficients, de la forme C_{hk}, dans lesquels les deux indices sont différents, portent le nom de **coefficients d'influence.**

Tous ces coefficients, indépendants des charges et des potentiels, dépendent essentiellement de la forme, des dimensions et des *positions* relatives de tous les conducteurs. Il importe, en particulier, de remarquer que la capacité C_{11} par exemple, du premier conducteur considéré comme faisant partie du système, est différente de la capacité de ce même conducteur lorsqu'il est éloigné de tout autre corps.

Tous ces coefficients C sont de même nature que la capacité définie dans les paragraphes précédents, et par suite ils s'exprimeront avec les mêmes unités (§ 73).

*88. — **Energie électrique d'un système de conducteurs électrisés.*** — Nous considérons comme nulle l'énergie électrique du système lorsque tous les conducteurs sont à l'état neutre, et nous nous proposons d'établir l'expression de son énergie électrique lorsque les conducteurs ont respectivement des charges : Q_1, Q_2, ... Q_n et des potentiels : V_1, V_2, ... V_n.

Raisonnons comme dans le cas d'un conducteur unique (§ 76). A un instant, pendant la période de charge du système, les charges des conducteurs sont : αQ_1, αQ_2, ... αQ_n et leurs potentiels : αV_1, αV_2, ... αV_n ; α est une fraction comprise entre 0 et 1. Nous amenons d'une région au potentiel zéro, sur les divers conducteurs, des charges élémentaires $Q_1 d\alpha$, $Q_2 d\alpha$, ... $Q_n d\alpha$. Le travail élémentaire est :

$$dW = Q_1 V_1 \alpha d\alpha + Q_2 V_2 \alpha d\alpha + \ldots + Q_n V_n \alpha d\alpha.$$

L'énergie du système, dans l'état indiqué au début du paragraphe, est la somme des travaux élémentaires effectués contre le champ lorsque α croît d'une façon continue de 0 à 1 :

$$W = (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + \ldots + Q_n V_n) \int_0^1 \alpha d\alpha.$$

ou :

$$W = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + \ldots + Q_n V_n).$$

REMARQUE. — Tout conducteur appartenant au système considéré et ayant soit un potentiel nul, soit une charge totale nulle, n'introduit aucun terme dans la somme précédente. Cela ne signifie nullement que, si nous supprimons ce conducteur, l'énergie du système reste invariable ; il exerce en effet des influences sur les autres conducteurs et sa suppression modifierait par exemple les charges des autres conducteurs pour des potentiels déterminés.

89. — Passage d'un état d'équilibre électrique à un autre. Identité de Gauss. — Soit Q_1, Q_2, ... Q_n les charges des conducteurs, V_1, V_2 ... V_n leurs potentiels dans l'état initial du système ; Q'_1, Q'_2, ... Q'_n les charges, V'_1, V'_2, ... V'_n les potentiels de ces conducteurs dans l'état final. Désignons par W et par W' l'énergie du système dans les deux états. Nous avons :

$$W = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2 + \dots Q_nV_n),$$

$$W' = \frac{1}{2}(Q'_1V_1' + Q'_2V'_2 + \dots + Q'_nV'_n),$$

d'où une première expression de l'accroissement d'énergie du système en passant de l'état initial à l'état final :

$$W'-W = \frac{1}{2}[(Q'_1V'_1 + \dots + Q'_nV'_n) - (Q_1V_1 + \dots + Q_nV_n)] \quad (1)$$

D'autre part, pendant la période de passage de l'état initial à l'état final du système, nous pouvons représenter les charges des divers conducteurs à un instant par les expressions:

$$Q_1 + \alpha(Q'_1 - Q_1), \qquad Q_2 + \alpha(Q'_2 - Q_2), \qquad \dots \qquad Q_n + \alpha(Q'_n - Q_n).$$

Les potentiels des conducteurs étant des fonctions linéaires de leurs charges (§ 87), leurs valeurs au même instant sont :

$$V_1 + \alpha(V'_1 - V_1), \quad V_2 + \alpha(V'_2 - V_2), \quad \dots \quad V_n + \alpha(V'_n - V_n).$$

Amenons à cet instant d'une région au potentiel zéro, sur les divers conducteurs, des charges élémentaires :

$$(Q'_1 - Q_1)d\alpha, \qquad (Q'_2 - Q_2)d\alpha, \qquad \dots \qquad (Q'_n - Q_n)d\alpha.$$

Le travail élémentaire effectué contre le champ est :

$$dW = [V_1 + \alpha(V'_1 - V_1)](Q'_1 - Q_1)d\alpha + \dots + [V_n + \alpha(V'_n - V_n)](Q'_n - Q_n)d\alpha.$$

ce que nous pouvons écrire :

$$dW = [V_1(Q'_1 - Q_1) + \dots + V_n(Q'_n - Q_n)]\,d\alpha + [(V'_1 - V_1)(Q'_1 - Q_1) + \dots + (V'_n - V_n)(Q'_n - Q_n)]\alpha d\alpha.$$

L'accroissement d'énergie du système en passant de l'état initial à l'état final est la somme des travaux élémentaires ainsi effectués contre le champ lorsque α croît d'une façon continue de 0 à 1 :

$$W'-W=[V_1(Q_1'-Q_1)+\ldots+V_n(Q'_n-Q_n)]\int_0^1 d\alpha+$$
$$[(V'_1-V_1)(Q'_1-Q_1)+\ldots+(V'_n-V_n)(Q'_n-Q_n)]\int_0^1 \alpha d\alpha.$$
$$W'-W=[V_1(Q'_1-Q_1)+\ldots+V_n(Q'_n-Q_n)]+$$
$$\frac{1}{2}[(V'_1-V_1)(Q'_1-Q_1)+\ldots+(V'_n-V_n)(Q'_n-Q_n)]$$
$$W'-W=\frac{1}{2}[(Q'_1-Q_1)(V_1+V'_1)+\ldots+(Q'_n-Q_n)(V_n+V'_n)]. \quad (2)$$

Comparons les expressions (1) et (2) de l'accroissement d'énergie W' — W. Nous trouvons :

$$Q_1V'_1+\ldots+Q_nV'_n=Q'_1V_1+\ldots+Q'_nV_n.$$

Cette relation importante est connue sous le nom d'*identité de Gauss*.

90. — Relations fondamentales entre les capacités et les coefficients d'influence dans un système de conducteurs. — Considérons un système de conducteurs $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$. Portons le conducteur A_1 au potentiel 1, tous les autres étant au potentiel zéro, c'est-à-dire réunis au sol. Les charges des conducteurs sont (§ 87) $C_{11}, C_{21}, C_{31} \ldots C_{n1}$.

Représentons le champ dans l'espace qui entoure les conducteurs (fig. 81). Les lignes de force partent toutes du conducteur A_1 qui est le seul dont le potentiel soit supérieur à zéro ; elles aboutissent aux autres conducteurs ou s'éloignent indéfiniment. Le conducteur A_1 est donc chargé entièrement d'électricité positive et les autres conducteurs étant au sol sont entièrement chargés d'électricité négative. Par suite :

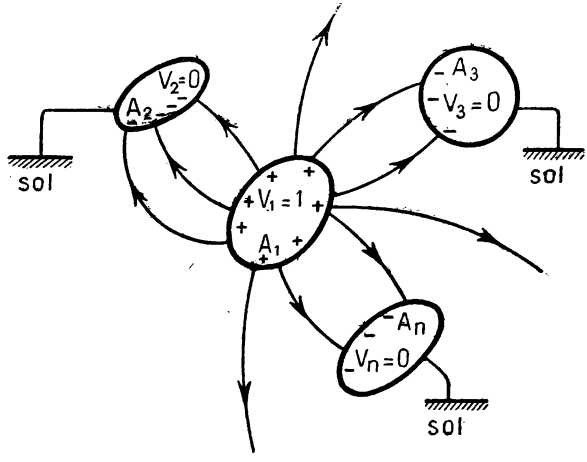


FIG. 81

Les capacités sont positives et les coefficients d'influence sont négatifs.

D'autre part, d'après le théorème des éléments correspondants (§ 80), la quantité d'électricité négative répartie sur l'ensemble des conducteurs $A_2, A_3 \ldots A_n$ est inférieure en valeur absolue à la charge positive de A_1. Nous avons donc :

$$C_{11} \geqslant -(C_{21}+C_{31}+\ldots+C_{n1}).$$

Le signe = correspond au cas où l'un des conducteurs entoure complètement les autres. Il y a alors influence totale.

Enfin considérons les deux états d'équilibre suivants. Dans un premier état, les conducteurs sont aux potentiels 1,0,0,0, ... 0 et leurs charges sont par suite C_{11}, C_{21}, C_{31} ... C_{n1} ... Dans un deuxième état, les conducteurs sont aux potentiels 0,1,0,0 ...0 et leurs charges sont par suite C_{12}, C_{22}, C_{32} ... C_{n2}.

Appliquons l'identité de Gauss à ces deux états. Nous avons :

$$\Sigma QV' = \Sigma Q'V$$

$$C_{11} \times 0 + C_{21} \times 1 + C_{31} \times 0 + \ldots + C_{n1} \times 0 = C_{12} \times 1 + C_{22} \times 0 + \ldots + C_{n2} \times 0.$$

$$C_{21} = C_{12}$$

Les coefficients d'influence sont deux à deux égaux et on a, d'une façon générale :

$$C_{hk} = C_{kh}$$

La valeur commune de ces deux coefficients s'appelle ***coefficient d'influence mutuelle*** *des conducteurs h et k dans le système.*

REMARQUE. — La connaissance des capacités et des coefficients d'influence mutuelle permet de calculer la charge totale de chaque conducteur. La répartition de ces charges sur la surface des conducteurs est telle que le champ électrique à l'intérieur de chacun d'eux soit nul, ce champ étant dû à l'ensemble de *toutes* les charges du système.

Enfin, le théorème de Coulomb (§ 66) reste applicable : en un point A d'un conducteur en équilibre où la densité superficielle est σ, la pression électrostatique est égale à $\frac{2\pi}{\varepsilon}\sigma^2$ et le champ du voisinage de A est $H = \frac{4\pi}{\varepsilon}\sigma$.

CHAPITRE X

CONDENSATEURS

I. — FORMULES GÉNÉRALES

91. — Formules fondamentales des condensateurs. — On appelle *condensateur* l'ensemble de deux conducteurs tels que le second B soit influencé *totalement* par le premier A (par exemple B entourant complètement A). Les deux conducteurs s'appellent les *armatures* : A est l'*armature interne* et B l'*armature externe* (fig. 82).

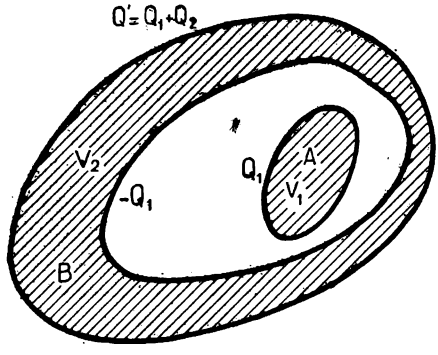


FIG. 82. — Condensateur.

Portons ces deux conducteurs respectivement aux potentiels V_1 pour A et V_2 pour B. Les charges prises par ces conducteurs sont, d'après le paragraphe 87,

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_2 &= C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Les capacités C_{11} et C_{22} et les coefficients d'influence C_{12} et C_{21} ne dépendent que de la forme, des dimensions et de la position relative des deux conducteurs. D'après les résultats établis au paragraphe 90 et puisqu'il y a influence totale de A sur B, on a les deux relations :

$$C_{12} = C_{21} \qquad \text{et} \qquad C_{11} = -C_{21}.$$

Démontrons directement ces relations :

1° Mettons l'armature externe B au sol, c'est-à-dire faisons $V_2 = 0$. A agit par influence totale sur B qui est au sol. Il apparaît donc sur B des charges Q_2 égales et de signes contraires à celles de A. Les formules (1) où l'on fait $V_2 = 0$ deviennent $Q_1 = C_{11}V_1$ et $Q_2 = C_{21}V_1$ et, comme dans ce cas $Q_2 = -Q_1$,

$$\boxed{C_{21} = -C_{11}}$$

2° Faisons $V_1 = V_2$. Cela revient à mettre les deux conducteurs en com-

munication, l'ensemble étant au potentiel V_2. La charge de A devient nulle puisque A est tout entier à l'intérieur de B. On a $Q_1 = 0$. D'après les formules générales (1) nous avons :

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 = (C_{11} + C_{12})\,V_2 = 0$$

d'où :

$$\boxed{C_{11} = -C_{12}}$$

Finalement, nous avons $C_{11} = -C_{12} = -C_{21}$. Soit C la valeur commune de ces coefficients. Les formules (1) deviennent :

$$Q_1 = C\,(V_1 - V_2)$$
$$Q_2 = -CV_1 + C_{22}V_2$$

Le coefficient C s'appelle **la capacité du condensateur** et la charge Q_1 de l'armature interne s'appelle **la charge du condensateur.**

Etudions la répartition des charges sur les armatures. L'armature interne A porte la charge $Q_1 = C\,(V_1 - V_2)$. Par influence totale, il apparaît sur la face intérieure de l'armature externe B la charge $-Q_1$. Comme la charge totale de B est Q_2, c'est que la face extérieure de B porte une charge Q' telle que $Q' - Q_1 = Q_2$. D'où :

$$Q' = Q_1 + Q_2 = (C_{22} - C)\,V_2$$

Or nous avons vu (§ 78) que la répartition de la charge extérieure Q' est la même que si le conducteur B était plein et seul. Le coefficient $C_{22} - C$ représente donc la capacité C' de l'armature externe supposée seule.

La relation $C' = C_{22} - C$ peut servir à déterminer C_{22} quand l'armature externe a une forme géométrique permettant de calculer C'. Souvent C' est négligeable devant C et, par suite, Q' est négligeable devant Q_1.

En général, on représente par Q la charge du condensateur ($Q = Q_1$), par C sa capacité ($C = C_{11}$) et par V la différence de potentiel entre les armatures ($V = V_1 - V_2$). Les formules fondamentales des condensateurs sont :

$$\boxed{\begin{aligned} Q &= C(V_1 - V_2) = CV \\ Q' &= (C_{22} - C)\,V_2 = C'V_2 \end{aligned}}$$

92. — Energie d'un condensateur. — L'énergie W' de l'ensemble des deux conducteurs constituant le condensateur est donnée par la formule générale établie au paragraphe 88. Nous avons :

$$W' = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2).$$

Cette énergie correspond au travail qu'effectueraient les forces électriques

si l'on ramenait *tout l'ensemble* à l'état neutre. Or, dans la pratique, on relie simplement l'une à l'autre les deux armatures, sans mettre au sol l'ensemble de ces armatures. Dans cette opération, la charge Q de l'armature interne vient neutraliser les charges — Q réparties sur la face intérieure de l'armature externe. La charge extérieure Q′ se conserve et sa distribution reste inchangée puisqu'elle est en équilibre d'elle-même (§ 78). **Le potentiel final est donc V_2.**

On appelle énergie du condensateur, l'énergie mise en jeu pendant la décharge quand on relie les deux armatures l'une à l'autre.

Pour évaluer cette énergie, nous raisonnerons comme nous l'avons fait pour un conducteur unique (§ 76). Soit V la différence de potentiel entre les armatures ($V = V_1 - V_2$) et $Q = CV$ la charge du condensateur. Considérons le condensateur à un instant t de sa décharge. La différence de potentiel est alors $v = \lambda V$ et la charge est $q = Cv = \lambda CV = \lambda Q$. Le paramètre λ varie d'une façon continue de 1 à 0 pendant la décharge.

Pendant le temps dt à partir de l'instant t, la charge de l'armature interne varie de $dq = Qd\lambda$; la charge $— dq$ passe sur l'armature externe et subit une chute de potentiel v. Le travail *reçu* par le condensateur est :

$$d\mathcal{C} = vdq = \lambda V \times Qd\lambda = QV\lambda d\lambda.$$

Le travail total *fourni* pendant la décharge, c'est-à-dire l'énergie du condensateur par définition, est :

$$W = -\int d\mathcal{C} = -\int_1^0 QV\lambda d\lambda = QV\int_0^1 \lambda d\lambda = \frac{1}{2} QV$$

L'énergie d'un condensateur, en tenant compte que $Q = CV$, s'exprime donc par les formules :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}}$$

Remarque. — Nous aurions pu calculer l'énergie du condensateur en la considérant comme la différence entre l'énergie initiale des deux conducteurs et l'énergie du système après la décharge. Initialement, l'énergie du système est $W' = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2)$; après la décharge l'énergie de l'ensemble est $W'' = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)V_2$ puisqu'on a l'ensemble des charges réunies au potentiel V_2. D'où

$$W = W' - W'' = \frac{1}{2} Q_1(V_1 - V_2) = \frac{1}{2} QV$$

II. — CALCUL DES CAPACITÉS

*93. — **Condensateur sphérique.*** — La capacité d'un condensateur peut être calculée à partir de ses dimensions toutes les fois que la forme est assez simple pour qu'on puisse calculer l'intensité du champ en chaque point situé entre les armatures.

Un condensateur sphérique est constitué par deux conducteurs dont les surfaces en regard sont sphériques et concentriques (fig. 83). Appelons R_1 et R_2 les rayons de ces sphères. Portons les deux armatures aux potentiels respectifs V_1 et V_2. Des charges Q et — Q apparaissent sur les surfaces sphériques et, par raison de symétrie, leur distribution est uniforme sur chaque sphère.

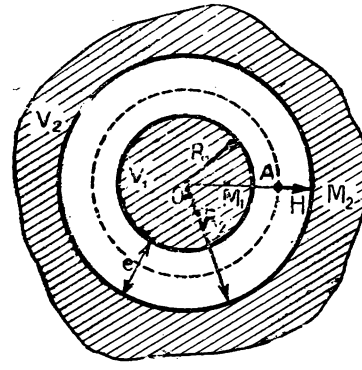


FIG. 83. — Condensateur sphérique.

Considérons un point A situé entre les deux armatures à une distance r du centre O et dans le milieu dont le pouvoir inducteur spécifique est égal à ε. Calculons le champ en A. Traçons la sphère de centre O et de rayon r qui passe par A. Le champ en chaque point de cette sphère est, par raison de symétrie, normal à la sphère et son intensité est constante. Le flux sortant de cette sphère est donc :

$$\Phi = HS = H \times 4\pi r^2.$$

Mais d'après le théorème de Gauss, nous avons $\Phi = \frac{4\pi}{\varepsilon} Q$, Q étant la somme des charges intérieures à la sphère, c'est-à-dire la charge de l'armature interne. Egalons ces deux valeurs du flux, nous obtenons :

$$H \times 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{\varepsilon} Q.$$

$$H = \frac{1}{\varepsilon} \frac{Q}{r^2}.$$

Exprimons que la différence de potentiel $V_1 - V_2$ est égale au travail du champ quand on passe de M_1 à M_2 suivant le rayon OM_2 (§ 53). Le travail pour un déplacement élémentaire dr est $d\mathcal{T} = H dr$, et le travail total est :

$$\mathcal{T} = V_1 - V_2 = \int_{M_1}^{M_2} H\,dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\varepsilon} \frac{Q}{r^2}\,dr$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{\varepsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{\varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{\varepsilon} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Or, la capacité du condensateur est, par définition, $C = \frac{Q}{V}$, donc :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

La capacité d'un condensateur sphérique est donnée par la formule :

$$C = \varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

R_1 et R_2 étant les rayons des surfaces sphériques en regard et ε le pouvoir inducteur spécifique du milieu compris entre les armatures.

REMARQUES. — 1° La formule $C = \varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ nous montre que, dans le système électrostatique, la capacité a les dimensions d'une longueur (§ 72).

2° La formule précédente donne la capacité en unités électrostatiques CGS si les rayons sont exprimés en centimètres. Si nous voulons l'avoir en farads, il faudra diviser par $3^2 \times 10^{11}$ (§ 73). La formule devient :

$$C^{farad} = \frac{1}{3^2 \times 10^{11}} \frac{\varepsilon R_1^{cm} R_2^{cm}}{R_2^{cm} - R_1^{cm}}$$

3° Supposons que la distance entre les armatures $e = R_2 - R_1$ soit faible devant R_1. La formule précédente devient, en confondant $R_1 R_2$ avec R_1^2

$$C = \varepsilon \frac{R_1^2}{e}$$

Nous pouvons écrire :

$$C = \varepsilon \frac{4\pi R_1^2}{4\pi e} = \varepsilon \frac{S}{4\pi e}$$

en appelant S la surface des armatures en regard. Nous verrons que cette dernière formule est générale et indépendante de la forme du condensateur à condition que la distance des armatures soit négligeable vis-à-vis de leurs dimensions.

94. — ***Condensateur cylindrique.*** — Un condensateur cylindrique est constitué par deux armatures cylindriques dont les surfaces en regard sont de révolution autour du même axe. Nous supposerons infinie la longueur des deux cylindres. Nous appelons R_1 et R_2 leurs rayons et nous allons calculer la capacité de la partie comprise entre deux plans P et P′ perpendiculaires à l'axe et séparés par une distance l (fig. 84). Nous utiliserons le même mode de raisonnement qu'au paragraphe précédent.

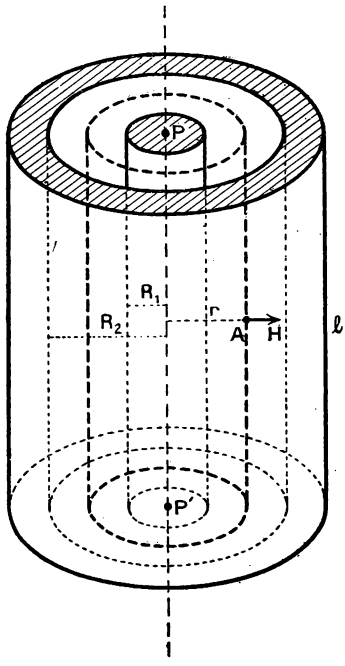


FIG. 84. — Condensateur cylindrique.

Considérons un point A situé entre les deux armatures à une distance r de l'axe PP′ et dans le milieu dont le pouvoir inducteur spécifique est ε. Calculons le champ en A. Traçons une surface fermée Σ constituée par la surface cylindrique de rayon r et d'axe PP′ qui passe par A, et par les plans P et P′ perpendiculaires à l'axe. Par raison de symétrie, le champ en chaque point de la surface latérale de ce cylindre est normal au cylindre et son intensité est constante. Dans les plans P et P′, le champ est situé dans ces plans eux-mêmes. Par

suite le flux total Φ sortant de Σ comprend le flux sortant par les plans P et P′ qui est nul, augmenté du flux sortant par la surface latérale qui est $H \times 2\pi rl$. Donc :

$$\Phi = H \times 2\pi rl.$$

D'après le théorème de Gauss, ce flux est égal à $\Phi = \frac{4\pi}{\varepsilon} Q$, Q étant la somme des charges intérieures à Σ, c'est-à-dire la charge de la partie d'armature interne considérée. Egalons ces deux valeurs de Φ :

$$H \times 2\pi rl = \frac{4\pi}{\varepsilon} Q.$$

$$H = \frac{2Q}{\varepsilon rl}$$

Exprimons que la différence de potentiel $V_1 - V_2$ est égale au travail du champ.

$$V_1 - V_2 = \int H\,dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2Q}{\varepsilon lr}\,dr = \frac{2Q}{\varepsilon l}\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{2Q}{\varepsilon l} \mathrm{L}\,\frac{R_2}{R_1}$$

La capacité $C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$ est donc donnée par la formule :

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon l}{2\,\mathrm{L}\,\frac{R_2}{R_1}}}$$

On trouve bien pour C une expression ayant les dimensions d'une longueur.

REMARQUES. — 1° La formule précédente est valable dans le système électrostatique. La capacité en farads serait donnée par :

$$C^{\text{farad}} = \frac{1}{3^2 10^{11}} \frac{\varepsilon l^{\text{cm}}}{2\mathrm{L}\,\frac{R_2}{R_1}}.$$

2° Supposons que la distance entre les armatures $e = R_2 - R_1$ soit faible vis-à-vis de R_1. Nous avons $\mathrm{L}\,\frac{R_2}{R_1} = \mathrm{L}\,\frac{e+R_1}{R_1} = \mathrm{L}\left(1 + \frac{e}{R_1}\right)$. On peut confondre $\mathrm{L}\left(1 + \frac{e}{R_1}\right)$ avec son développement en série limité au premier terme, car $\frac{e}{R_1}$ est petit devant 1.

$$\mathrm{L}\left(1 + \frac{e}{R_1}\right) \# \frac{e}{R_1}$$

D'où

$$C = \frac{\varepsilon l}{2\,\frac{e}{R_1}} = \frac{\varepsilon l R_1}{2e} = \frac{\varepsilon \times 2\pi R_1 l}{4\pi e} = \frac{\varepsilon S}{4\pi e}$$

S étant la surface des armatures en regard. Nous retrouvons la formule indiquée au paragraphe précédent.

3° Le résultat précédent n'est applicable qu'à un élément découpé dans un condensateur cylindrique *indéfini*. Mais le résultat obtenu est encore valable pour un élément d'un condensateur cylindrique *fini* pourvu que cet élément se trouve à une distance des extrémités assez grande par rapport à l'intervalle entre les deux cylindres. Si l'on veut appliquer la formule à la totalité du condensateur, on commet une erreur provenant des perturbations qui se produisent vers les extrémités, mais qui est d'autant plus faible que la longueur du condensateur est plus grande. Pratiquement on ne fera pas la *correction des bouts*.

95. — ***Condensateur plan.*** — Un condensateur plan est constitué par deux armatures dont les surfaces en regard sont planes et parallèles (fig. 85). Supposons-les d'abord indéfinies. Le système présente la symétrie de révolution autour d'un axe quelconque perpendiculaire aux plans des armatures. Le champ entre les armatures est donc uniforme et les lignes de force sont des droites perpendiculaires aux plans des armatures. Les densités superficielles sur les faces en regard sont, d'après le théorème des éléments correspondants, égales et de signes contraires. Appelons $+\sigma$ la densité sur la face plane de l'armature interne ; sur la face en regard, la densité sera $-\sigma$.

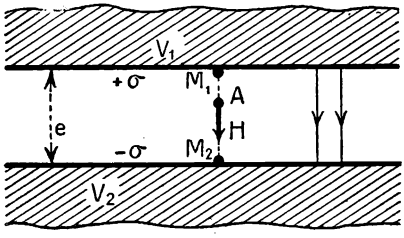


FIG. 85. — Condensateur plan.

Le champ produit en un point quelconque A situé entre les armatures est la somme des champs produits par les deux répartitions planes indéfinies. Chacune d'elles donne un champ qui est égal, en valeur absolue, à $\frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}$ (§44). Comme les deux répartitions donnent en A des champs de même sens, le champ total en A est : $H = \frac{4\pi}{\varepsilon}\sigma$.

Exprimons que la différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre les armatures est égale au travail du champ quand on passe de M_1 à M_2 le long d'une ligne de force. Nous avons:

$$V_1 - V_2 = H \times M_1M_2 = \frac{4\pi}{\varepsilon}\sigma e,$$

en appelant e la distance entre les armatures.

Considérons une portion de la surface des armatures d'aire S. Sa charge est $Q = \sigma S$ et sa capacité sera :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \varepsilon \frac{S}{4\pi e}.$$

$$\boxed{C = \varepsilon \frac{S}{4\pi e}}$$

Remarques. — 1° Si nous voulons obtenir la capacité en farads, la formule devient :

$$C^{farad} = \frac{1}{3^2 \times 10^{11}} \frac{\varepsilon S^{cm^2}}{4\pi e^{cm}}.$$

2° De même que dans le cas du condensateur cylindrique, la formule n'est valable que si les armatures ont des dimensions infinies. Sinon, il se produit des perturbations aux bords qui se font sentir pratiquement sur une longueur, à partir du bord, égale à la distance des armatures. La formule $C = \varepsilon \frac{S}{4\pi e}$ appliquée à l'ensemble du condensateur donne pour C une valeur d'autant plus approchée que les dimensions linéaires du condensateur sont plus grandes devant *e*.

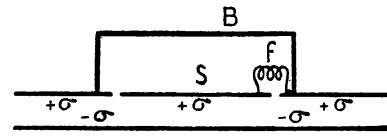


Fig. 86

D'ailleurs, pour des expériences précises, on peut éliminer l'effet des bords et supprimer toute correction. Une portion d'aire S est découpée dans l'un des plateaux et séparée du reste par un sillon (fig. 86). Quand on charge le condensateur, on établit par un fil *f* la communication entre la surface S et la partie qui l'entoure et qu'on appelle l'*anneau de garde*. Dans ces conditions les deux plateaux sont pratiquement indéfinis et la charge prise par la portion de surface S est $Q = CV = \frac{\varepsilon S}{4\pi e} V$.

La partie supérieure de la surface S n'aura aucune charge si l'on a soin de la protéger de toute action extérieure par une boîte métallique B. Pour la décharge on supprime la communication par le fil *f* et on réunit les deux armatures. La quantité d'électricité mise en jeu est alors exactement $Q = \frac{\varepsilon S}{4\pi e} V$.

96. — Condensateur de forme quelconque, mais d'épaisseur uniforme et très petite. — Les armatures sont deux conducteurs dont les surfaces en regard sont parallèles. La distance *e* des deux surfaces est très petite vis-à-vis des dimensions latérales et aussi vis-à-vis du rayon de courbure en chaque point (fig. 87).

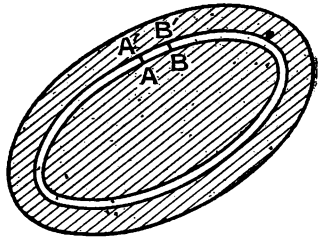


Fig. 87

Dans ces conditions, lorsqu'on établit une différence de potentiel entre les deux conducteurs, le champ entre les armatures peut être considéré comme uniforme ; les surfaces équipotentielles sont parallèles aux surfaces en regard sur les armatures. L'ensemble peut être considéré comme la juxtaposition d'un grand nombre de petits condensateurs plans, tels que ABA'B'. La capacité de l'ensemble est donnée pratiquement par la formule

$$C = \varepsilon \frac{S}{4\pi e}$$

en appelant S l'aire commune aux surfaces en regard. Elle est d'autant plus grande que les armatures sont plus rapprochées et que les surfaces en regard ont une aire plus grande.

*97. — **Condensation électrique.*** — En tenant compte du résultat précédent, on réalise facilement des condensateurs dont la capacité C est énorme vis-à-vis des capacités c et c' qu'auraient les armatures si chacune d'elles était éloignée de tout autre corps.

Une *source électrique* est caractérisée par la propriété de maintenir entre ses deux pôles une différence de potentiel déterminée V. Mettons les deux armatures du condensateur en communication respectivement avec les deux pôles de la source. Les *surfaces en regard* sur les armatures prennent des charges égales et de signes contraires $+ Q$ et $- Q$; la valeur de Q étant, dans l'air, déterminée par la relation :

$$Q = CV = \frac{S}{4\pi e} V ;$$

les autres portions de la surface des armatures prennent des charges pratiquement négligeables vis-à-vis de Q.

Prenons maintenant une seule des armatures ; éloignons-la de tout autre corps. Elle n'a plus qu'une capacité c. Portons-la au potentiel V en la mettant en communication avec l'un des pôles de la source précédente, l'autre pôle de cette source étant au sol. Elle ne prend plus qu'une charge : $q = cV$, beaucoup plus faible que Q.

Prenons par exemple un conducteur sphérique A de 10 cm de rayon ; lorsqu'il est éloigné de tout autre corps, sa capacité vaut 10 unités C. G. S. Portons-le, par le dispositif qui vient d'être indiqué, au potentiel V (exprimé en C. G. S.), il prend une charge :

$$q = 10 \text{ V unités C. G. S.}$$

Plaçons maintenant ce conducteur A dans la cavité sphérique d'un autre conducteur B, de manière que les deux sphères soient concentriques ; soit : $e = 1$ mm la distance des armatures du condensateur ainsi constitué. Chargeons le condensateur en mettant ses armatures en communication avec les deux pôles de la source précédente. Le conducteur A prend une charge :

$$Q = \frac{R^2}{e} V = 1000 \text{ V} \quad \text{C. G. S.}$$

Q vaut 100 fois q.

La même source d'électricité fournit au même conducteur A une charge 100 fois plus grande lorsqu'il est entouré par B que lorsqu'il est seul.

Le phénomène est général. Un conducteur de forme quelconque A est relié à l'un des pôles d'une source d'électricité dont l'autre pôle est au sol ; il prend une certaine charge. Approchons de A un autre conducteur B relié au sol (ou, ce qui revient au même, au second pôle de la source), la charge de A augmente.

On a donné autrefois à ce phénomène le nom de *condensation élec-*

trique, d'où vient celui de condensateur donné à l'ensemble des conducteurs A et B.

98. — Vérification expérimentale. — Dans l'expérience qui vient d'être décrite, au lieu de maintenir le conducteur A à un potentiel constant, isolons-le de manière que sa charge reste constante. Approchons de A le conducteur B relié au sol ; le potentiel de A doit diminuer, puisque pour maintenir son potentiel constant sa charge devrait augmenter. Il est aisé de le vérifier.

Prenons un électromètre à feuilles dont la tige conductrice est surmontée d'un plateau (fig. 88). Etablissons entre ce plateau A et la cage une différence de potentiel de quelques centaines de volts (1), les feuilles divergent. Du plateau supérieur A approchons un autre plateau B en communication avec le sol (cage) : l'écart des feuilles, qui mesure la différence de potentiel entre A et la cage, diminue.

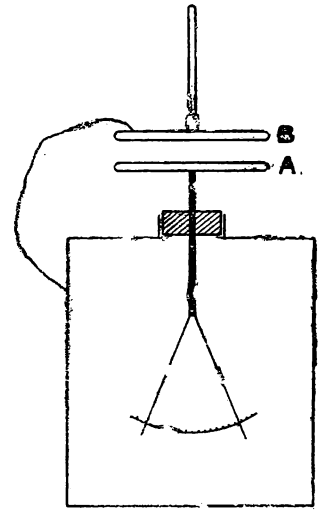


FIG. 88

III. — CONDENSATEURS USUELS

99. — Importance du diélectrique. — Etablissons entre les armatures d'un condensateur une différence de potentiel constante V. L'énergie emmagasinée est $W = \frac{1}{2} CV^2$. La capacité étant proportionnelle au pouvoir inducteur spécifique de la lame isolante comprise entre les armatures, on aura intérêt à avoir un diélectrique de grand pouvoir inducteur spécifique ε. Les valeurs de ε pour les isolants usuels sont :

Air	1,0006	Ebonite.....	2,8
Verre.....	5 à 7	Gutta-percha	4,4
Paraffine	2,3	Mica.....	8

Mais, pour un isolant donné, on ne peut augmenter autant que l'on voudrait la différence de potentiel entre les armatures. Considérons un condensateur à lame diélectrique, et faisons croître la différence de potentiel aux armatures. Pour une certaine valeur de celle-ci, une étincelle jaillit d'une armature à l'autre *à travers* le diélectrique ; on a atteint alors ce qu'on appelle la **différence de potentiel explosive** (2).

(1) On peut réaliser une telle différence de potentiel à l'aide d'une centaine de petits accumulateurs groupés en série (§ 151).

(2) Ce phénomène ne se réalise que si la lame diélectrique déborde suffisamment en dehors des armatures. Dans le cas contraire, la décharge passe plus facilement d'une armature à l'autre en suivant un trajet sur la surface extérieure du diélectrique où se trouve en général une mince couche d'humidité conductrice.

La différence de potentiel explosive dépend de la nature du diélectrique et croît avec son épaisseur mais ne lui est pas proportionnelle ; elle est relativement faible pour l'air. La connaissance de sa valeur présente une grande importance : elle représente une limite supérieure de la différence de potentiel qu'on peut établir entre les armatures du condensateur et par suite elle conditionne la limite supérieure de l'énergie que l'on peut y emmagasiner. Dans le cas le plus fréquent d'un diélectrique solide, le passage de l'étincelle à travers le diélectrique y produit une sorte de petit canal qui se remplit d'air ; la différence de potentiel explosive prend alors la valeur plus faible relative à l'air ; l'énergie maximum du condensateur est notablement diminuée.

On appelle **rigidité diélectrique** d'un isolant, la différence de potentiel explosive qui correspond à une épaisseur d'un centimètre. Voici, exprimées en kilovolts, quelques valeurs relatives à des diélectriques usuels :

Air.....	32	Papier	40 à 100
Pétrole	65	Papier paraffiné...	400 à 500
Verre.....	75 à 300	Mica	600 à 750

Pour avoir une idée de l'importance pratique de ces coefficients et de ceux du tableau précédent, il est bon de comparer les valeurs maxima de l'énergie qu'on peut emmagasiner dans deux condensateurs géométriquement identiques, par exemple l'un à lame d'air et l'autre à lame de mica. D'une part, ce dernier possède une capacité 8 fois plus grande que l'autre ; d'autre part, admettons qu'il puisse supporter entre ses armatures une différence de potentiel 20 fois plus grande que l'autre. Il résulte de la formule : $W = \frac{1}{2} CV^2$, que l'énergie maximum du condensateur à lame de mica sera : $8 \times 400 = 3\,200$ fois plus grande que celle du condensateur à lame d'air.

100. — Interprétation du rôle du diélectrique. — La loi de Coulomb $f = \frac{1}{\varepsilon} \frac{qq'}{r^2}$ suppose un diélectrique unique et *inerte* de pouvoir inducteur spécifique ε variable avec le milieu. Cette inactivité du diélectrique est en contradiction avec l'expérience suivante.

Chargeons un condensateur démontable dont les deux armatures et le diélectrique sont distincts et séparables. Démontons-le, déchargeons séparément les deux armatures en les mettant au sol, puis remontons-le. En reliant les deux armatures, on obtient une nouvelle décharge.

On admet aujourd'hui que l'action de deux charges électriques l'une sur l'autre est la somme de deux termes :

1° Une force $f = \frac{qq'}{r^2}$, qui est *indépendante du milieu interposé* ;

2° Une action due à des charges qui se développent dans le diélectrique. On dit qu'il y a **polarisation du diélectrique.** Cette polarisation est analogue à l'aimantation dans un champ magnétique.

On admet même que l'énergie du condensateur est localisée dans le diélec-

trique. Chaque volume dv de diélectrique soumis à un champ $\vec{H}$ contient une énergie $dW = \frac{\varepsilon H^2}{8\pi}\, dv$.

Vérifions ce résultat sur le condensateur plan. Nous avons :

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi e} \qquad W = \frac{1}{2} CV^2, \quad \text{avec} \quad V = He$$

d'où : $$W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{4\pi e} H^2 e^2 = \frac{\varepsilon H^2}{8\pi} \times Se = \frac{\varepsilon H^2}{8\pi} \times v$$

v étant le volume du diélectrique. L'énergie par unité de volume est donc bien :

$$\frac{W}{v} = \frac{\varepsilon H^2}{8\pi}$$

101. — Formes usuelles des condensateurs. — 1° CONDENSATEURS POUR DIFFÉRENCES DE POTENTIEL ÉLEVÉES. — Dans les laboratoires d'enseignement, on utilise surtout la **bouteille de Leyde.** La lame diélectrique est constituée par la paroi de verre d'une bouteille (fig. 89). L'armature externe est une feuille d'étain collée au verre, recouvrant le fond et les deux tiers environ de la paroi latérale. L'armature interne est une autre feuille d'étain collée à l'intérieur lorsque le col de la bouteille est assez large pour qu'on y puisse passer la main (fig. 89 II), ou, dans le cas contraire, un ensemble de feuilles de clinquant tassées dans la bouteille (fig. 89 I). Le bouchon est isolant ; la surface libre du verre est enduite d'un vernis isolant à la gomme laque pour éviter le passage de la décharge le long de la paroi. Une tige conductrice traverse le bouchon et toute l'armature interne ; elle se termine à l'extérieur par une boule afin d'éviter les déperditions d'électricité que produiraient des arêtes vives (§ 68).

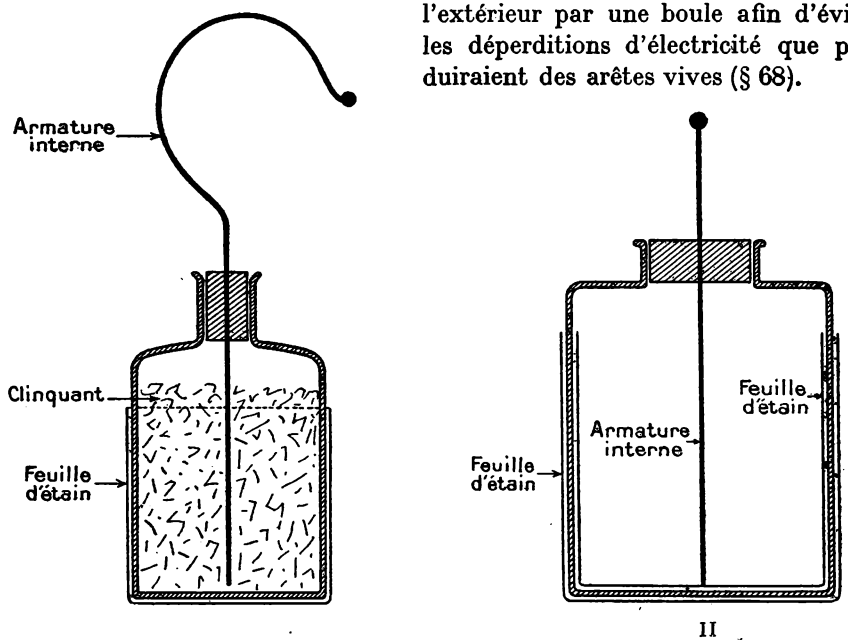


FIG. 89. — Bouteilles de Leyde.

Pour charger une telle bouteille, on la tient à la main par son armature externe ; l'armature interne est mise en communication avec l'un des pôles d'une machine électrique dont l'autre pôle est au sol. Les deux armatures du condensateur sont bien ainsi en communication avec les deux pôles de la machine et, d'autre part, lorsqu'on pose la bouteille chargée sur la table, il ne se produit aucune modification dans son état puisque son armature externe est au potentiel du sol. Elle est ainsi d'un emploi très commode dans les expériences.

Sa capacité, variable naturellement avec les dimensions, est de l'ordre du millième de microfarad. Sa différence de potentiel explosive, variable aussi (suivant l'épaisseur de la paroi), est de l'ordre de 10 000 volts.

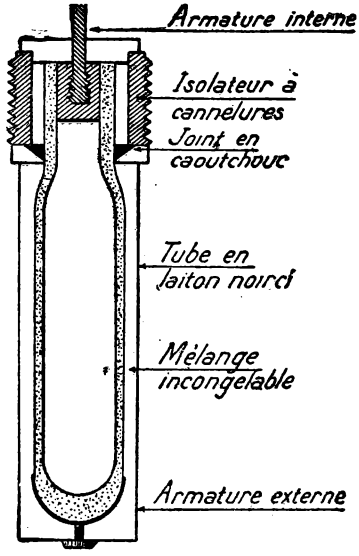


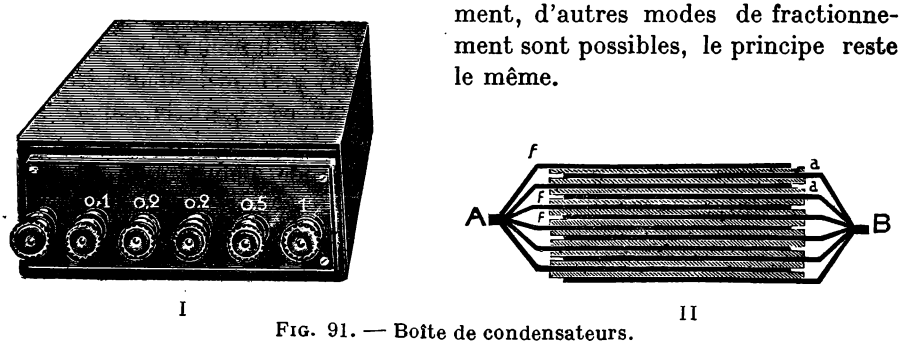
FIG. 90

Dans des installations industrielles, on utilise des condensateurs plus robustes. La figure 90 représente un modèle employé dans les postes d'émission de T. S. F. Le condensateur proprement dit est constitué par un tube en verre fermé à la partie inférieure, sur les deux parois duquel on a fait un dépôt adhérent de métal. Le col porte, en plus de la masse isolante qui entoure la tige de l'armature interne, un isolateur en porcelaine à gorges. L'appareil est protégé contre les chocs par une gaine métallique fermée, remplie d'un liquide, incongelable en hiver, destiné surtout à empêcher l'échauffement de l'appareil. Au poste de la Tour Eiffel, on utilise de tels condensateurs ; ils peuvent supporter 50 000 volts ; leur capacité est 4 millièmes de microfarad ; leur hauteur est 1,40 m et leur diamètre extérieur 8 cm.

2° CONDENSATEURS POUR DIFFÉRENCES DE POTENTIEL MOYENNES. — Pour des différences de potentiel de quelques centaines de volts, la lame diélectrique est plus mince que dans les appareils précédents. On utilise fréquemment une feuille de mica de quelques dixièmes de millimètre. On réalise les armatures soit en argentant les deux faces, soit en y collant des feuilles d'étain. On réalise ainsi facilement une capacité de l'ordre de 10 millièmes de microfarad, avec une surface de quelques décimètres carrés. En associant 100 condensateurs, qu'on peut superposer pour diminuer l'encombrement, on réalise une capacité d'un microfarad sous un petit volume.

Un tel condensateur est représenté par la figure 91, I ; ses dimensions sont $30 \times 20 \times 10$ centimètres. Il contient un empilement de feuilles de mica et de feuilles d'étain alternées représenté par la figure 91, II ; toutes les feuilles métalliques de rang impair communiquent entre elles en A et forment l'une des armatures ; il en est de même des feuilles de rang pair, qui communiquent entre elles en B et forment l'autre armature. Sa capacité totale est de 2 microfarads ; on peut la fractionner car les feuilles d'étain sont

séparées en groupes qu'on peut réunir ensuite. Ces divers groupes ont pour capacité, par exemple 0,1, 0,2, 0,2, 0,5 et 1 microfarad ; ils permettent alors d'obtenir tous les nombres de *dixièmes* de microfarad de 1 à 20. Naturellement, d'autres modes de fractionnement sont possibles, le principe reste le même.



I II

FIG. 91. — Boîte de condensateurs.

3° CONDENSATEURS POUR FAIBLES DIFFÉRENCES DE POTENTIEL. — Lorsque les différences de potentiel ne dépassent pas quelques volts, on diminue encore l'épaisseur du diélectrique ; on utilise alors le papier paraffiné. On réalise ainsi pour les installations téléphoniques un condensateur de 2 microfarads qui a la forme d'un cube de 5 cm de côté.

4° CONDENSATEURS DE T. S. F. — Dans les appareils récepteurs de T. S. F., on trouve deux types de condensateurs : le condensateur variable et le condensateur électrolytique.

Dans le *condensateur variable à air* (fig. 92) l'une des armatures est formée par une série de lames métalliques semi-circulaires, équidistantes, fixes, reliées par des tiges métalliques. L'autre armature est constituée par une série de lames identiques mobiles, portées par un axe de rotation, qui peuvent pénétrer plus ou moins entre les lames fixes, sans les toucher. La capacité est proportionnelle à l'aire des surfaces en regard ; elle est maximum et de l'ordre de 0,001 μF lorsque les lames mobiles sont complètement à l'intérieur des logements formés par les lames fixes.

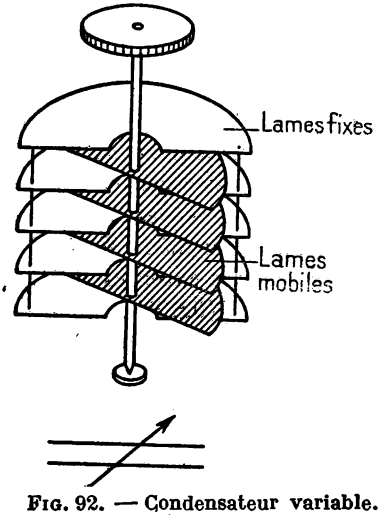


FIG. 92. — Condensateur variable.

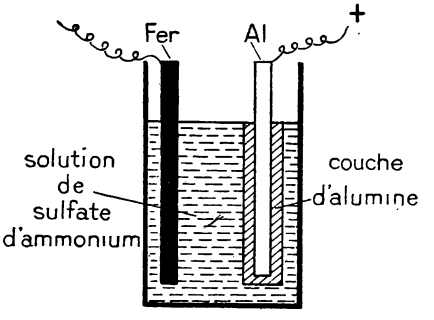


FIG. 93. — Condensateur électrolytique.

Dans le *condensateur électrolytique* (fig. 93), on a deux électrodes l'une en fer, l'autre en aluminium pur, plongeant dans une solution de sulfate d'ammonium. Le passage d'un courant électrique *de l'aluminium au fer* produit une couche très mince d'alumine *isolante* sur l'aluminium et le courant ne passe plus *dans ce sens* (1). Le voltamètre est devenu un condensateur dont les armatures sont l'aluminium et l'électrolyte ; le diélectrique est constitué par la couche d'alumine. Comme elle est mince (0,5 μ), la capacité est grande (de l'ordre de 10 μF).

Cette capacité ne se manifeste que si l'électrode d'aluminium est reliée au pôle *positif* (1) de la source.

IV. — ASSOCIATION DES CONDENSATEURS

*102. — **Utilisation des condensateurs.*** — Quand on utilise les condensateurs en électrostatique, on cherche à emmagasiner le plus d'énergie possible tout en évitant la décharge entre les armatures, c'est-à-dire en n'utilisant, pour chaque condensateur, que des différences de potentiel inférieures à la différence de potentiel explosive.

Nous chercherons pour cela à réaliser un système de grande capacité. Un condensateur unique serait insuffisant. Nous grouperons alors les condensateurs *en parallèle.*

De plus, si un condensateur unique ne peut supporter sans détérioration la différence de potentiel fournie par la source, nous partagerons cette différence de potentiel entre plusieurs condensateurs groupés *en série.*

*103. — **Groupement en parallèle.*** — Ce mode de groupement s'appelle encore groupement *en batterie* ou *en surface.* Pour effectuer ce groupement, relions toutes les armatures internes A_1 A_2 A_3 au même point P et toutes les armatures externes B_1 B_2 B_3 au même point P′ (fig. 94). La différence de potentiel V est établie entre P et P′ si bien que chaque condensateur est soumis à la différence de potentiel V.

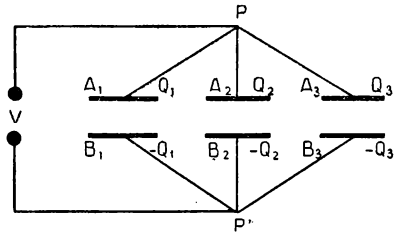


FIG. 94. — Condensateurs en parallèle.

Appelons C_1 C_2 C_3 les capacités de ces trois condensateurs. Les surfaces en regard des armatures portent respectivement les charges $Q_1 = C_1 V$ et $-Q_1$ pour le premier ; $Q_2 = C_2 V$ et $-Q_2$ pour le second, $Q_3 = C_3 V$ et $-Q_3$ pour le troisième. Déchargeons le système en reliant ensemble P et P′ par un fil conducteur. Les charges Q_1, Q_2, Q_3 viennent neutraliser les charges $-Q_1$, $-Q_2$, $-Q_3$ et la charge totale mise en jeu est $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$.

Calculons la capacité du condensateur unique équivalent à l'ensemble, c'est-

(1) Le courant peut en effet passer du fer à l'aluminium.

à-dire qui, chargé sous la différence de potentiel V, mettrait en jeu dans la décharge la même quantité d'électricité Q. On doit avoir $Q = CV$.

Or : $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1V + C_2V + C_3V = (C_1 + C_2 + C_3)\,V$.

Nous avons donc : $Q = CV = (C_1 + C_2 + C_3)\,V$

D'où :

$$\boxed{C = C_1 + C_2 + C_3} \qquad (1)$$

Un ensemble de condensateurs groupés en parallèle est équivalent à un condensateur unique dont la capacité est égale à la somme des capacités des divers condensateurs du système.

Multiplions la relation (1) par $\frac{1}{2}V^2$. Nous obtenons :

$$\frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}C_1V^2 + \frac{1}{2}C_2V^2 + \frac{1}{2}C_3V^2.$$

Cette relation exprime que :

L'énergie emmagasinée dans un groupement de condensateurs en parallèle est la somme des énergies emmagasinées dans les différents condensateurs pris isolément sous la même différence de potentiel.

Dans le cas particulier où l'on a n condensateurs identiques en parallèle, la capacité de l'ensemble est $C = nc$ et l'énergie $W = nw$, c et w étant la capacité et l'énergie d'un seul condensateur.

En résumé, le groupement en parallèle a l'avantage de donner une *grande capacité* et d'augmenter l'énergie emmagasinée. Par contre, chaque condensateur est soumis à la différence de potentiel V qui devra être inférieure à la différence de potentiel explosive pour chaque condensateur.

104. — ***Groupement en série.*** — Ce mode de groupement s'appelle encore groupement en *cascade.* Pour le réaliser on met l'armature externe B de chaque condensateur en communication avec l'armature interne A du suivant (fig. 95). La différence de potentiel V est établie entre les armatures extrêmes A_1 et B_3 du système.

Partons du système à l'état neutre. Relions les armatures extrêmes A_1 et B_3 aux deux pôles d'une machine électrostatique. L'armature interne A_1 est portée au potentiel V_1 et l'armature externe B_3 est portée au potentiel V_4. Le système est soumis à la différence de potentiel $V = V_1 - V_4$. Etudions ce qui se passe.

L'armature interne A_1 prend une charge Q. Par influence totale sur B_1, celle-ci se recouvre d'une couche d'électricité $-Q$. Le conducteur formé par l'ensemble des armatures B_1 et A_2 est *isolé,* sa charge reste constante. Comme elle était initialement nulle, c'est qu'il apparaît sur A_2 la charge Q (nous négligeons les capacités des fils de communication). Ce conducteur est porté à un certain potentiel V_2. A_2 agit par influence totale sur B_2. Il appa-

rait sur B_2 la charge $-Q$ et par suite A_2 prend la charge Q. Appelons V_2 le potentiel du conducteur B_2A_2 ainsi chargé. Enfin l'armature B_3 prend, par influence totale, la charge $-Q$ sur sa face intérieure. La surface extérieure portera une charge Q' qui ne dépend que de V_4 et de la forme de cette surface (§ 78). En définitive, *tous les condensateurs portent la même charge Q.*

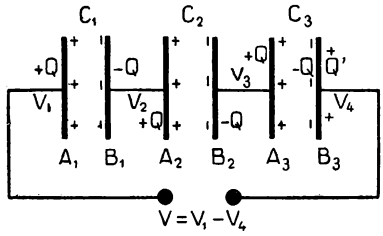


FIG. 95. — Condensateurs en série.

Mettons en communication les deux armatures extrêmes A_1 et B_3. La charge Q de A_1 vient neutraliser la charge $-Q$ qui se trouve sur la face intérieure de B_3, la charge Q' n'est pas modifiée puisqu'elle est en équilibre d'elle-même et les conducteurs isolés B_1A_2 et B_2A_3 reviennent à l'état neutre initial. *La charge totale mise en jeu pendant la décharge est donc égale à Q.*

Calculons la capacité C du condensateur unique équivalent à l'ensemble, c'est-à-dire qui, chargé sous la différence de potentiel $V = V_1 - V_4$, mettrait en jeu dans la décharge la même quantité d'électricité Q. Nous devons avoir : $Q = C(V_1 - V_4)$.

Appelons C_1, C_2, C_3 les capacités des condensateurs. Chacun possède la charge Q. Nous avons donc :

$$Q = C_1(V_1 - V_2) = C_2(V_2 - V_3) = C_3(V_3 - V_4) = C(V_1 - V_4).$$

De plus :

$$(V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + (V_3 - V_4) = V_1 - V_4.$$

Nous en déduisons : $\dfrac{Q}{C_1} + \dfrac{Q}{C_2} + \dfrac{Q}{C_3} = \dfrac{Q}{C}$.

D'où :

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

L'inverse de la capacité du condensateur équivalent à un groupement de condensateurs en série est égal à la somme des inverses des capacités des condensateurs utilisés.

Dans le cas particulier de n condensateurs identiques placés en série, la capacité de l'ensemble est telle que $\dfrac{1}{C} = \dfrac{n}{c}$, c étant la capacité d'un condensateur ; $C = c/n$. L'énergie emmagasinée dans le système est :

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} c \frac{V^2}{n}.$$

Elle est la somme des énergies emmagasinées par chaque condensateur de la série, mais *elle est* n *fois plus petite que celle d'un des condensateurs, pris isolément sous la différence de potentiel V.*

105. — Choix du groupement. — Supposons que nous désirions utiliser toute la différence de potentiel V d'une source d'électricité et emmagasiner

une énergie donnée W. Nous disposons de condensateurs identiques dont la différence de potentiel explosive est v et la capacité c.

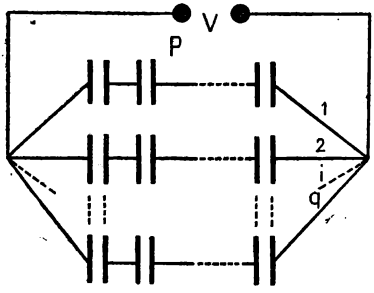


Fig. 96. — Groupement mixte.

Chaque condensateur ne pouvant supporter une différence de potentiel supérieure à v, nous partagerons la différence de potentiel V entre p condensateurs placés en série. Leur nombre p devra être tel que $\frac{V}{p} < v$. Une telle série aura pour capacité $\frac{c}{p}$.

Pour emmagasiner une énergie W, il faudra réaliser une capacité C telle que $W = \frac{1}{2} CV^2$, c'est-à-dire associer en parallèle q séries précédentes ; le nombre q étant tel que $q \times \frac{c}{p} = C$.

Un tel groupement comprenant q séries de p condensateurs, ces séries étant montées en parallèle, s'appelle un *groupement mixte* (fig. 96).

Exercices.

16. Une sphère conductrice S de rayon R = 6 cm est portée au potentiel V = 33 000 volts. L'ayant isolée de la source, on l'entoure d'une sphère S' concentrique de rayons intérieur et extérieur R' = 11 cm et R'' = 12 cm.

a) On dispose la sphère creuse S' autour de S en la maintenant isolée. Calculer le potentiel V_1 de S. — *b*) On met alors S' au sol. Calculer le nouveau potentiel V_2 de S. — *c*) On isole ensuite S' et on met S au sol. Calculer le potentiel V_3 de S'.

Réponse : $V_1 = 31\ 500$ volts ; $V_2 = 15\ 000$ volts ; $V_3 = -7\ 860$ volts.

17. Etudier les variations du champ et du potentiel entre les armatures d'un condensateur cylindrique. L'armature interne a un rayon de 1 cm et est au potentiel $V_0 = 30\ 000$ volts ; l'armature externe a un rayon intérieur de 8 cm et est au sol.

Réponse : $h = \frac{14450^{v/cm}}{r}$. $V^v = 14\ 450 \text{ Log } \frac{8}{r}$. (*Ecole Polytechnique*, 1938, 1° et 2°.)

18. Un condensateur cylindrique à air a pour rayons : r pour l'armature interne et R = 8 cm pour l'armature externe. L'armature interne est portée au potentiel $V_0 = 60\ 000$ volts et l'armature externe est au sol. Montrer que r doit être compris entre deux limites r_1 et r_2 pour que le champ entre les armatures ne dépasse nulle part 30 000 volts par cm.

Réponse : 9 mm $< r <$ 56 mm. (*Ecole Polytechnique*, 1938, 4°.)

19. Un condensateur de 0,1 μf est chargé sous une différence de potentiel de 100 000 volts. Calculer sa charge et son énergie. Quelles seraient les dimensions d'un conducteur sphérique de même capacité ?

20. Une sphère conductrice A de rayon $r = 2{,}5$ mm en aluminium, est suspendue par un fil isolant de 1 m à un point fixe O. La boule, chargée d'électricité, est placée entre les armatures d'un condensateur formé de deux plateaux verticaux distants de 10 cm. On établit entre les plateaux une différence de potentiel de 15 000 volts et on observe la position d'équilibre du fil de suspension de la boule qui fait un angle de 25' avec la verticale.

Quelle est la charge de la boule ? Que se passe-t-il si on introduit entre les plateaux un diélectrique liquide de densité 0,8 et de pouvoir inducteur spécifique $\varepsilon = 2{,}25$?

Densité de l'aluminium : 2,67. Accélération de la pesanteur : 981 C. G. S.

Réponse : Charge $q = 0{,}25$ u. E. S. ;

CHAPITRE XI

MESURES ÉLECTROSTATIQUES

106. — ***Mesure de la charge d'un condensateur.*** — On peut mesurer la charge d'un condensateur soit en déchargeant le condensateur et en mesurant la quantité d'électricité mise en jeu, soit en comptant, pendant la période de charge, combien de fois on envoie une quantité déterminée d'électricité au condensateur.

1re MÉTHODE. — Relions le condensateur chargé à un *galvanomètre balistique* (§ 271). C'est un appareil dont la déviation *maxima* α est proportionnelle à la quantité d'électricité qui a traversé le galvanomètre, pourvu que l'opération soit instantanée.

Le condensateur se décharge dans le galvanomètre balistique. Celui-ci reçoit une impulsion, il subit une brusque déviation et revient au zéro. Nous lisons au vol la déviation maximum α. La charge du condensateur est $Q = k\,\alpha$, k étant une constante qui dépend du galvanomètre, mais qu'il est inutile de connaître pour effectuer des mesures relatives. Si α_1 et α_2 sont les déviations relatives à deux charges Q_1 et Q_2, nous avons :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

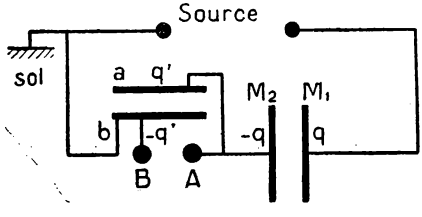


FIG. 97

2e MÉTHODE. — Cette méthode consiste à mesurer, pendant la charge, combien de fois la source d'électricité envoie une quantité d'électricité déterminée q_0 toujours la même. L'appareil qui sert à compter le nombre de fois que l'on introduit la charge q_0 est un condensateur en série avec le condensateur étudié et dont les armatures sont reliées à deux boules A et B séparées par une certaine distance d'air (fig. 97). Ce condensateur s'appelle une *bouteille de Lane.*

Mettons le système des deux condensateurs en communication avec une source d'électricité. Soit q la charge, à un certain instant, portée par l'armature interne M_1. Les charges sur les autres armatures sont respectivement : $-q$ sur M_2, $+q$ sur a et $-q$ sur b. Dès que la différence de potentiel entre les boules atteint la valeur qui correspond à la différence de potentiel

explosive entre A et B, une étincelle éclate ; les potentiels de A et B s'égalisent. Les charges $+ q_0$ et $- q_0$ qui sont alors sur les faces en regard des armatures M_1 et M_2 restent inchangées, car M_2 est un conducteur qui enveloppe totalement M_1 et qui forme écran électrique. Après le passage de l'étincelle, les mêmes phénomènes se reproduisent. Nous pouvons admettre que,

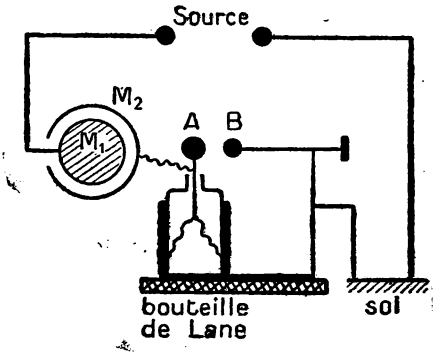


FIG. 98

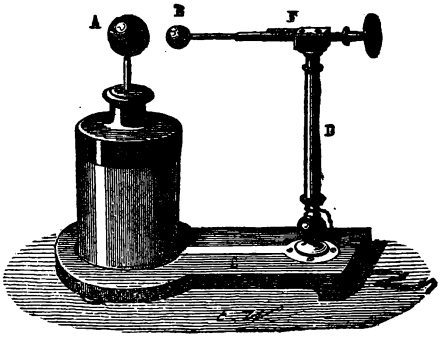


FIG. 99. — Bouteille de Lane.

pour une distance déterminée des boules et un état déterminé de l'atmosphère, l'étincelle éclate pour une valeur déterminée de la différence de potentiel entre A et B. Comme les capacités restent invariables, les étincelles successives correspondent à des charges égales q_0 des armatures a et b. Au moment de la n^e étincelle, les charges sur les armatures sont donc : $q' = nq_0$ sur M_1, $- q' = - nq_0$ sur M_2, q_0 sur a et $- q_0$ sur b.

En définitive, *le nombre des étincelles depuis le début de la charge mesure, en prenant comme unité la quantité d'électricité inconnue* q_0, *la charge du condensateur* M_1M_2. Le dispositif permet d'effectuer des mesures relatives de charges.

Pratiquement, il y a intérêt à ne pas avoir à compter un très grand nombre d'étincelles, c'est-à-dire à augmenter q_0. Or q_0 dépend de la capacité du condensateur ab et de la distance entre les boules A et B. Le dispositif généralement adopté est représenté par la figure 98. La **bouteille de Lane** est une sorte de bouteille de Leyde montée sur un socle isolant (fig. 99). L'armature interne est reliée à une boule A, l'armature externe est reliée à une boule B. Une vis micrométrique F permet de faire varier par très petites quantités la distance des deux boules et par suite la charge q_0 au moment de l'étincelle.

107. — ***Mesure de l'énergie d'un condensateur.*** — Il a été convenu (§ 92) d'appeler énergie d'un condensateur l'énergie électrique dépensée dans la décharge qu'on obtient en reliant les deux armatures par un circuit conducteur.

La décharge échauffe le circuit ; l'énergie électrique s'y transforme en énergie calorifique aisément mesurable.

Une complication tient à la production inévitable d'une étincelle au moment où l'on va fermer le circuit conducteur, en approchant de la seconde armature l'extrémité encore libre du fil. L'énergie de la décharge se dépense en partie dans le fil, en partie dans l'étincelle, et le fil seul est dans l'appareil de mesure.

Or l'expérience montre que l'étincelle est très faible quand le fil est suffisamment long et fin. La fraction de l'énergie totale dépensée dans l'étincelle est alors négligeable et la quantité de chaleur dégagée dans le fil mesure pratiquement, en valeur relative, l'énergie du condensateur.

Les expériences ont été faites par Riess à l'aide de l'appareil suivant :

Un ballon de verre (fig. 100), rempli d'air, communique avec un tube fin incliné contenant un liquide et aboutissant à l'extrémité inférieure d'un *large* récipient ouvert E. Dans le ballon est tendu le fil fin, siège du dégagement de chaleur à mesurer ; les bornes métalliques A et B qui traversent la paroi du ballon servent à mettre le fil en relation avec l'extérieur. L'une des bornes est reliée à une armature du condensateur par un conducteur relativement gros et court ; l'autre est reliée à l'autre armature par un *excitateur* (fig. 100), sorte de gros compas PP′ à ouverture variable, dont les branches métalliques, terminées par des boules, sont tenues à la main à l'aide de manches isolants M, M′. On constate sans difficulté que la presque totalité de la chaleur dégagée apparaît dans le fil long et fin S ; la chaleur produite dans les conducteurs gros et courts est négligeable vis-à-vis de la précédente (1).

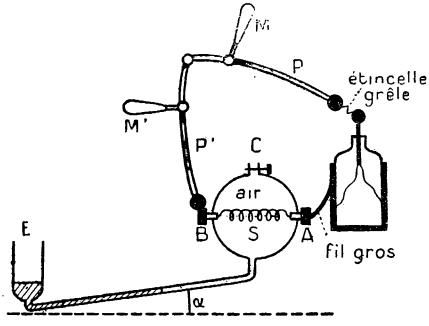


Fig. 100. — Thermomètre de Riess.

En définitive, on peut admettre dans des expériences ainsi réalisées, que la totalité de l'énergie du condensateur (en tout cas une fraction très notable de cette énergie et toujours la même pour un même circuit) apparaît sous forme de chaleur dans le ballon S. Cette chaleur produit un accroissement de la pression de l'air du ballon, qu'on lit sur le manomètre constitué par le tube incliné et le réservoir E d'autant plus facilement que, dans le vase large E, le niveau du liquide reste pratiquement constant.

Le déplacement de la surface libre du liquide dans le tube est proportionnel à l'énergie de la décharge et peut être par suite considéré comme une mesure relative de celle-ci. En effet, le phénomène observé est assez brusque pour qu'il n'y ait aucune quantité de chaleur sensible cédée soit au ballon, soit à l'extérieur. D'autre part, la finesse du tube incliné est telle que le volume

(1) Nous retrouverons ce même fait dans l'étude de la chaleur dégagée par le passage d'un courant électrique dans un conducteur ; il n'existe d'ailleurs aucune différence essentielle entre le passage de la décharge d'un condensateur dans un circuit conducteur et ce que nous appellerons plus tard un courant électrique.

de l'air renfermé dans l'appareil peut être considéré comme invariable. Dans ces conditions, l'accroissement de pression de l'air, proportionnel au déplacement du liquide dans le tube, est bien proportionnel à la quantité de chaleur dégagée dans le ballon et par suite aussi à l'énergie du condensateur.

La sensibilité de l'appareil est liée à celle du manomètre, qui est d'autant plus grande que le tube incliné fait avec l'horizon un plus petit angle. Un dispositif convenable permet de faire varier et de régler la sensibilité de l'appareil suivant la valeur de l'énergie à mesurer.

Résultats. — Riess a vérifié les formules établies dans les paragraphes précédents soit pour un condensateur unique, soit pour les divers groupements de condensateurs. Comme il s'agit seulement de vérifier des proportionnalités, il suffit de faire des mesures *relatives*.

L'énergie était mesurée à l'aide de l'appareil qui vient d'être décrit. La charge du condensateur était mesurée à l'aide d'une bouteille de Lane intercalée dans le circuit de charge. Enfin on pouvait comparer des énergies correspondant à une différence de potentiel constante entre les armatures, en faisant jaillir l'étincelle de décharge dans des conditions toujours les mêmes, c'est-à-dire entre les mêmes boules séparées par la même distance.

108. — Mesure des différences de potentiel. Electromètres. — Les appareils destinés à mesurer les différences de potentiel électrostatique s'appellent des *électromètres* ou *voltmètres électrostatiques*. En principe, on soumet un condensateur à la différence de potentiel V à mesurer et on déduit V de la mesure de la force d'attraction entre les armatures. Etudions quelques types d'électromètres.

1° ELECTROMÈTRE A PLATEAUX. — Il est constitué par un *condensateur plan* (fig. 101) dont l'un des plateaux A_1 est relié au fléau d'une balance ; l'autre plateau A_2 peut se déplacer à l'aide d'un bouton B qui agit sur une tige à crémaillère portant A_2. La balance est en équilibre quand A_1 et A_2 sont au même potentiel.

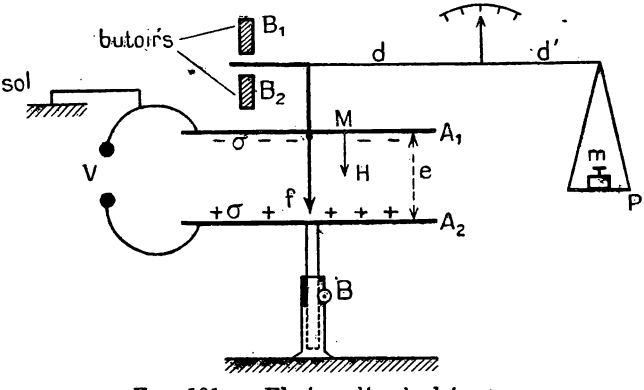


FIG. 101. — Electromètre à plateaux.

Pour faire une mesure, on met une masse *m* sur le plateau P et, A_1 et A_2 étant assez éloignés, on établit entre ces plateaux la différence de potentiel V à mesurer. L'équilibre ne subsiste pas et le fléau vient cogner contre le butoir B_1. On soulève alors le plateau A_2 jusqu'à ce que l'équilibre soit de nouveau réalisé,

En réalité, l'équilibre est instable et le fléau quitte B_1 pour venir buter contre B_2. A ce moment, on mesure la distance e entre les plateaux.

Cherchons la relation entre V, e et m. Le plateau A_1 est soumis, de la part des charges situées sur A_2, à une force d'attraction f que nous allons calculer. Le condensateur de capacité $C = \frac{\varepsilon S}{4\pi e}$ porte une charge $Q = CV = \frac{\varepsilon SV}{4\pi e}$. Par suite, la densité superficielle sur chaque armature est :

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{\varepsilon V}{4\pi e}. \qquad (1)$$

Les charges de A_2 créent en chaque point M de la surface de A_1 un champ $H = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}$ (§ 44) qui est normal à A_1. Chaque élément dS du plateau A_1 est soumis à une force verticale :

$$df = H \times \sigma dS = \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon} dS.$$

Le plateau tout entier est soumis à la résultante f de toutes ces forces élémentaires *parallèles* :

$$f = \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon} S ;$$

ou, en remplaçant σ par sa valeur donnée par la relation (1)

$$\boxed{f = \frac{\varepsilon SV^2}{8\pi e^2}.}$$

Désignons par d et d' les bras du fléau et écrivons que la balance est en équilibre. Nous obtenons :

$$fd = mgd' ;$$

$$\frac{\varepsilon SV^2}{8\pi e^2} d = mgd' ;$$

$$V^2 = \frac{8\pi e^2}{\varepsilon S} \frac{d'}{d} mg.$$

La détermination de V se ramène à des mesures de longueurs (d, d', e), de surface (S) et de masse (m). L'appareil permet d'effectuer des mesures absolues.

A ce type d'électromètre se rattachent l'*électromètre absolu de Lord Kelvin*, *l'électromètre à plateaux d'Abraham* et, pour les grandes différences de potentiel (200 à 300 kilovolts), le *voltmètre électrostatique Abraham-Villard*. Ces appareils diffèrent entre eux par leur sensibilité et par des détails de construction.

2° Électromètre cylindrique. — Il est constitué par un *condensateur cylindrique* dont l'armature interne n'est que partiellement enfoncée dans l'armature externe.

Prenons un condensateur cylindrique comprenant deux cylindres de même axe, de rayons R_1 et R_2. Le cylindre intérieur n'est que *partiellement* enfoncé dans l'autre (fig. 102) et les surfaces sont en regard sur une longueur l. Chargeons ce condensateur en établissant entre les armatures une différence de potentiel V. Le cylindre intérieur est soumis, de la part des charges du cylindre extérieur, à une force f qui, puisque l'ensemble est de révolution autour de l'axe, est dirigée suivant cet axe. Calculons cette force.

Pour cela nous allons faire subir à l'armature interne un petit déplacement et exprimer que la variation d'énergie du condensateur est égale à la somme du travail mécanique dû à la force f et du travail électrique qu'il a fallu fournir (Principe de la conservation de l'énergie).

Supposons que l'on soulève le cylindre intérieur de dl en maintenant *sa*

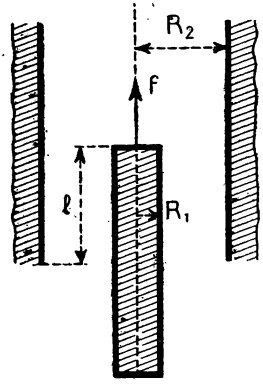


FIG. 102

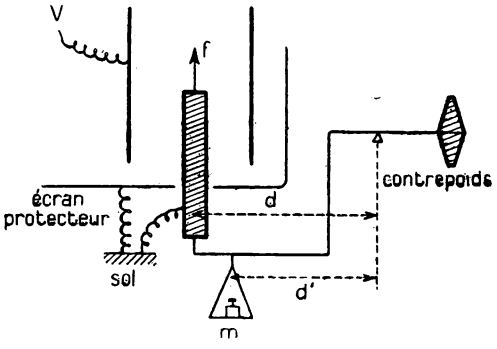


FIG. 103. — Electromètre Bichat et Blondlot.

charge constante, c'est-à-dire après avoir coupé la communication des armatures avec la source. L'énergie du condensateur qui est $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ a diminué puisque C augmente. Elle a varié algébriquement de :

$$dW = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\,dC.$$

Le système a *fourni* un travail mécanique $f\,dl$ et aucun travail électrique puisque la charge reste invariable. La variation d'énergie étant égale au travail *reçu*, nous avons : $dW = -f dl$. D'où :

$$f = -\frac{dW}{dl} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{dC}{dl}. \qquad (1)$$

Or, $\frac{Q}{C} = V$, et $C = \frac{\varepsilon l}{2L\frac{R_2}{R_1}}$ d'où $\frac{dC}{dl} = \frac{\varepsilon}{2L\frac{R_2}{R_1}}$. Par suite :

$$f = \frac{\varepsilon V^2}{4L\frac{R_2}{R_1}}.$$

C'est sur cette expression de f en fonction de V qu'est basé *l'électromètre cylindrique de Bichat et Blondlot* qui est schématisé sur la figure 103.

A l'équilibre, on a la relation (fig. 103) :

$$fd = mgd' ;$$

$$\frac{\varepsilon V^2}{4L\dfrac{R_2}{R_1}} = mg\frac{d'}{d} ;$$

$$V^2 = \frac{4}{\varepsilon} \times \frac{d'}{d} \times mg\, L \frac{R_2}{R_1}.$$

La différence de potentiel se déduit de la valeur de m qui réalise l'équilibre.

3° ELECTROMÈTRE A QUADRANTS. — Il est constitué par deux armatures A_1 et A_2 parallèles et ayant la forme de secteurs circulaires (fig. 104) ; les surfaces en regard constituent un secteur d'angle α. Etudions le couple μ qui agit sur ce système. Opérons comme dans le cas de l'électromètre cylindrique.

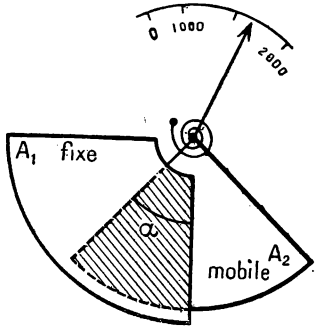


FIG. 104

La communication des armatures avec la source étant supposée rompue, faisons tourner l'armure mobile A_2 d'un petit angle $d\alpha$. Le système a *fourni* un travail mécanique $\mu d\alpha$; il n'y a aucun travail électrique puisque la charge reste invariable ; enfin l'énergie du condensateur qui est $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ a diminué. Elle a varié algébriquement de : $dW = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}dC$.

La variation d'énergie étant égale au travail *reçu*, nous avons :

$$dW = -\mu d\alpha = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}dC \text{ ; d'où } \mu = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{dC}{d\alpha}.$$

Or, la capacité du condensateur est proportionnelle à l'aire des surfaces en regard, donc à α. On a : $C = k\alpha$, k étant la capacité par unité d'angle, d'où :

$$\mu = \frac{1}{2}k\frac{Q^2}{C^2} = \frac{1}{2}kV^2 ;$$

$$\boxed{\mu = \frac{1}{2}kV^2}$$

Le couple qui agit sur le système est indépendant de α et proportionnel au carré de la différence de potentiel (1).

Pour mesurer V, il suffit de mesurer ce couple en lui opposant des forces antagonistes dont le moment est proportionnel à l'angle de rotation (couple de torsion). L'angle de rotation du secteur mobile est alors proportionnel à

(1) Ce résultat n'est valable que si les bords du secteur supérieur sont assez éloignés de ceux du secteur inférieur. Quand ces bords se rapprochent l'influence des bouts, dont nous n'avons pas tenu compte, se fait sentir.

V^2. On augmente la sensibilité en multipliant le nombre des secteurs fixes et mobiles (*voltmètre multicellulaire*).

REMARQUE. — Le raisonnement utilisé dans le cas du condensateur cylindrique et de l'électromètre à quadrants est général. Nous avons :

$$f_l = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dl} ;$$

f_l étant la composante de la force dans la direction de dl.

Cette formule nous montre que f_l et dl sont de même signe quand $dC > 0$. *La force est dirigée dans le sens du déplacement qui augmente la capacité.*

4° ELECTROMÈTRE A QUADRANTS DE LORD KELVIN. — Il est du même type que le précédent, mais le secteur mobile A_2 (fig. 104) est remplacé par une

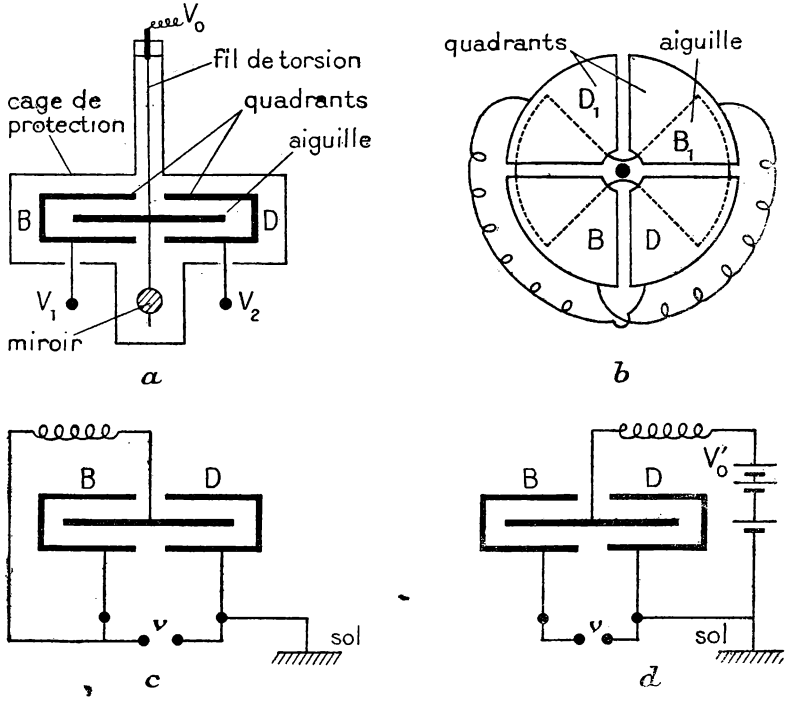


FIG. 105. — Electromètre à quadrants : a) *élévation* ; b) *plan* ; c) *montage idiostatique* ; d) *montage hétérostatique*.

aiguille (fig. 105-*b*) formée de deux secteurs rectangulaires opposés. Deux groupes de boîtes fixes B, B_1 et D, D_1 (*quadrants*) jouent le même rôle que le secteur fixe A_1 précédent (fig. 104).

Désignons par V_0, V_1 et V_2 (fig. 105, *a*) les potentiels de l'aiguille, du groupe de quadrants BB_1 reliés ensemble, et du groupe de quadrants DD_1 reliés ensemble. On peut considérer l'appareil comme formé de *deux* condensateurs : le premier est constitué par la paire de quadrants BB_1 et la partie de l'aiguille en regard, la différence de potentiel entre les armatures est $V_0—V_1$; le second est formé par la paire de quadrants DD_1 et la portion de l'aiguille en regard, la différence de potentiel entre les armatures est $V_0—V_2$.

L'aiguille est suspendue à un fil de torsion de constante K. D'après ce que nous avons vu au 3°, les quadrants BB_1 exercent sur l'aiguille un couple $\mu_1 = \frac{1}{2} k (V_0 - V_1)^2$ qui tend à faire rentrer l'aiguille dans B. De même, les quadrants DD_1 exercent sur l'aiguille un couple $\mu_2 = \frac{1}{2} k (V_0 - V_2)^2$ qui tend à faire rentrer l'aiguille dans D. *Ces couples sont de sens contraires.* La constante k qui intervient dans μ_1 et μ_2 est la capacité par unité d'angle de l'un des deux condensateurs, elle a la même valeur pour les deux, vu la symétrie de l'appareil.

L'action résultante est un couple de moment :

$$\mu = \mu_2 - \mu_1 = \frac{1}{2} k (V_0 - V_2)^2 - \frac{1}{2} k (V_0 - V_1)^2$$

$$\mu = k \left[V_0 - \frac{V_1 + V_2}{2} \right] (V_1 - V_2).$$

L'aiguille va tourner d'un angle θ tel que le couple de torsion $K\theta$ équilibre le couple électrique. On a donc :

$$K\theta = k \left(V_0 - \frac{V_1 + V_2}{2} \right) (V_1 - V_2)$$

1° *Montage idiostatique.* — Il est schématisé sur la figure 105-*c*. La différence de potentiel à mesurer est v. On fait :

$$V_0 = v \qquad V_1 = v \qquad V_2 = 0$$

d'où :

$$K\theta = \frac{1}{2} k v^2.$$

L'angle de rotation θ est proportionnel au carré de la différence de potentiel v. Ce montage n'est sensible que si v est assez grand.

2° *Montage hétérostatique.* — Il est employé pour les *faibles* valeurs de v et met en jeu une différence de potentiel auxiliaire V'_0 (batterie de 100 à 200 volts). Ce montage est schématisé sur la figure 105-*d*. On fait :

$$V_0 = V'_0 \qquad V_1 = v \qquad V_2 = 0$$

d'où :

$$K\theta = k \left(V'_0 - \frac{v}{2} \right) v$$

Comme v est faible devant V'_0, nous pouvons écrire :

$$K\theta = k V'_0 v$$

L'angle de rotation θ est proportionnel à la différence de potentiel à mesurer V.

109. — ***Mesure des capacités.*** — On réalise facilement un condensateur calculable en adoptant la forme du condensateur plan à lame d'air avec anneau de garde (§ 95). La capacité se calcule d'après les dimensions par la formule $C = \frac{S}{4\pi e}$. On réalise une *mesure absolue* en unités électrostatiques. La mesure d'une capacité quelconque s'effectuera par comparaison avec celle d'un condensateur calculable ou étalonné. C'est une *mesure relative.* Indiquons sommairement le principe de différentes méthodes utilisées.

1re MÉTHODE. — Prenons un condensateur étalonné de capacité C_0. Etablissons entre ses armatures une différence de potentiel V_0 mesurée avec un électromètre. Isolons-le et groupons-le en parallèle avec le condensateur dont on veut mesurer la capacité C inconnue (fig. 106). Mesurons ensuite, avec un électromètre, la différence de potentiel V_1 entre les armatures.

Dans cette opération, la charge Q_0 de l'ensemble est restée constante. Nous avons donc:

$$Q_0 = C_0V_0 = (C_0 + C)\,V_1.$$

D'où :

$$\frac{C}{C_0} = \frac{V_0}{V_1} - 1.$$

2e MÉTHODE. — Chargeons les deux condensateurs, de capacités C_0 connue et C inconnue, avec la même source (fig. 107). Ils prennent respectivement les charges $Q_0 = C_0V_0$ et $Q = CV_0$. Déchargeons-les l'un dans l'autre en reliant l'armature interne de l'un à l'armature externe de l'autre et réciproquement (fig. 108) et mesurons à l'électromètre la différence de potentiel V_1 entre A et B.

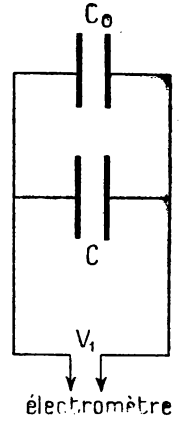


FIG. 106

L'ensemble des deux armatures P_0 et P' forme un seul conducteur portant la charge $Q_0 - Q$, somme de leurs charges. De même l'ensemble des armatures P'_0 et P porte la charge $-(Q_0 - Q)$. L'ensemble est constitué par le groupement de deux condensateurs montés en parallèle entre A et B. La capacité de l'ensemble est donc $C + C_0$ et la différence de potentiel est V_1. Nous avons donc :

$$Q_0 - Q = (C + C_0)\,V_1.$$
$$C_0V_0 - CV_0 = (C + C_0)\,V_1.$$

D'où :

$$\frac{C}{C_0} = \frac{V_0 - V_1}{V_0 + V_1}.$$

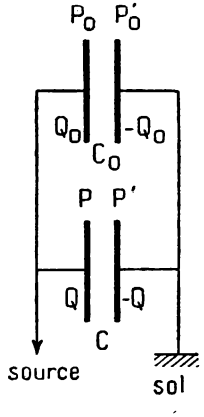


FIG. 107

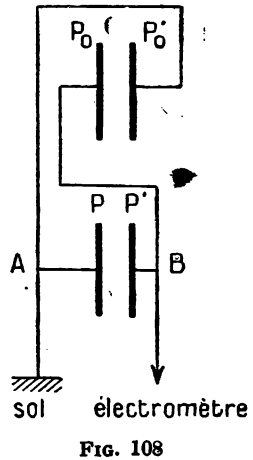


FIG. 108

3e MÉTHODE. — Réalisons le montage schématisé par la figure 109 et modifions la capacité réglable C_2 de façon qu'un électromètre sensible, placé entre les points I et K, indique une différence de potentiel nulle.

Les condensateurs de capacité C_1 et C_2 placés en série possèdent la même charge Q. D'où :

$$Q = C_1\,(V_A - V_I) = C_2\,(V_I - V_B).$$

De même les deux condensateurs de capacité C_3 et C_4 possèdent la même charge :

$$Q' = C_3\,(V_A - V_K) = C_4\,(V_K - V_B).$$

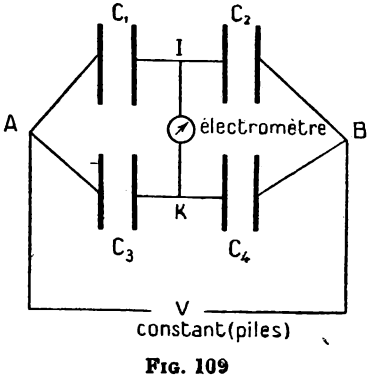


FIG. 109

Si les points I et K sont au même potentiel $V_I = V_K$, d'où l'on déduit :

$$\frac{C_1}{C_3} = \frac{C_2}{C_4}, \quad \text{ou} \quad C_1C_4 = C_2\,C_3.$$

*110. — **Décharge d'un condensateur.*** — Lorsque nous relions par un fil métallique conducteur les deux armatures d'un condensateur portées aux potentiels V_1 et V_2, le condensateur se décharge, les potentiels des armatures deviennent égaux à V_2 (§ 92). Observons ce qui se passe au voisinage du fil de raccord : nous trouvons les phénomènes caractéristiques du *courant électrique* (échauffement du fil, déviation de l'aiguille aimantée) (§ 111).

On appelle intensité i du courant à l'instant t, la quantité $i = \frac{dq'}{dt}$, dans laquelle dq' est la quantité d'électricité qui a traversé le fil entre les instants t et $t + dt$. Etudions comment varient la charge du condensateur et l'intensité du courant pendant la décharge.

1er Cas. — *Le fil de communication n'a pas de self-induction.* — Appelons R la résistance du fil. Soit q, v et i les valeurs respectives de la charge du condensateur, de la différence de potentiel entre les armatures et de l'intensité du courant à l'instant t.

La loi d'Ohm (§ 140), appliquée à l'instant t, donne la relation : $v = Ri$.

Or $v = \frac{q}{C}$, C étant la capacité du condensateur. De plus, la quantité d'électricité dq' qui traverse le fil pendant le temps dt est égale à la *diminution* de la charge q. D'où $dq' = -dq$ et $i = -\frac{dq}{dt}$.

Le relation $v = Ri$ devient : $\frac{q}{C} = -R\frac{dq}{dt}$,

$$\boxed{CR\frac{dq}{dt} + q = 0.}$$

L'intégration de cette équation différentielle donne : $q = Ae^{-\frac{t}{CR}}$

Au temps $t = 0$, on doit avoir : $q = Q = CV$, d'où : $A = CV$.

$$q = CVe^{-\frac{t}{CR}} \quad \text{et} \quad i = -\frac{dq}{dt} = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{CR}}$$

Les variations de q et i sont représentées sur les figures 110, I et II.

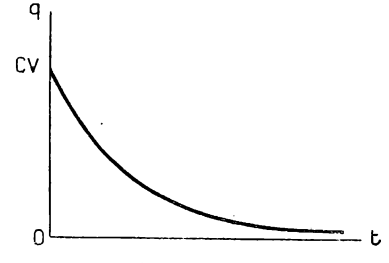


Fig. 110-I.

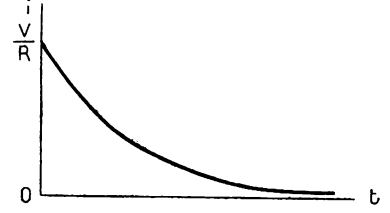


Fig. 110-II.

2e Cas. — *Le fil de communication possède un coefficient de self-induction.* — Le mode de raisonnement est analogue, mais il faut tenir compte de la force électromotrice de self-induction. Les résultats sont les suivants :

α) Si la résistance est grande ou la self-induction du circuit faible, la charge du condensateur décroît constamment (fig. 111, *a*).

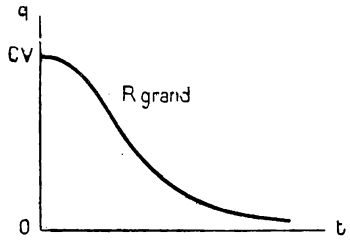


FIG. 111-*a*.

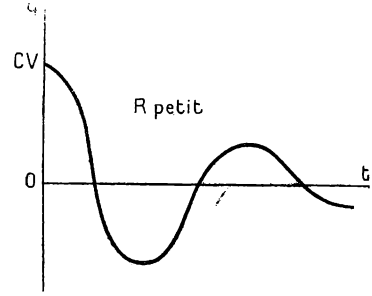


FIG. 111-*b*.

β) Si la résistance est faible ou la self-induction très grande, la décharge est oscillante. La charge est une fonction sinusoïdale amortie (fig. 112, *b*).

REMARQUE. — On pourrait étudier de même la charge du condensateur, c'est-à-dire les variations de q avec le temps à partir du moment où l'on a établi la communication avec la source. L'équation exprimant la loi d'Ohm est, si E est la *f. é.m.* de la source :

$$E - \frac{q}{C} = iR = R\frac{dq}{dt} \qquad \text{d'où} \qquad q = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

La charge croît exponentiellement en fonction du temps.

Exercices.

21. Un condensateur plan est mis en communication avec une source créant entre les armatures une différence de potentiel V. Calculer V en volts sachant que les plateaux, distants de 1 cm, ont une surface de 1m² et s'attirent avec une force de 100 grammes-poids. On prendra $g = 981$ C. G. S.

Réponse : V = 4710 volts.

22. On charge un condensateur plan ayant une capacité de 1 μf avec un générateur de résistance négligeable et de f. é. m. E = 300 volts. La communication est établie par un fil de résistance $r = 10$ mégohms.

Trouver la loi de variation de la charge du condensateur avec le temps et calculer le temps nécessaire pour que la charge ne diffère de sa valeur limite que de $\frac{1}{500}$ de celle-ci.

23. On charge un condensateur dont la capacité est $C_0 = 0{,}1$ μf en créant, entre ses armatures, une différence de potentiel de 1000 volts. On l'isole de la source et on le groupe en parallèle avec un autre condensateur de capacité $C_1 = 0{,}2$ μf. Calculer la différence de potentiel et la charge de chaque condensateur.

24. Un condensateur plan est constitué par deux plateaux séparés par un diélectrique de pouvoir inducteur spécifique $\varepsilon = 2{,}2$. La capacité du condensateur est 1 μf. On crée entre les plateaux une différence de potentiel $V_0 = 300$ volts et on l'isole.

En supposant le diélectrique légèrement conducteur et ayant une résistivité $\rho = 10^{15}$ $\Omega \times$ cm, étudier la décharge et montrer que le temps t au bout duquel le condensateur a perdu la moitié de sa charge est indépendant des dimensions du condensateur et ne dépend que des propriétés du diélectrique (voir le tableau des unités § 274).

Réponse : $t = \frac{\varepsilon\rho}{4\pi}\,\text{Log}\,2 = 134\,000$ s. (*École Navale*, 1931, 5°.)

25. Un condensateur plan est formé de deux plateaux distants de 1 cm. Sa capacité est de 1 μf. On établit entre les armatures une différence de potentiel de 30 000 volts. Calculer le travail nécessaire pour écarter les plateaux et les amener à une distance de 10 cm. On supposera : α) Qu'on opère à charge constante. — β) Qu'on opère à potentiel constant.

Réponse : α) $\mathcal{C}_1 = 4050$ joules ; β) $\mathcal{C}_2 = 405$ joules.

TROISIÈME PARTIE

ÉLECTRODYNAMIQUE

CHAPITRE XII

GÉNÉRALITÉS SUR LE COURANT ÉLECTRIQUE

111. — Courant électrique. — Nous avons vu (§ 110) que, lorsque nous réunissons les armatures d'un condensateur par un fil conducteur, il y a écoulement d'électricité dans le fil et le condensateur se décharge. De plus le fil est le siège d'un dégagement de chaleur et une aiguille aimantée placée au voisinage du fil est soumise à une action directrice. Enfin, si l'on réunit les armatures d'un condensateur chargé aux extrémités d'un circuit conducteur comprenant un récipient contenant une solution de sel marin, celle-ci subit une décomposition chimique (1).

Les mêmes phénomènes s'observent, avec une intensité plus ou moins grande, si l'on remplace le condensateur par d'autres appareils appelés des *générateurs électriques*. Les principaux générateurs utilisés sont les piles, les accumulateurs, les dynamos. Mais tandis qu'avec un condensateur les phénomènes observés ne durent qu'un temps assez court, avec les générateurs précédents, ils se manifestent d'une façon continue. Ces générateurs sont assimilables à un condensateur entre les armatures duquel on maintiendrait une différence de potentiel constante, ce qui permettrait un écoulement continu d'électricité. Dans tous les cas, on dit que le fil est le siège d'un *courant électrique*.

D'une manière générale, nous dirons qu'un fil est traversé par un courant électrique si nous pouvons observer *simultanément* les phénomènes suivants qui sont d'ailleurs inséparables les uns des autres :

1° Le fil est le siège d'un dégagement de chaleur ;

2° Une aiguille aimantée librement suspendue au voisinage du fil est déviée ;

3° Un aimant approché du fil exerce sur lui une force.

(1) Pour obtenir une décomposition visible, il est nécessaire de faire passer dans le circuit plusieurs décharges successives.

4° Si l'on coupe le fil et que l'on plonge ses extrémités dans une solution aqueuse de sel marin, il se produit une décomposition chimique de la solution.

C'est cet ensemble de phénomènes qui définit l'existence du courant électrique.

112. — Sens du courant. — Tout générateur électrique possède deux pièces métalliques appelées *bornes* ou *pôles* du générateur et par lesquelles on le met en communication avec l'extérieur. Quand les deux pôles sont isolés, il ne se produit rien, le générateur est dit *en circuit ouvert.*

Relions les deux bornes A et B d'un générateur par une chaîne conductrice comprenant : un tube en U contenant une solution de sel marin, un fil immergé dans l'eau d'un calorimètre et une boucle circulaire en cuivre placée dans le plan vertical d'une aiguille aimantée horizontale *ns* située au centre de la boucle (fig. 112). Nous constatons :

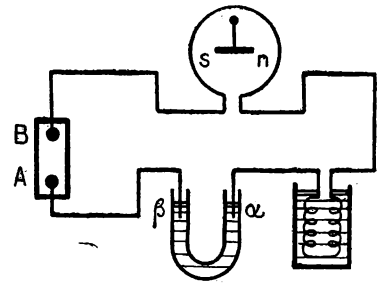


FIG. 112

1° qu'il apparaît dans le compartiment α du tube en U de la soude et dans le compartiment β du chlore.

2° que l'eau du calorimètre s'échauffe ;

3° que le pôle nord de l'aiguille aimantée *ns* est déplacé en *avant* du plan de figure.

Intervertissons les connexions, c'est-à-dire fixons en B l'extrémité du fil qui était attachée en A et inversement. Nous observons que la soude apparaît dans le compartiment β et le chlore en α, que l'eau du calorimètre s'échauffe et que le pôle nord de l'aiguille *ns* est dévié en *arrière* du plan de figure.

Les phénomènes caractéristiques du courant, sauf l'effet calorifique, ont changé de sens. Nous dirons que *le courant a changé de sens.*

Remarquons que, quelles que soient les connexions, la soude apparaît toujours dans le compartiment qui est relié au pôle B. Les deux pôles ne sont donc pas identiques. Nous conviendrons d'appeler *pôle positif* du générateur celui qui est relié à la branche où apparaît le chlore, l'autre est le *pôle négatif.* En principe, pour déterminer la nature de chacun des pôles d'un générateur, il suffit de relier ces pôles à un tube en U contenant une solution de sel marin et de déceler la branche où se forme le chlore par la teinture d'indigo. Le fil qui arrive à cette branche est relié au pôle positif.

Nous savons déceler quand un courant *change de sens* mais non le sens lui-même. Ce choix sera fait arbitrairement et ne correspond à aucun phénomène physique.

PAR CONVENTION, *le sens du courant sera celui qui va, dans le circuit extérieur, du pôle positif au pôle négatif du générateur.*

113. — Nature d'un courant électrique. — Dans le cas de la décharge d'un condensateur, le courant électrique est dû à un écoulement d'électricité puisqu'il y a neutralisation des charges des armatures. Nous ne savons pas s'il y a transport d'électricité positive de l'armature interne portée au potentiel V_1 sur l'armature externe portée au potentiel V_2 ($V_2 < V_1$) ou transport d'électricité négative en sens inverse ou même les deux phénomènes simultanés. Le pôle positif du condensateur est l'armature interne, le pôle négatif est l'armature externe. La convention faite sur le sens du courant revient donc à considérer la décharge comme un transport d'électricité positive dans le sens du courant.

La théorie électronique (§ 36) va nous donner une interprétation plus concrète. Le métal conducteur qui établit la communication avec les armatures possède des électrons libres (§ 69). Quand on le relie aux armatures, on crée entre les extrémités du fil une différence de potentiel, d'où un champ électrique. Les électrons, chargés négativement, vont se déplacer en sens inverse du champ. Ils vont venir neutraliser la charge de l'armature interne. L'équilibre sera atteint lorsque le champ sera nul à l'intérieur du fil, c'est-à-dire quand les armatures seront au même potentiel. *Le courant électrique dans le fil métallique est donc un déplacement d'électrons, c'est-à-dire un courant d'électricité négative en sens inverse du sens convenu précédemment.* Ce résultat est logique puisque la convention adoptée revenait à un déplacement d'électricité *positive*. Malgré ce paradoxe d'admettre pour sens du courant le sens inverse du déplacement réel, nous conserverons le sens convenu au paragraphe 112 qui est universellement adopté.

D'une manière générale tous les courants électriques, quelles que soient leurs origines et leurs durées, sont dus à des transports de charges qui sont des électrons ou des atomes ayant gagné ou perdu des électrons et qu'on appelle des ions. Rowland a montré l'identité entre les courants électriques produits par les générateurs et les masses électriques en mouvement par l'expérience suivante :

On fait tourner un disque d'ébonite, électrisé sur une couronne dorée de faible largeur, et on étudie son action sur une aiguille aimantée. Rowland a montré :

1° Que des masses électriques animées d'un mouvement circulaire et un courant passant dans une spire circulaire avaient des effets identiques sur l'aiguille aimantée ;

2° Que le transport de masses positives dans un sens produit qualitativement et quantitativement les mêmes effets que le transport de masses négatives équivalentes en sens inverse ;

3° Que le sens arbitraire adopté pour le courant est le sens dans lequel devraient se déplacer des masses positives.

114. — Intensité d'un courant électrique. — Reprenons l'expérience du paragraphe 112. Entre les bornes d'un générateur, nous avons monté un circuit comprenant un tube contenant de l'eau salée, un fil immergé dans

l'eau d'un calorimètre et une boucle au centre de laquelle est disposée une aiguille aimantée. Remplaçons successivement le générateur par d'autres générateurs. Nous observons les mêmes phénomènes, mais avec une intensité plus ou moins marquée. De plus, les différents phénomènes observés (décomposition chimique, échauffement, déviation) varient toujours en même temps et dans le même sens. Il est normal d'attribuer les variations de ces effets à des variations de leur cause commune qui est le courant électrique. *Nous dirons qu'un courant est plus intense qu'un autre si, dans un même circuit, le premier produit des effets plus marqués que le second.*

D'autre part, considérons le courant en lui-même, c'est-à-dire comme un déplacement de charges électriques. Il est légitime de caractériser son intensité par la quantité d'électricité qu'il transporte par seconde.

Pour concilier ces deux points de vue, étudions le rapport qui existe entre le déplacement des charges électriques et les effets du courant. Pour cela, prenons le cas où la quantité d'électricité mise en jeu est mesurable, par exemple la décharge d'un condensateur. Nous observons que, si la charge du condensateur est multipliée par n, la décomposition d'une solution aqueuse de sel marin, que nous pouvons caractériser par la quantité de chlore libérée, est aussi multipliée par n. Ce résultat est général quel que soit le corps décomposé par le passage d'un courant. Nous pouvons donc caractériser l'intensité d'un courant continu soit par la quantité d'électricité qu'il transporte par seconde, soit par la quantité d'une substance donnée qu'il décompose par seconde ; ces deux grandeurs sont proportionnelles. D'où les deux définitions *équivalentes* de l'intensité d'un courant :

1° DÉFINITION ÉLECTROSTATIQUE. — **L'intensité d'un courant invariable est une grandeur proportionnelle à la quantité d'électricité qu'il transporte par seconde.**

Nous prendrons le coefficient de proportionnalité égal à 1 dans tous les systèmes d'unités, ce qui revient à faire dériver l'unité d'intensité de l'unité de quantité d'électricité ou inversement.

Si un courant invariable transporte la quantité d'électricité q pendant le temps t, son intensité i est :

$$i = \frac{q}{t}.$$

L'unité d'intensité correspond à $q = 1$ et $t = 1$. En particulier :

L'unité électrostatique C. G. S. d'intensité de courant est l'intensité d'un courant constant qui transporte en une seconde une quantité d'électricité égale à l'unité électrostatique C. G. S. Cette unité est rarement employée.

L'équation aux dimensions d'une quantité d'électricité étant

$$Q = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \text{ (§ 39)},$$

celle d'une intensité de courant, dans un système électrostatique, sera :

$$I = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$$

REMARQUE. — Dans le cas d'un courant variable, l'intensité à un instant t est définie par $i = \frac{dq}{dt}$ (§ 110).

2° DÉFINITION ÉLECTROCHIMIQUE. — **L'intensité d'un courant constant est une grandeur proportionnelle à la quantité de substance décomposée par seconde par le passage du courant.**

Ceci revient à dire que le rapport des intensités de deux courants est égal, par définition, au rapport des masses d'une même substance décomposées pendant le même temps. Pour pouvoir évaluer numériquement les intensités ainsi définies, il suffit de faire choix d'une unité.

L'unité pratique d'intensité de courant est l'**ampère** (symbole A). D'après a loi du 2 avril 1919 :

L'ampère est l'intensité d'un courant invariable qui, en passant à travers une solution de nitrate d'argent, dépose 1,11800 *mg d'argent par seconde.*

La comparaison de l'ampère à l'unité électrostatique C. G. S. a montré que :

$$1 \text{ ampère} = 3 \times 10^9 \text{ U. E. S. C. G. S.}$$

L'unité correspondante de quantité d'électricité se déduit de l'ampère par la formule $q = it$. C'est le **coulomb** (symbole C). D'après le décret du 26 juillet 1919, *le coulomb est la quantité d'électricité qui, passant à travers une solution de nitrate d'argent, dépose* 1,11800 *mg d'argent.*

$$1 \text{ coulomb} = 3 \times 10^9 \text{ U. E. S. C. G. S.}$$

On utilise fréquemment une unité de quantité d'électricité appelée *ampère-heure.* C'est, par définition, la quantité d'électricité transportée par un courant constant de 1 ampère pendant une heure. Cette unité vaut 3 600 coulombs.

*115. — **Mesure de l'intensité d'un courant.*** — Pour mesurer l'intensité d'un courant, on ne cherche pas à déterminer la quantité d'électricité transportée par seconde, mais on utilise les effets du courant qui sont plus faciles à mesurer.

D'après la définition électrochimique de l'intensité, il suffit de faire passer le courant à mesurer, pendant un temps déterminé t secondes, dans une solution de nitrate d'argent et de mesurer le poids p^{mg} d'argent déposé. D'après la définition de l'ampère, l'intensité I du courant est :

$$I^A = \frac{p^{mg}}{1{,}118 \times t}$$

Pratiquement, il faut que toute l'électricité qui traverse la solution serve à déposer de l'argent et, de plus, que tout l'argent déposé soit recueilli. L'appareil utilisé s'appelle un voltamètre à azotate d'argent. Nous le décrirons plus loin (§ 122).

Cette mesure peut être précise, mais elle est longue et délicate. Elle est

utilisée pour les mesures absolues d'intensité et pour l'étalonnage d'autres appareils plus commodes appelés *ampèremètres* (fig. 113). Ils sont basés sur les propriétés électro-magnétiques des courants. Ces appareils sont munis d'une aiguille qui se déplace devant un cadran gradué en ampères. Par simple lecture, on obtient l'intensité du courant. Les *galvanomètres* sont des appareils analogues aux ampèremètres mais très sensibles. Ils sont destinés à mesurer des courants très faibles de l'ordre du millionième d'ampère ou à constater qu'il ne passe aucun courant dans un circuit.

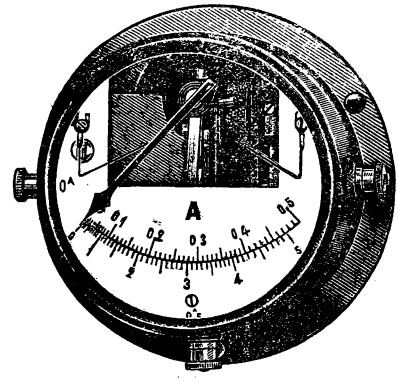


Fig. 113. — Ampèremètre à deux sensibilités (diamètre : 10 cm).

116. — Energie électrique. — Le courant électrique est capable de produire des effets où se manifeste de l'énergie. Dans la décomposition d'une substance, il y a production d'énergie chimique ; dans l'échauffement d'un fil, il y a production d'énergie calorifique ; dans l'action sur l'aiguille aimantée, il y a production de travail. On dit que le courant possède de l'énergie électrique.

L'énergie mise en œuvre par le courant provient du générateur. Un condensateur qui se décharge a son énergie qui diminue. Dans une pile en fonctionnement il se produit des phénomènes chimiques qui diminuent l'énergie chimique de la pile. Dans une dynamo, le courant électrique provient de la rotation de l'induit, ce qui exige un travail.

Les effets du courant peuvent être considérés comme des transformations d'énergie et c'est sous cet aspect que nous les étudierons. L'énergie calorifique s'exprime généralement en calories et l'énergie mécanique en joules. *Dans la suite, nous exprimerons toutes les énergies en joules et par suite les puissances en watts.* Une quantité de chaleur Q calories sera considérée comme une énergie de 4,185 Q joules, car on sait que 1 calorie est équivalente à 4,185 joules.

CHAPITRE XIII

ÉLECTROLYSE. LOIS DE FARADAY

117. — ***Phénomène de l'électrolyse.*** — L'*électrolyse* est le phénomène de décomposition de certains liquides par le courant électrique. Nous avons observé ce phénomène sur la solution aqueuse de sel marin, mais il se produit avec de nombreux liquides appelés *électrolytes.*

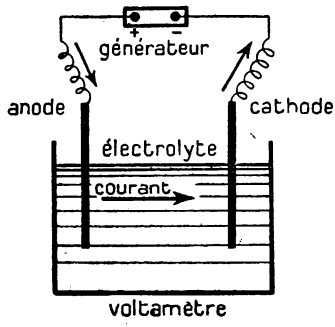


FIG. 114. — Electrolyse.

D'une façon générale, étudions le passage du courant dans un liquide. Plongeons dans le liquide deux lames métalliques que nous relions aux deux pôles d'un générateur (fig. 114). Divers phénomènes peuvent se produire suivant la nature du liquide.

1er CAS. — Aucun courant ne s'établit : le liquide est un isolant. C'est le cas d'un grand nombre de liquides organiques purs, le pétrole par exemple.

2e CAS. — Un courant passe mais le liquide ne subit aucune décomposition. Il en est ainsi pour les métaux fondus, le mercure par exemple.

3e CAS. — Un courant passe et il y a décomposition chimique du liquide. C'est le phénomène d'électrolyse et le liquide est un électrolyte.

Le vase où se produit la décomposition s'appelle un *voltamètre* ; les deux lames métalliques qui plongent dans le liquide et le mettent en communication avec les pôles du générateur, sont les *électrodes.* Celle qui est reliée directement au pôle positif et par laquelle entre le courant est l'*anode* ; celle qui est reliée directement au pôle négatif et par laquelle sort le courant est la *cathode.*

Seuls sont des électrolytes les acides, les bases et les sels amenés à l'état liquide soit par fusion, soit par dissolution dans l'eau ou un liquide convenable, l'acétone par exemple.

118. — ***Loi qualitative.*** — Prenons un cas simple dans lequel le phénomène à étudier ne sera accompagné d'aucun phénomène supplémentaire venant masquer le phénomène principal. Réalisons l'électrolyse du chlorure de zinc fondu à 300° avec deux électrodes en graphite. Nous observons qu'à

l'anode se dégage du chlore, que l'on reconnaît à son action sur l'indigo, et que la cathode se recouvre de cristaux de zinc. Répétons la même expérience avec une solution aqueuse de chlorure stanneux, on obtient un dégagement de chlore à l'anode et de longues aiguilles d'étain se forment à la cathode.

Ce mode de décomposition est général et nous pouvons énoncer les lois qualitatives de l'électrolyse :

1° *Dès que le courant passe, l'électrolyte est visiblement décomposé en deux parties appelées* **ions** *qui apparaissent sur les électrodes.*

L'ion qui se dégage à la cathode est appelé **cathion** ; *c'est le métal de l'électrolyte (ou l'hydrogène acide dans le cas d'un acide).*

L'ion qui se dégage à l'anode est appelé **anion** ; *c'est le reste de la molécule de l'électrolyte (anion = molécule d'électrolyte moins cathion).*

2° *Le cathion suit le courant et l'anion le remonte ; ils ne sont pas visibles dans l'électrolyte mais au contact entre l'électrolyte et les électrodes.* **Les produits de la décomposition n'apparaissent qu'aux électrodes.**

Par exemple, électrolysons du chlorure de sodium fondu. Le cathion sodium apparaît à la cathode et l'anion chlore apparaît à l'anode.

La décomposition d'un électrolyte se fait donc toujours de la même façon, mais les résultats de l'électrolyse que l'on observe sont souvent plus complexes. A la décomposition électrolytique se superposent des réactions chimiques qui peuvent masquer le phénomène fondamental et qu'on appelle des *réactions secondaires.*

119. — ***Réactions secondaires.*** — Ces réactions secondaires sont des réactions provoquées par les produits de la décomposition électrolytique, c'est-à-dire les ions. Elles proviennent soit de l'instabilité chimique des ions, soit de l'action des ions sur les électrodes, soit de l'action des ions sur le bain électrolysé. Dans une même électrolyse, on peut avoir simultanément les différents types d'action et même les produits secondaires obtenus peuvent ensuite réagir entre eux.

1° Instabilité des ions. — Prenons par exemple l'électrolyse de la soude NaOH fondue. Il se forme deux ions : le cathion sodium qui apparaît à la cathode et l'anion OH qui va à l'anode. Mais le groupement OH n'étant pas stable, nous verrons se produire la réaction secondaire :

$$2OH \rightarrow H_2O + \frac{1}{2}O_2.$$

Finalement, à l'anode, nous observerons un dégagement d'oxygène.

De même l'électrolyse de NH_4Cl donne à la cathode l'ammonium NH_4 instable qui se décompose en NH_3 et hydrogène H_2.

2° Action sur les électrodes. — Faisons l'électrolyse d'une solution de sulfate de cuivre avec des électrodes en cuivre. La molécule SO_4Cu se

coupe en deux : le cathion Cu se dépose à la cathode et l'ion SO_4 va à l'anode Cet anion SO_4 réagit sur l'anode en cuivre suivant la réaction :

$$SO_4 + Cu \rightarrow SO_4Cu.$$

Il y a régénération d'une molécule de sulfate de cuivre, la concentration *moyenne* de la solution reste constante. L'effet de l'électrolyse est un simple transport de cuivre de l'anode à la cathode. L'anode semble se dissoudre, on dit que l'on a réalisé une *anode soluble.*

On obtient une anode soluble en électrolysant une solution saline et en prenant pour anode une tige du même métal que celui du sel. Nous verrons plus loin quelques applications.

3° ACTION SUR LE BAIN ÉLECTROLYTIQUE. — Prenons comme exemple l'électrolyse d'une solution aqueuse de chlorure de sodium ClNa. La molécule se coupe en deux : le chlore se dégage à l'anode et le métal va à la cathode. Mais, au contact de l'eau, le sodium donne la réaction secondaire :

$$Na + H_2O \rightarrow NaOH + \frac{1}{2} H_2.$$

Finalement, nous observons à la cathode un dégagement d'hydrogène.

Dans une même électrolyse, plusieurs réactions secondaires peuvent avoir lieu. Citons quelques exemples :

1. L'électrolyse d'une solution aqueuse de soude donne :

à la cathode : Na qui réagit sur l'eau : $Na + H_2O \rightarrow NaOH + \frac{1}{2} H_2$ et on observe un dégagement d'hydrogène ;

à l'anode : OH qui se décompose : $2OH \rightarrow H_2O + \frac{1}{2} O_2$ et l'on observe un dégagement d'oxygène.

Finalement la quantité totale de soude reste invariable et l'on obtient les produits de la décomposition de l'eau.

2. L'électrolyse d'une solution aqueuse d'acide sulfurique donne :

à la cathode : H_2, l'hydrogène se dégage ;

à l'anode : SO_4 qui réagit sur l'eau : $SO_4 + H_2O \rightarrow SO_4H_2 + \frac{1}{2} O_2$. On observe un dégagement d'oxygène.

Ici encore la quantité totale d'acide sulfurique reste invariable et l'on obtient les produits de décomposition de l'eau.

3. L'électrolyse d'une solution aqueuse de sulfate de sodium SO_4Na_2 donne :

à la cathode : Na qui avec l'eau donne NaOH et un dégagement d'hydrogène.

à l'anode : SO_4 qui avec l'eau donne SO_4H_2 et un dégagement d'oxygène.

La formation de base (NaOH) à la cathode et d'acide (SO_4H_2) à l'anode sont faciles à mettre en évidence expérimentalement. Il suffit de prendre

comme voltamètre un tube en U et de mettre du tournesol bleu à l'anode et du tournesol rouge à la cathode. Le passage du courant fait virer les deux réactifs.

120. — ***Lois quantitatives.*** — Nous avons vu (§ 114) que l'intensité d'un courant était une grandeur proportionnelle à la quantité d'électrolyte décomposée. Il résulte donc de la définition électrochimique de l'intensité que la *quantité d'électrolyte décomposée est proportionnelle à l'intensité du courant.*

Plaçons sur un circuit unique, ne contenant aucune dérivation, plusieurs voltamètres identiques contenant le même électrolyte. L'expérience montre que la quantité d'électrolyte décomposée pendant le même temps est la même pour tous. C'est donc que *le courant conserve la même intensité tout le long du circuit.* C'est pourquoi, quand nous parlons d'intensité d'un courant dans un circuit sans dérivation, nous n'avons pas besoin de préciser en quel point la mesure a été faite.

Disposons maintenant, sur un circuit unique ne contenant aucune dérivation, plusieurs voltamètres contenant le même électrolyte, par exemple une solution d'azotate d'argent, mais différant par la forme du vase, la nature des électrodes, leurs dimensions et leur écartement, la température et la concentration de l'électrolyte. Nous constatons que l'augmentation de poids de la cathode pendant un temps donné est la même pour chaque voltamètre. Comme nous venons de voir que les appareils sont tous traversés par la même intensité, c'est que, pour un électrolyte donné, *la quantité d'électrolyte décomposée ne dépend que de l'intensité du courant et du temps de passage du courant.*

D'autre part, l'électrolyse est un phénomène régulier, le dépôt de méta sur la cathode se fait d'une manière uniforme. Par suite la *quantité d'électrolyte décomposée est proportionnelle au temps.*

Au total, la quantité d'électrolyte décomposée est proportionnelle à l'intensité i et au temps t, c'est-à-dire à la quantité d'électricité qui a traversé l'appareil. D'où l'énoncé suivant :

Première Loi. — **Pour un électrolyte donné, la masse d'électrolyte décomposée ne dépend que de la quantité d'électricité qui traverse le voltamètre et elle lui est proportionnelle.**

Etudions le rôle de l'électrolyte. Plaçons en série sur un même circuit des voltamètres contenant respectivement des solutions d'acide chlorhydrique, d'azotate d'argent, de chlorure cuivrique, de sulfate cuivrique, de sulfate ferreux, de chlorure ferrique, de chlorure d'or et de chlorure de platine. Faisons passer le courant et déterminons par des pesées, la masse de métal déposée sur la cathode de chaque cuve.

Nous observons que le dépôt de cuivre est le même dans les cuves à chlorure cuivrique et sulfate cuivrique, ce qui prouve que la nature de l'acide n'intervient pas.

D'autre part nous constatons que, s'il se dégage 1 atome-gramme d'hydrogène dans la cuve à acide chlorhydrique, il se dégage :

1 atome-gramme d'argent, soit 107,9 g dans la cuve à NO_3Ag.

$\frac{1}{2}$ atome-gramme de cuivre, soit $\frac{63,6\text{ g}}{2}$ dans les cuves à Cl_2Cu et SO_4Cu.

$\frac{1}{2}$ atome-gramme de fer, soit $\frac{56\text{ g}}{2}$ dans la cuve à SO_4Fe.

$\frac{1}{3}$ atome-gramme de fer, soit $\frac{56\text{ g}}{3}$ dans la cuve à Cl_3Fe.

$\frac{1}{3}$ atome-gramme d'or, soit $\frac{197\text{ g}}{3}$ dans la cuve à Cl_3Au.

$\frac{1}{4}$ atome-gramme de platine, soit $\frac{195\text{ g}}{4}$ dans la cuve à Cl_4Pt.

Or les valences de l'argent, du cuivre, du fer ferreux, du fer ferrique, de l'or et du platine sont respectivement 1, 2, 2, 3, 3 et 4. D'où la deuxième loi :

Deuxième Loi. — **La quantité de métal ou d'hydrogène libéré à la cathode est proportionnelle au poids atomique du cathion et inversement proportionnelle à sa valence dans l'électrolyte.**

On appelle *valence-gramme* d'un cathion le quotient du poids atomique A par sa valence *n*. La loi précédente exprime qu'*une même quantité d'électricité libère toujours le même nombre de valences-grammes.*

L'ensemble de ces deux lois constitue les **Lois de Faraday**.

*121. — **Lois de Faraday.*** — En définitive, le passage d'un courant à travers un électrolyte produit une décomposition.

Le poids p de cathion libéré est :

1° *proportionnel à l'intensité du courant I et au temps t, c'est-à-dire à la quantité d'électricité q = It qui a traversé l'électrolyte ;*

2° *proportionnel à la valence-gramme* $\frac{A}{n}$ *du cathion.*

Les lois de Faraday se traduisent donc par la formule :

$$p = K\frac{A}{n}It,$$

K étant une constante de proportionnalité qui dépend des unités.

Calculons K à partir d'une électrolyse particulière, celle de NO_3Ag. On sait que 1 coulomb ($It = 1$) libère 1,118 mg ($p = 0,001118$ g) d'argent dont le poids atomique A = 107,88 et la valence $n = 1$. Nous avons :

$$0,001118 = K\frac{107,88}{1} \times 1$$

d'où :

$$\frac{1}{K} = 96490.$$

La formule précédente devient :

$$p^g = \frac{1}{96490} \frac{A^g}{n} I^a t^s$$

Si, dans cette formule, on fait $It = 96490$ coulombs on obtient : $p = \frac{A}{n}$ d'où une forme condensée des lois de Faraday :

96 490 coulombs libèrent une valence gramme. Cette quantité d'électricité s'appelle le *faraday*.

Enfin, signalons qu'on appelle *équivalent électrochimique* d'un métal, la quantité de ce métal libéré par 1 coulomb. L'équivalent électro-chimique de l'argent est 0,001118 par définition du coulomb.

122. — Applications de l'électrolyse. — Les phénomènes d'électrolyse sont utilisés pour la mesure des intensités de courant et des quantités d'électricité, pour la préparation de certains corps, pour recouvrir les objets d'une couche métallique et pour la galvanoplastie.

1° Mesure des intensités de courant et des quantités d'électricité. — On utilise l'électrolyse d'une solution d'azotate d'argent. L'appareil comprend une anode hémisphérique en argent et une cathode formée par une capsule de platine (fig. 115). La solution d'azotate d'argent a une concentration d'environ 15 à 20 %. L'anode est entourée d'un sac en papier filtre. Ainsi les particules d'argent qui pourraient se détacher de l'anode ne vont pas sur la cathode et restent sur le filtre. Dans ces conditions et avec une intensité de courant pas trop forte, le dépôt d'argent sur la cathode, dû au passage du courant, est adhérent et résistera aux lavages, séchages et pesées. Si p est le poids d'argent déposé en t secondes, la quantité d'électricité qui a traversé l'appareil est $q = \frac{p^{mg}}{1{,}118}$ et l'intensité du courant est $I^a = \frac{q}{t}$.

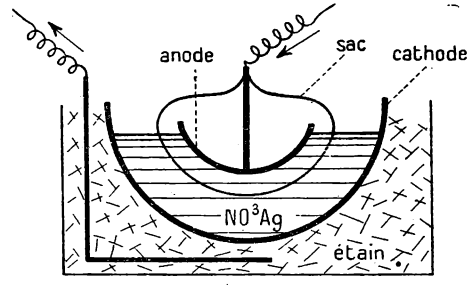


Fig. 115

2° Préparation de certains corps. — L'électrolyse des sels fournit un dépôt de métal à la cathode. On prépare ainsi le magnésium, le potassium et le calcium par électrolyse des chlorures fondus ; le fer très pur par électrolyse d'une solution d'azotate de fer purifié par plusieurs cristallisations ; l'aluminium par électrolyse d'un mélange de bauxite (Al_2O_3) et de cryolithe (F_6AlNa_3).

Rappelons aussi que l'on obtient par électrolyse le chlore, le fluor, l'hydrogène, l'oxygène et certains corps composés comme l'eau de Javel, les chlorates.

3° Obtention de dépôts adhérents. — C'est la méthode qui consiste à recouvrir, grâce à l'électrolyse, un corps généralement facilement altérable par les agents atmosphériques, d'une couche mince de métal inaltérable. L'objet à recouvrir constitue la cathode d'un voltamètre. L'électrolyte est un sel du métal que l'on veut déposer et l'anode est une tige de ce métal. La cohésion et l'adhérence du dépôt de métal exigent un choix convenable de la nature du sel dissous, de la concentration et de la température du bain, de l'intensité du courant.

4° Galvanoplastie. — C'est la reproduction d'un objet, une face de médaille par exemple. On prend, par moulage, une empreinte de la face et, pour que ce moule puisse servir de cathode, on le rend conducteur en métallisant sa surface avec de la plombagine.

Comme dans le cas précédent, on provoque un dépôt métallique sur cette cathode et, en retirant le moule, on a une reproduction métallique de la face de la médaille.

C'est par un procédé du même genre que l'on fabrique les clichés d'imprimerie pour la reproduction des figures.

Enfin lorsque la solution électrolysée contient plusieurs sels, il arrive souvent que les métaux ne se déposent sur la cathode que l'un après l'autre. Il y a là le principe d'une véritable analyse quantitative des solutions salines.

THÉORIE DES IONS

*123. — **Hypothèses fondamentales.*** — Pour interpréter l'ensemble des propriétés des électrolytes, on a posé quelques hypothèses fondamentales qui permettent d'expliquer un grand nombre de faits. C'est la théorie des ions fondée par Arrhénius.

Première hypothèse. — Lorsqu'on dissout un corps de constitution saline (acide, base ou sel) dans l'eau ou un liquide convenable, un *certain* nombre de molécules du corps dissous sont, *antérieurement à toute action électrique extérieure*, décomposées en éléments appelés *ions*. Ces ions sont des atomes ou des groupements d'atomes chargés d'électricité. Les cathions (H ou métal) sont chargés positivement et les anions sont chargés négativement. Un ion de valence n porte la charge ne, e étant la charge élémentaire (§ 36) qui vaut $1{,}59 \times 10^{-19}$ coulomb.

Nous représenterons les ions par la formule traduisant leur constitution chimique accompagnée d'autant de signes + ou — que l'ion portera de charges élémentaires e. On aura ainsi les ions H^+, Cl^-, Cu^{++}, SO_4^{--}, Al^{+++}, Na^+.

Cette première hypothèse suffit pour interpréter les lois de l'électrolyse. Quand on plonge deux électrodes, reliées aux bornes d'un générateur, dans

un électrolyte, on crée dans le bain un champ électrique dû à la différence de potentiel entre les électrodes. Sous l'action du champ, les cathions, chargés positivement, se déplacent dans le sens du champ et se rendent à la cathode ; les anions, chargés négativement, vont à l'anode. Il y a transport d'électricité à l'intérieur du bain, d'où *courant électrique.*

Au contact des électrodes les ions se déchargent et de nouvelles molécules se constituent par association d'atomes *neutres.* Les molécules neutres ainsi formées sur l'électrode sont les produits apparents de l'électrolyse. On voit donc que les produits de l'électrolyse n'apparaissent que sur les électrodes.

De plus, la quantité d'électricité qui s'écoule par le fil reliant la cathode au pôle négatif du générateur provient de la charge libérée par les cathions se transformant en atomes neutres. Tous ces cathions sont identiques ; ils portent chacun la charge ne, n étant leur valence, et ont chacun une masse m proportionnelle au poids atomique A de l'élément $m = k\text{A}$. Par suite la libération de N cathions, c'est-à-dire d'une masse $p = \text{N} \times k\text{A}$, correspond à la quantité d'électricité $q = \text{N} \times ne$.

D'où $\text{N} = \frac{q}{ne}$ et

$$p = k\frac{\text{A}}{n} \times \frac{q}{e},$$

ce qui montre que le poids de cathion déposé est proportionnel à la quantité d'électricité qui traverse le circuit et proportionnel à la valence gramme $\frac{\text{A}}{n}$ du cathion. Ce sont les lois de Faraday.

Deuxième hypothèse. — Nous supposerons que la décomposition de l'électrolyte en ions est *partielle* et *réversible* et que les ions jouent, au point de vue des phénomènes de physico-chimie, le même rôle que les molécules.

D'après cette hypothèse, les ions interviennent comme les molécules neutres pour créer la pression osmotique. De plus nous pourrons appliquer aux ions la loi de l'action de masse.

Sur ce dernier point, nous devrons distinguer deux types distincts d'électrolytes :

1° Les *électrolytes faibles* où la proportion de molécules dissociées est faible. Les ions sont dispersés dans le bain et leur action les uns sur les autres est négligeable. L'application de la loi d'action de masse à ces électrolytes donne des résultats en parfait accord avec l'expérience.

2° Les *électrolytes forts* où presque toutes les molécules dissoutes sont dissociées. La distance entre les ions est faible et leur action mutuelle n'est plus négligeable. Les ions ne sont plus aussi libres que des molécules neutres. La loi de l'action de masse ne donne plus que le *sens* des phénomènes qui se passent au sein de l'électrolyte. Les résultats *quantitatifs* obtenus diffèrent des résultats expérimentaux.

En résumé, *la loi de l'action de masse appliquée à la dissociation électrolytique donne des résultats d'autant meilleurs que l'électrolyte est plus faible.*

Rappelons que la théorie des ions donne une explication généralement satisfaisante d'un grand nombre de propriétés chimiques et électriques des solutions salines.

REMARQUE. — Nous pouvons calculer, à partir des lois de Faraday, la valeur de la charge élémentaire *e*.

Rappelons que les molécules-grammes des corps renferment toutes le même nombre N de molécules. Ce nombre N appelé *nombre d'Avogadro* a été déterminé par des méthodes très différentes ; sa valeur est $N = 6{,}06 \times 10^{23}$.

Electrolysons une molécule-gramme de NaCl. Cette opération nécessite le passage de 96490 coulombs et libère un atome-gramme de sodium, soit N atomes. Chaque atome portant la charge *e*, nous avons :

$$Ne = 96490$$

$$e = \frac{96490}{6.06 \times 10^{23}} = 1{,}59 \times 10^{-19} \text{ coulomb.}$$

Exercices.

26. La cathode d'une cuve à nickelage est constituée par un objet à nickeler dont la surface est de 59 cm^2. On utilise un courant de 33 ampères. Au bout de combien de temps aura-t-on un dépôt de 2,5 mm d'épaisseur ?

Le nickel est un métal bivalent, de poids atomique 59 et dont la densité est 8,8.

Réponse : $3^h\ 34^{min}\ 26^{sec}$.

27. On recueille, dans une même éprouvette, les gaz produits dans l'électrolyse de l'eau acidulée. Quel est le volume gazeux obtenu au bout de 12 minutes sachant que l'intensité du courant est 0,5 ampère ?

28. Dans une cuve à électrolyse de l'alumine Al_2O_3, on recueille 6700 g d'aluminium par heure. Quelle est l'intensité du courant ?

L'aluminium trivalent a pour poids atomique 27.

Réponse : 20 000 ampères.

CHAPITRE XIV

EFFET JOULE — RÉSISTANCE

124. — ***Effet Joule.*** — Lorsqu'un courant électrique passe dans un fil conducteur, nous constatons que le fil s'échauffe. Cet échauffement peut être mis en évidence soit simplement par le toucher, soit en observant la dilatation du fil, soit en immergeant le fil dans un liquide isolant contenu dans un calorimètre et en observant l'élévation de température du liquide. Ce dernier moyen a l'avantage de permettre la mesure de la quantité de chaleur dégagée.

Ce dégagement de chaleur dû au passage du courant et qu'on appelle *effet Joule*, se produit dans les conducteurs de toutes sortes, dans un électrolyte comme dans un métal.

Dans un même circuit, le dégagement de chaleur n'est pas uniforme. Dans un circuit d'éclairage, le même courant passe dans le filament de la lampe et dans les fils qui amènent le courant ; or le filament est porté à 2 500° et est incandescent, tandis que les fils de cuivre restent froids.

L'effet Joule s'interprète facilement en partant de la théorie électronique. Nous avons vu que le courant électrique dans les métaux était dû au mouvement des électrons libres. L'électron en mouvement se déplace entre les atomes du métal *qui sont animés de vibrations sur place*, vibrations d'autant plus intenses que la température du métal est plus élevée. Les vibrations gênent la circulation des électrons qui subissent des chocs contre les atomes. La perte d'énergie des électrons au moment des chocs se retrouve sous forme de chaleur. C'est l'effet Joule.

125. — ***Loi de Joule.*** — Faisons une étude quantitative de l'effet Joule. Pour cela prenons un long fil de maillechort enroulé en hélice et immergé dans un calorimètre contenant du pétrole qui est un excellent isolant (fig. 116).

Montons ce fil sur un circuit électrique comprenant un générateur, un ampèremètre mesurant l'intensité du courant et un dispositif, appelé rhéostat (§ 148), permettant de faire varier l'intensité du courant.

La chaleur dégagée dans le fil par effet Joule sert à chauffer le liquide du calorimètre. Par suite, l'élévation de température du calorimètre est proportionnelle à cette quantité de chaleur.

1° Influence du temps. — Opérons avec une intensité de courant constante. Nous constatons que la température du calorimètre croît régulièrement avec le temps. Donc :

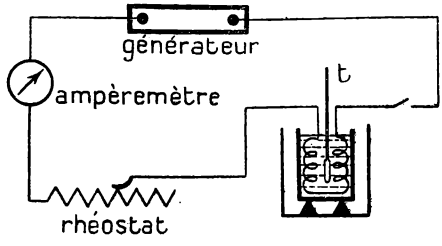


Fig. 116. — Vérification de la loi de Joule.

La quantité de chaleur dégagée dans un conducteur par le passage d'un courant constant est proportionnelle au temps.

2° Influence de l'intensité. — A l'aide du même dispositif, faisons passer pendant des temps égaux des courants constants d'intensités respectives I, 2 I, 3 I..... Nous observons des élévations de températures Θ, 4Θ, 9Θ... Par suite :

La quantité de chaleur dégagée dans un conducteur pendant un temps donné est proportionnelle au carré de l'intensité.

Ces résultats ont été établis par Joule avec précision. D'où la loi :

Loi de Joule. — **La quantité de chaleur dégagée dans un conducteur par le passage d'un courant constant est :**

1° proportionnelle au carré de l'intensité du courant,

2° proportionnelle au temps.

Si un courant d'intensité I donne dans un conducteur un dégagement de chaleur de Q calories, c'est-à-dire une énergie de (JQ) joules, nous avons d'après la loi de Joule :

$$JQ = RI^2t,$$

R étant un facteur de proportionnalité qui dépend du conducteur considéré et des unités.

*126. — **Résistance d'un conducteur.*** — Faisons passer dans plusieurs conducteurs le même courant pendant le même temps. Nous observons des dégagements de chaleur généralement différents. Le facteur R varie donc d'un conducteur à un autre, il caractérise le conducteur au point de vue de l'effet Joule. R mesure la **résistance** du conducteur.

La relation $JQ = RI^2t$, qui exprime la loi de Joule, définit la résistance comme une grandeur mesurable. Faisons dans cette formule $I = 1$ et $t = 1$, nous obtenons $R = JQ$. Donc :

La résistance électrique d'un conducteur est une grandeur qui caractérise ce conducteur au point de vue de l'effet Joule. Elle est numériquement égale à l'énergie calorifique dégagée dans ce conducteur par le passage, pendant l'unité de temps, d'un courant constant d'intensité unité.

*127. — **Unité de résistance : ohm.*** — L'unité de résistance sera telle que pour $I = 1$ et $t = 1$, on ait $JQ = 1$. Dans le système pratique d'unités électriques, les intensités s'expriment en ampères, les temps en secondes et les

énergies en joules. **L'unité de résistance électrique correspondante s'appelle l'ohm** (symbole Ω, le symbole ω est encore toléré).

L'ohm est, par définition, la résistance électrique d'un conducteur qui, parcouru par un courant de 1 *ampère, est le siège d'un dégagement de chaleur par seconde, équivalent à une énergie de* 1 *Joule.*

Dans le système pratique d'unités électriques, la loi de Joule se traduit donc par la formule

$$4{,}18\ Q^{\text{calories}} = R^{\text{ohms}} \times I^{2\ \text{ampères}} \times t^{\text{secondes}}$$

Le Congrès de 1908 a fixé sous le nom d'ohm international une représentation matérielle de l'ohm, facile à réaliser exactement.

L'ohm international est la résistance offerte à un courant électrique constant par une colonne cylindrique de mercure à 0°, *ayant une longueur de* 106,300 *cm et une masse de* 14,4521 *g.*

Fig. 117. — Ohm étalon.

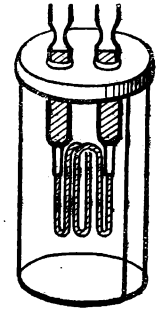


Fig. 118

Cette masse correspond à une section d'un millimètre carré. On a préféré indiquer la masse du mercure plutôt que la section, car elle est susceptible d'une mesure plus précise.

Cet étalon est réalisé au Bureau International des Poids et Mesures avec une précision du cent millième. Il est représenté par la figure 117. On en a établi des copies de formes diverses (fig. 118) de façon à réduire l'encombrement. Enfin des étalons secondaires, ainsi que des multiples et des sous-multiples décimaux de l'ohm, sont constitués par des fils de maillechort isolés dans de la paraffine.

128. — ***Résistance d'un conducteur cylindrique et homogène.*** — Des mesures faites simultanément par Ohm et par Pouillet sur des conducteurs cylindriques et homogènes ont conduit séparément ces deux savants à énoncer la loi suivante :

La résistance R d'un fil conducteur cylindrique et homogène est :

1° proportionnelle à sa longueur l ;

2° inversement proportionnelle à l'aire s de sa section.

Cette loi est facile à vérifier expérimentalement à l'aide de mesures calo-

rimétriques. Des raisonnements simples permettent de retrouver *a priori* ces résultats.

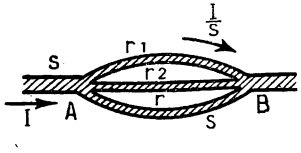


Fig. 119

D'abord, quand plusieurs conducteurs sont disposés en série, la quantité de chaleur dégagée dans l'ensemble est la somme des quantités de chaleur dégagées dans chacun d'eux. Par suite *la résistance de la série est la somme des résistances des divers conducteurs*. En particulier, un fil homogène peut être considéré comme une suite de fils identiques de longueur unité placés en série. Chaque élément ayant pour résistance r, il y aura, si l est la longueur du fil, l éléments dont la résistance totale $R = l\,r$. La résistance est proportionnelle à la longueur.

Considérons maintenant un conducteur de section s. *Admettons* que ce conducteur puisse être considéré comme un ensemble de s conducteurs de section unité, partant tous de A pour arriver en B (fig. 119). On dit que l'on a s conducteurs en dérivation entre A et B. Soit I l'intensité du courant dans le circuit. Toutes les dérivations étant identiques, le courant, par symétrie, se partage *également* entre toutes. Chaque dérivation de résistance r est parcourue par un courant $i = \frac{I}{s}$ et, par suite, est le siège d'un dégagement de chaleur par seconde équivalent à $W^{joules} = r \times \left(\frac{I}{s}\right)^2$. Pour l'ensemble, le dégagement de chaleur global sera : $W_1 = s \times W = \frac{r}{s} \times I^2$.

Cette formule exprime que la résistance de l'ensemble est $R = \frac{r}{s}$, c'est-à-dire s fois plus petite que celle du conducteur de section unité. La résistance est inversement proportionnelle à la section.

En résumé, si R est la résistance d'un fil de longueur l et de section s, nous avons, d'après la loi précédente :

$$R = \rho \frac{l}{s},$$

ρ étant un coefficient de proportionnalité qui dépend de la substance du conducteur et des unités ; on l'appelle la *résistivité* de la substance.

129. — ***Résistivité.*** — Prenons plusieurs conducteurs cylindriques, homogènes, de même longueur et de même section. Leurs résistances sont, en général, différentes. Le facteur ρ varie donc d'une substance à une autre, il mesure la *résistivité* ou résistance spécifique de la substance. La quantité $c = \frac{1}{\rho}$ mesure la *conductivité* de la substance.

Si dans la formule $R = \rho \frac{l}{s}$ nous faisons $l = 1$ et $s = 1$, nous obtenons $\rho = R$.

La résistivité d'une substance est donc numériquement égale à la résistance d'un conducteur, fait de cette substance, qui aurait la longueur unité et une section uniforme égale à l'unité.

Exprimons R en ohms, l en centimètres et s en centimètres carrés. La résistivité ρ calculée d'après la formule $R = \rho \frac{l}{s}$ sera évaluée en *ohm-centimètre* ($\Omega \times$ cm).

Cette unité est grande pour les métaux qui ont des résistivités cent mille fois plus faibles. Aussi utilise-t-on une unité plus petite qui est le *microhm-centimètre* ($\mu\Omega \times$ cm) qui vaut $10^{-6}\ \Omega \times$ cm.

Remarquons que l'on a associé une unité pratique, l'ohm, à des unités C. G. S., le cm et le cm². L'ohm-centimètre n'appartient donc à aucun système cohérent d'unités. En particulier, ce n'est pas une unité du système pratique d'unités électriques (§ 272-3°).

La formule $R = \rho \frac{l}{s}$ est également applicable aux électrolytes (§ 141).

Voici quelques valeurs des résistivités des métaux, des alliages et de quelques autres corps :

Métaux	$\rho_{\mu\Omega} \times$ cm	Alliages	$\rho_{\mu\Omega} \times$ cm	Corps	$\rho_{\Omega} \times$ cm
Argent	1,5	Maillechort	30	Charbon	6×10^{-3}
Cuivre	1,6	Manganine	42	SO_4Cu à 10 %	31
Aluminium	3	Constantan	49	Eau pure	25×10^{6}
Fer	11	Ferro-Nickel	80	Pétrole	2×10^{16}
Mercure	94	Nichrome	100	Paraffine	10^{18}

Notons que les alliages ont en général une résistivité plus grande que celles des métaux dont ils sont constitués. Il y a exception pour les bronzes phosphoreux.

130. — ***Variations de la résistivité.*** — Nous venons de voir que la résistivité varie avec la nature du conducteur. Elle dépend aussi d'autres facteurs dont le plus important est la température.

1° Pour les corps bons conducteurs, c'est-à-dire les métaux et leurs alliages, *la résistivité croît avec la température.* On peut admettre en première approximation, pour un intervalle de température pas trop grand, que ρ est une fonction linéaire de la température. Nous pouvons écrire :

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t),$$

ρ_0 étant la résistivité à 0° et α un coefficient spécifique de la substance appelé **coefficient de température.**

Pour les métaux usuels, α est de l'ordre de $\frac{1}{250}$. Par suite une lampe à incandescence où le filament est porté à 2500° aura, en fonctionnement, une résistance environ 11 fois plus grande qu'à froid.

Pour les alliages, le coefficient de température est généralement faible et parfois presque nul. Indiquons quelques valeurs relatives aux alliages les plus employés.

Alliage	Composition	ρ_0 $\mu\Omega \times cm$	α
Ferro-nickel	74 Fe 25 Ni 0,8 C	80	9×10^{-4}
Maillechort	60 Cu 25 Zn 15 Ni	30	$3{,}6 \times 10^{-4}$
Constantan	60 Cu 40 Ni	49	$-0{,}1$ à $+0.1 \times 10^{-4}$
Manganine	73 Cu 12 Mn 15 Ni	42	$0{,}3 \times 10^{-4}$

Inversement, quand la température s'abaisse, la résistivité diminue. Elle décroît régulièrement jusqu'au voisinage de 4°K puis tombe brusquement à une valeur si faible qu'elle cesse d'être mesurable. On dit que le métal est devenu *supraconducteur*. L'effet Joule y est pratiquement inexistant.

Ces résultats relatifs aux bons conducteurs ont reçu des applications. La variation de la résistance avec la température est à la base du thermomètre à résistance qui sert pour définir l'échelle pratique de température entre — 190° et 650°. De plus l'existence d'alliage à coefficient de température pratiquement nul permet de réaliser des résistances qui restent constantes, malgré l'effet Joule produit par le passage du courant, et qui, par suite, pourront servir d'étalons secondaires.

2° Pour les électrolytes et certains métalloïdes conducteurs obtenus généralement à haute température comme le carbone, le silicium, le bore, la *résistivité diminue quand la température s'élève.*

Signalons enfin d'autres causes pouvant faire varier la résistivité : l'éclairement (sélénium), les champs magnétiques (bismuth), le sens même du courant (principe du détecteur à galène et des redresseurs).

*131. — **Interprétation électronique des résultats précédents.*** Nous avons indiqué (§ 124) que l'effet Joule était dû aux chocs des électrons libres des métaux contre les atomes en vibration. Ces vibrations ont une amplitude d'autant plus grande que la température du métal est plus élevée. Nous voyons donc :

1° que l'effet Joule doit augmenter avec l'intensité du courant puisque, le nombre d'électrons qui passent par seconde dans une section du fil augmentant, les chances de chocs augmentent également.

2° que la résistance croît avec la longueur puisque le nombre des électrons libres et par suite le nombre de chocs est augmenté ;

3° que la résistance diminue quand la section augmente puisque les électrons d'une même section sont plus dispersés et que, par suite, leurs chances de chocs avec les atomes diminuent ;

4° que la résistance augmente avec la température du métal puisque l'amplitude des vibrations de l'atome est augmentée.

Une interprétation analogue peut être donnée pour les électrolytes, mais les électrons libres sont remplacés par les ions.

*132. — **Applications de la loi de Joule.*** — Nous citerons l'ampèremètre thermique, l'éclairage par incandescence et les fusibles.

1° **Un ampèremètre thermique** est un appareil basé sur la loi de Joule ; il sert à mesurer les intensités des courants.

PRINCIPE. — Considérons un conducteur métallique *isolé* thermiquement. Le passage d'un courant provoque un dégagement de chaleur qui sert uniquement à élever la température du conducteur. Au bout d'un temps plus ou moins long, suivant la nature du fil et l'intensité, on arrivera à la température de fusion. Le conducteur fond et le circuit est interrompu.

Prenons maintenant un fil nu, placé dans l'air. *Il peut perdre de la chaleur par rayonnement.* Si la quantité de chaleur créée par effet Joule se perd entièrement par rayonnement, la température du fil conducteur est alors stationnaire ; le fil a atteint sa température d'équilibre. Il en résulte un allongement limite du fil que l'on peut amplifier et qui dépend de l'intensité. C'est sur ce principe qu'est basé l'ampèremètre thermique.

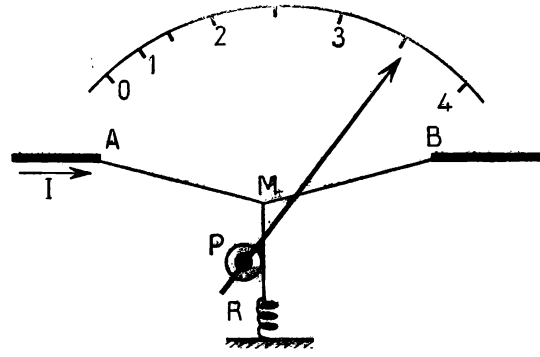


FIG. 120. — Ampèremètre thermique.

RÉALISATION. — Le courant à mesurer passe dans un fil métallique AB dont les extrémités sont fixes (fig. 120). Le fil est tendu en son milieu M par un fil isolant qui passe sur une poulie P dont l'axe est fixe et qui est maintenu constamment tendu par un ressort R. Une flèche solidaire de la poulie est entraînée par celle-ci et se déplace devant un cadran divisé.

La température d'équilibre du fil est grossièrement proportionnelle au carré de l'intensité. La graduation de l'appareil sera donc irrégulière et les divisions voisines du zéro seront très serrées. L'appareil ne pourra pas servir pour la mesure précise des faibles intensités. On le gradue par comparaison, en faisant passer dans le fil des courants mesurés avec un autre appareil.

Ces appareils ne sont pas fidèles à cause des résidus de dilatation que conserve le fil. Il est nécessaire de vérifier fréquemment leur étalonnage. Ils sont peu employés en courant continu, mais servent couramment dans les mesures relatives aux courants alternatifs.

2° **Les lampes à incandescence** utilisent l'échauffement et l'incandescence produits par le passage d'un courant dans un fil. Ce fil doit être fin pour que sa résistance soit suffisante, peu fusible et tenace. Il doit subsister un temps assez long et pour cela résister, à haute température, à l'action chimique du milieu ambiant. On utilise trois types de lampes :

a) les lampes à filaments de carbone qui sont en voie de disparition ;

b) les lampes à filaments de métal (tungstène) qui sont les lampes usuelles ; dans les unes, on a fait le vide à l'intérieur et le filament atteint 2 250° ; dans les autres, la lampe contient un gaz inerte (azote ou argon) et le filament est porté à 2 500°, leur rendement lumineux est meilleur ;

c) les lampes à filaments d'oxyde (à base de ThO_2), de grand éclat mais de prix élevé : ce sont des lampes de laboratoires.

3° Les **fusibles** sont des appareils destinés à couper un circuit dès que le courant dépasse une intensité maximum que l'on s'est fixée suivant les besoins. Un fusible est un morceau de fil (argent, aluminium ou alliage plomb-étain) choisi de façon que, dans les conditions de refroidissement où il est placé, il atteigne sa température de fusion et fonde quand le courant atteint la valeur limite fixée. Ces fusibles s'appellent encore des *coupe-circuits*.

En outre, rappelons que c'est sur l'effet Joule que sont basés tous les appareils de chauffage tels que radiateurs électriques, cuisinières électriques, fers à repasser, etc... Enfin l'effet Joule est utilisé dans les mesures calorimétriques pour apporter au calorimètre une quantité de chaleur mesurable avec précision.

Exercices.

29. Une ligne de transport d'énergie d'une longueur de 10 km est constituée par un fil de cuivre de 2 mm de diamètre. La résistivité du cuivre est $2 \times 10^{-6}\ \Omega \times$ cm. Calculer la résistance de la ligne.

30. Entre les extrémités d'un fil de fer de 1 mètre de longueur et 0,2 mm de diamètre on applique une tension de 10 volts. On admet que la chaleur produite par effet Joule sert uniquement à échauffer le fil dont la température centigrade Θ initiale est $\Theta_0 = 0°$.

a) Calculer le temps t_1 au bout duquel on devrait avoir $\Theta = 200°$ si la résistivité du fer avait la valeur constante $\rho_0 = 12 \times 10^{-6}\ \Omega$-cm.

b) Calculer le temps t_2 au bout duquel on aura $\Theta = 200°$ en supposant que la résistivité du fer varie avec la température suivant la loi : $\rho = \rho_0 (1 + 0{,}00\,5\ \Theta)$.

Chaleur spécifique du fer : c = 0,11 ; Densité du fer : 7,85.

Réponse : $t_1 = 0{,}866$ s. ; $t_2 = 1{,}30$ s. (*École Polytechnique*, 1935, 1° et 2°.)

31. Le filament d'une lampe a, dans les conditions de fonctionnement, une longueur $l = 1$ cm, un rayon $r = 0{,}02$ mm et une résistivité $\rho = 5 \times 10^{-5}\ \Omega \times$ cm. On y fait passer un courant $i = 0{,}25$ ampère. On admettra que la quantité de chaleur dégagée par le courant et rayonnée par le filament est exprimée en watts par la formule :

$$W = 27 \times 10^{-12}\ ST^4$$

où S est la surface extérieure du filament en cm^2 et T sa température absolue.

Trouver la température du filament et calculer sa résistance.

Réponse : $t = 2730°$ C ; R = 3,98 Ω. (*Ecole Centrale*, 1930, 1°.)

CHAPITRE XV

ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

133. — Généralités sur l'énergie. — L'énergie se manifeste sous diverses formes transformables les unes dans les autres et, pour un système isolé, l'énergie totale reste constante. Quelle que soit la nature d'une énergie, elle s'exprime toujours par un produit de deux facteurs : l'un appelé **facteur de position** qui définit l'évolution, la position actuelle du système, et l'autre, appelé **facteur de tension**, qui caractérise l'aptitude que possède le système à évoluer. Précisons sur quelques exemples :

1° Une force F déplaçant son point d'application dans le sens de la force d'une longueur l produit un travail $\mathcal{T} = F \times l$. L'évolution du système est caractérisée par le déplacement l qui est le facteur de position. La force F est la grandeur qui tend à provoquer le déplacement, c'est le facteur de tension.

2° Un gaz sous la pression constante p subissant une augmentation de volume v fournit au milieu extérieur une énergie $W = p \times v$. L'évolution du système est caractérisée par la variation de volume v qui est le facteur de position. La pression p est la grandeur qui tend à provoquer la variation de volume par son action sur un piston, c'est le facteur de tension.

L'équilibre d'un système se manifeste par son inaptitude à évoluer et se traduira par l'égalité de deux variables de tension : égalité des forces, égalité des pressions.

Voyons comment s'appliquent ces résultats à l'énergie électrique.

I. — DIFFÉRENCE DE POTENTIEL

134. — Différence de potentiel entre deux points d'un circuit. — Considérons une portion AB d'un circuit électrique parcouru par un courant invariable d'intensité I. Entre A et B, il y a libération d'énergie qui se manifeste par effet Joule, par électrolyse ou par tout autre effet du courant. Cherchons les variables de position et de tension correspondantes.

Etudions ce qui se passe dans le passage d'un courant dans un fil. Nous avons vu (§ 65) que l'équilibre électrique d'un conducteur, c'est-à-dire l'absence de tout transport de charges, exigeait que tous les points du conducteur soient au même potentiel électrostatique. Dans un fil parcouru par un courant, il y a transport de charges électriques, donc le potentiel n'est pas le même en tous les points. En effet, un électromètre branché entre les

points A et B d'un fil parcouru par un courant indique une déviation. Dans le cas particulier d'un courant **invariable**, *cette déviation reste constante*, elle ne varie pas avec le temps. Elle mesure la différence de potentiel entre A et B que nous désignerons par $V = V_A - V_B$.

Supposons un régime permanent établi dans une portion de circuit AB. Soit I l'intensité du courant qui circule de A vers B. La différence de potentiel $V_A - V_B$ garde une valeur constante. Pendant un temps t, une quantité d'électricité $q = It$ passe du point A au point B et subit une chute de potentiel $V_A - V_B$. Il en résulte (§ 57) une libération d'énergie :

$$W' = (V_A - V_B)\, q.$$

L'énergie électrique libérée dans la portion de circuit AB est donc un produit de deux facteurs :

1° La quantité d'électricité q transportée par le courant pendant le temps t qui caractérise l'écoulement de l'électricité dans le fil, c'est le facteur de position ;

2° La différence de potentiel $V_A - V_B$ entre les extrémités du circuit, c'est la variable de tension.

La *puissance* électrique disponible entre A et B est :

$$P' = \frac{W'}{t} = (V_A - V_B)\frac{q}{t} = (V_A - V_B)\, I.$$

d'où :

$$\boxed{V_A - V_B = \frac{P'}{I}}$$

Nous avons là une nouvelle expression de la différence de potentiel, applicable seulement au courant électrique.

La différence de potentiel entre deux points *A* et *B* d'un circuit parcouru par un courant est égale au quotient de la puissance totale libérée dans la portion de circuit par l'intensité du courant.

Dans le système pratique d'unités électriques, les différences de potentiel s'expriment en volts (§ 57), les puissances en watts et les intensités en ampères.

Remarque. — Le sens adopté pour le courant électrique correspond à un déplacement des charges positives. Or nous savons que celles-ci se déplacent dans le sens du champ, c'est-à-dire dans le sens des potentiels décroissants. Donc *le potentiel ira en décroissan quand on se déplacera le long d'un fil dans le sens du courant.*

II. — FORCE ÉLECTROMOTRICE

135. — Définition de la force électromotrice d'un générateur. — Considérons un circuit électrique comprenant un générateur et des appareils d'utilisation : voltamètres, lampes à incandescence, moteurs, etc... L'é-

nergie absorbée par ces appareils est fournie évidemment par le générateur. Cherchons à déterminer les deux facteurs de cette énergie.

Prenons, par exemple, une pile. L'énergie W fournie par ce générateur provient des réactions exothermiques qui ont lieu et qui se traduisent par une usure des produits. Or la masse des produits usés est, d'après la loi de Faraday, proportionnelle à l'intensité du courant et au temps, c'est-à-dire à la quantité d'électricité qui a traversé le circuit.

De même, dans une machine de Gramme génératrice, l'énergie dépensée pour maintenir constante la vitesse de rotation est proportionnelle à l'intensité débitée et au temps d'utilisation.

D'une façon générale, *la quantité d'électricité débitée par un générateur est un premier facteur de l'énergie.* Il est facile de voir que c'est le facteur de position. Dans une pile, par exemple, la quantité d'électricité qui a traversé l'appareil définit les phénomènes d'électrolyse qui ont eu lieu depuis l'instant initial, c'est-à-dire la *position* actuelle de la pile au point de vue de l'usure des produits.

L'énergie fournie par un générateur est donc de la forme $W = E \times q$, E étant le facteur de tension. Ce facteur caractérise l'aptitude du générateur à faire varier q, c'est-à-dire à produire du courant. E s'appelle, par définition, la **force électromotrice** du générateur. (Nous écrirons dorénavant ce nom sous la forme abrégée *f. é. m.*)

Nous devons distinguer deux espèces de générateurs.

1° Ceux dont la *f. é. m.* dépend de l'intensité I du courant qui les traverse ; c'est le cas des dynamos ;

2° ceux dont la *f. é. m.* est indépendante du courant débité, c'est le cas des piles et des accumulateurs. Leur *f. é. m.* est alors une grandeur caractéristique du générateur dans l'état actuel.

De la relation de définition de la f. é. m. $W = Eq$, nous déduisons que la puissance fournie par le générateur est :

$$P = \frac{W}{t} = E\frac{q}{t} = EI$$

d'où

$$\boxed{E = \frac{P}{I}}$$

Cette relation exprime que, *pour un générateur à f. é. m. indépendante de l'intensité,* **la force électromotrice est mesurée par le même nombre que la puissance qu'il fournit quand il débite un courant d'intensité unité.**

La comparaison des formules $E = \frac{P}{I}$ et $V_A - V_B = \frac{P'}{I}$ montre qu'une f. é. m. est une grandeur de même nature qu'une différence de potentiel. Nous pourrons donc l'exprimer en volts.

Un générateur a une f. é. m. de 1 *volt s'il fournit une puissance de* 1 *watt quand il débite un courant de* 1 *ampère.*

Une pile thermoélectrique a une f. é. m. de l'ordre du millivolt ; une pile Daniell : 1 volt environ ; un élément d'accumulateur : 2 volts environ ; une dynamo donne une f. é. m. de 110 ou 220 volts.

On a cherché à réaliser, sinon un générateur de f. é. m. exactement égale à 1 volt, un générateur de f. é. m. connue avec précision. Ce générateur étalon est une pile, l'élément Weston, dont la f. é. m. est égale à 1,0183 volt à 20°.

*136. — **Association de générateurs en série.*** — Associons plusieurs générateurs en reliant le pôle positif de l'un au pôle négatif du suivant. Le circuit extérieur sera branché entre le pôle positif du dernier générateur et le pôle négatif du premier (fig. 121).

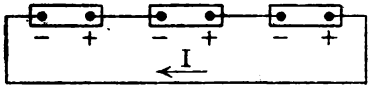


FIG. 121. — Générateurs en série.

Quand le circuit est fermé, tous les générateurs sont traversés par le même courant d'intensité I. Appelons E_1, E_2, .. E_n, les f. é. m. des générateurs. Ils fournissent respectivement les puissances $P_1 = E_1 I$, $P_2 = E_2 I$, ..., $P_n = E_n I$. D'après le principe de la conservation de l'énergie, la puissance totale fournie est la somme :

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = (E_1 + E_2 + \ldots + E_n) I.$$

Un générateur unique produisant la même puissance P en débitant la même intensité I devrait avoir une f. é. m.

$$E = \frac{P}{I} = E_1 + E_2 + \ldots + E_n.$$

La f. é. m. d'un ensemble de générateurs groupés en série est égale à la somme des f. é. m. des différents éléments.

III. — FORCE CONTRE-ÉLECTROMOTRICE

*137. — **Définition de la force contre-électromotrice d'un récepteur.*** — Lorsque l'énergie absorbée par un appareil traversé par un courant est uniquement transformée en chaleur par effet Joule, on dit que l'appareil est une *résistance morte*. Mais il n'en est pas toujours ainsi. A l'effet Joule s'ajoute souvent une absorption d'énergie qui sert soit à augmenter l'énergie chimique du système, soit à produire un travail mécanique. Un tel appareil, où il y a absorption d'énergie autrement que par effet Joule, s'appelle un **récepteur.**

Un moteur électrique, un voltamètre à eau acidulée sont des récepteurs. Par contre, un voltamètre à sulfate de cuivre avec électrodes en cuivre se comporte comme une résistance morte, car le passage du courant se traduit par un transport de cuivre de l'anode à la cathode sans augmentation de l'énergie chimique du système.

L'expérience montre que l'énergie absorbée par un récepteur autrement

que par effet Joule est proportionnelle à la quantité d'électricité q qui a traversé l'appareil. Par exemple dans un voltamètre, l'augmentation d'énergie chimique est due à l'électrolyse dont les effets sont proportionnels à la quantité d'électricité q. Donc q est un des facteurs de l'énergie.

L'énergie W′ absorbée, autrement que par effet Joule, est donc de la forme $W' = E' \times q$, E′ étant un facteur qui caractérise l'aptitude du récepteur à absorber de l'énergie ; E′ s'appelle, par définition, la **force contre-électromotrice** (*f. c. é. m.*) du récepteur.

Il y a lieu de distinguer deux sortes de récepteurs :

1° Ceux dont la f. c. é. m. dépend de l'intensité du courant qui les traverse ; c'est le cas de certains moteurs électriques ;

2° ceux dont la f. c. é. m. est indépendante du courant qui les traverse ; c'est le cas de certains autres moteurs et des récepteurs électrolytiques. Leur f. c. é. m. est alors une grandeur caractéristique du récepteur dans l'état actuel.

La relation de définition de la force contre-électromotrice $W' = E'q$ nous permet de calculer la puissance P′ absorbée autrement que par effet Joule :

$$P' = \frac{W'}{t} = E'I$$

d'où :

$$\boxed{E' = \frac{P'}{I}}$$

Cette relation montre que, *pour un récepteur à f. c. é. m. indépendante de l'intensité*, **la force contre-électromotrice est mesurée par le même nombre que la puissance qu'il absorbe autrement que par effet Joule quand il est traversé par un courant d'intensité unité.**

La f. c. é. m. est une grandeur de même nature qu'une différence de potentiel et qu'une f. é. m. Dans le système pratique d'unités électriques, une f. c. é. m. s'exprimera en *volts*.

138. — ***Différents types de récepteurs.*** — Considérons un voltamètre à eau acidulée. Sa f. c. é. m. ne prend pas instantanément, dès le début du passage du courant, sa valeur définitive E_0. Initialement nulle, la f. c. é. m. croît progressivement. Mais, quel que soit le sens dans lequel on fait passer le courant initial, l'appareil absorbe de l'énergie et se polarise.

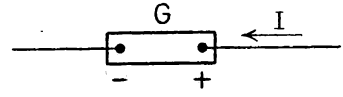


FIG. 122
Générateur en opposition.

Prenons maintenant un générateur G. Plaçons-le sur un circuit électrique parcouru par un courant de façon qu'il soit traversé par ce courant en sens inverse du courant qu'il tend à produire (fig. 122). Le générateur G est dit placé en *opposition* avec le générateur qui produit le courant. Les phénomènes qui se passent à l'intérieur de G changent de sens ; au lieu de fournir de l'énergie, l'appareil va en absorber et se

comportera comme un récepteur. Donc *un générateur en opposition joue le rôle d'un récepteur.* L'énergie absorbée autrement que par effet Joule et provenant des phénomènes intérieurs, sera égale à celle qu'il fournirait comme générateur. Par suite, la f. c. é. m. de l'appareil utilisé en récepteur est égale à la f. é. m. du générateur.

En résumé nous distinguerons deux types de récepteurs :

1° LES RÉCEPTEURS NON POLARISÉS comme les voltamètres qui absorbent de l'énergie quel que soit le sens du courant qui les traverse initialement.

2° LES RÉCEPTEURS POLARISÉS qui peuvent être considérés comme des générateurs en opposition sur le courant. Si le sens du courant initial était changé, ils se comporteraient comme des générateurs. *La f. é. m. de l'appareil utilisé comme générateur est égale à la f. c. é. m. de l'appareil utilisé comme récepteur.*

139. — Association de récepteurs en série. — Considérons plusieurs récepteurs de f. c. é. m. $E'_1, E'_2 \ldots E'_n$ placés en série sur un même circuit parcouru par un courant d'intensité I. Tous ces récepteurs sont traversés par le même courant. Ils absorbent respectivement autrement que par effet Joule, les puissances :

$$P'_1 = E'_1 I, \quad P'_2 = E'_2 I, \ldots, \quad P'_n = E'_n I.$$

L'ensemble absorbe donc, autrement que par effet Joule, une puissance totale :

$$P' = P'_1 + P'_2 + \ldots + P'_n = (E'_1 + E'_2 + \ldots + E'_n) I.$$

Un récepteur unique absorbant autrement que par effet Joule la même puissance devrait avoir une f. c. é. m. E' telle que :

$$E' = \frac{P'}{I} = E'_1 + E'_2 + \ldots + E'_n$$

La f. c. é. m. d'un ensemble de récepteurs placés en série est égale à la somme des f. c. é. m. des différents éléments.

Exercice.

32. A l'intérieur d'un cylindre en aluminium se trouve une spirale de chauffe en platine, isolée électriquement. On fait passer un courant de 0,812 ampère pendant 4 minutes ; l'intensité est connue à 5×10^{-3} ampère près. Un voltmètre, placé entre les extrémités de la résistance de chauffe, indique une différence de potentiel de 15,61 volts ; la différence de potentiel est connue à 10^{-2} volt près.

Calculer l'énergie électrique fournie au cylindre. Avec quelle précision faut-il évaluer la durée de passage du courant pour que l'erreur relative sur l'énergie soit inférieure à $1{,}5 \times 10^{-3}$?

CHAPITRE XVI

LOIS D'OHM ET DE KIRCHHOFF

140. — Loi d'Ohm. Définition légale du volt. — Considérons une résistance morte AB, c'est-à-dire dans laquelle toute l'énergie électrique est transformée en chaleur par effet Joule. Faisons passer dans ce conducteur un courant d'intensité I et soit $V_A - V_B$ la différence de potentiel entre les extrémités A et B.

La puissance électrique disponible entre A et B est, d'après la propriété de la différence de potentiel :

$$P = (V_A - V_B)\, I.$$

Cette puissance se retouve entièrement sous forme de chaleur par effet Joule. Donc, d'après la loi de Joule, nous avons :

$$P = RI^2,$$

R étant la résistance du conducteur AB.

Des relations précédentes, nous déduisons :

$$(V_A - V_B)\, I = RI^2.$$

d'où :

$$\boxed{V_A - V_B = RI} \qquad (1)$$

Cette relation traduit la loi d'Ohm.

Loi d'Ohm. — **La différence de potentiel entre les extrémités d'une résistance morte est numériquement égale au produit de l'intensité du courant par la résistance.**

La relation (1) donne la différence de potentiel en volts, si l'on exprime l'intensité en ampères et la résistance en ohms. Elle permet de définir le volt à partir des étalons internationaux l'ampère et l'ohm. C'est la définition légale du volt :

Le volt est la différence de potentiel entre les deux extrémités d'un fil ayant une résistance d'un ohm lorsqu'il est parcouru par un courant d'un ampère.

Vérification expérimentale. — On peut vérifier expérimentalement la loi d'Ohm. La mesure de l'intensité du courant s'effectue avec un ampèremètre et la mesure de la différence de potentiel se fait avec un électromètre. La vérification de la loi d'Ohm comprend deux parties :

1° Le circuit est constitué par un fil cylindrique et homogène AB, un ampèremètre, un rhéostat et un générateur (fig. 122 *bis*). L'électromètre étant relié aux deux extrémités A et B du fil, on fait passer dans le circuit des courants d'intensités I, I', I'' et on mesure, pour chaque valeur de l'intensité, la différence de potentiel entre A et B. Soit $V_A - V_B$, $V_A' - V_B'$, $V''_A - V''_B$, les différences de potentiel, on constate que :

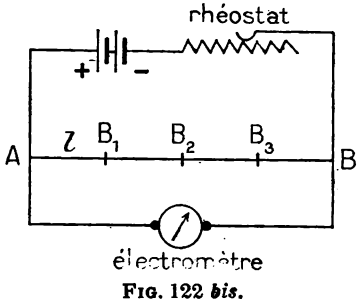


FIG. 122 *bis*.
Vérification de la loi d'Ohm.

$$\frac{V_A - V_B}{I} = \frac{V'_A - V'_B}{I'} = \frac{V''_A - V''_B}{I''}$$

ce qui montre que la différence de potentiel entre A et B est proportionnelle à l'intensité du courant.

2° L'intensité du courant étant constante, l'électromètre est relié, d'une part, à l'extrémité A du fil et, d'autre part, successivement aux points B_1, B_2, B_3 tels que $AB_1 = l$, $AB_2 = 2\,l$, $AB_3 = 3\,l$. On mesure, dans chaque cas, la différence de potentiel correspondante. Soit V_1, V_2, V_3 ces différences de potentiel. On constate que :

$$V_1 = \frac{V_2}{2} = \frac{V_3}{3}.$$

La résistance du fil étant proportionnelle à sa longueur, les relations précédentes nous montrent que la différence de potentiel est proportionnelle à la résistance.

141. — ***Application de la loi d'Ohm aux électrolytes.*** — La loi d'Ohm s'applique aux électrolytes. On peut le vérifier expérimentalement, mais la théorie des ions permet d'interpréter le passage du courant dans les électrolytes et de retrouver la loi d'Ohm.

Considérons une cuve électrolytique formée de deux compartiments A et C réunis par un tube cylindrique horizontal de section s (fig. 123). Prenons comme électrolyte une solution de chlorure de sodium. Plongeons dans cette solution deux électrodes entre lesquelles on établit une différence de potentiel V.

Sous l'action du champ électrique H, les ions Na^+ et Cl^- se déplacent et sont soumis à une force $f = eH$, e étant la charge élémentaire. L'ion prend un mouvement accéléré qui, à cause des frottements de l'ion sur la solution, atteint rapidement une vitesse limite u pour laquelle la force agissante f est égale et opposée à la force f' due aux frottements. La force f' est dirigée en sens inverse du mouvement et est proportionnelle à la vitesse : $f' = \mu u$. Pendant le mouvement uniforme de l'ion, nous avons donc : $eH = \mu u$.

$$u = \frac{e}{\mu} H.$$

La vitesse limite de l'ion est proportionnelle au champ. Nous avons $u = kH$, k étant un facteur de proportionnalité qui dépend de la nature de l'ion et qu'on appelle la **mobilité** de l'ion. Les ions Na^+ possèdent une mobilité k_1 et les ions chlore possèdent une mobilité k_2 ; k_1 est différent de k_2 car les deux ions n'ont pas la même grosseur.

Calculons l'intensité du courant dans l'électrolyte. Considérons le tube cylindrique horizontal *ab* de longueur *l*. L'intensité du courant I est égale à la quantité d'électricité qui traverse par seconde une section quelconque P de ce tube (fig. 123) ; elle est transportée par les ions.

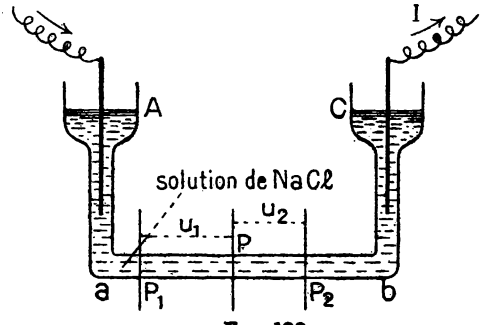


FIG. 123

Les cathions sodium Na^+, portant chacun la charge élémentaire *e*, se déplacent dans le sens du champ, c'est-à-dire de *a* vers *b*. Ceux qui traversent dans une seconde la section P, étaient contenus dans le cylindre limité par P et une section P_1 située à la distance u_1 de P, u_1 étant la vitesse limite de Na^+. Appelons N le nombre de molécules de NaCl dissoutes dans l'unité de volume et α le coefficient de dissociation, c'est-à-dire le rapport entre le nombre de molécules dissociées et le nombre total de molécules dissoutes. Par unité de volume, il y a $N\alpha$ molécules dissociées qui fournissent $N\alpha$ ions $N\alpha^+$ et $N\alpha$ ions Cl^-. Le cylindre de longueur u_1 a pour volume su_1 et contient $N\alpha \times su_1$ ions Na^+ qui, en traversant la section P, transportent une quantité d'électricité positive dans le sens *ab* égale à :

$$q_1 = N\alpha \times su_1 \times e$$

De même les anions Cl^- se déplacent de *b* vers *a*. Ceux qui passent en une seconde à travers la section P étaient contenus dans un cylindre de longueur u_2, u_2 étant la vitesse limite de l'anion Cl^-. Ce cylindre de volume su_2 contient $N\alpha \times su_2$ ions Cl^- qui transportent une quantité d'électricité négative dans le sens *ba* égale, en valeur absolue, à :

$$q_2 = N\alpha \times su_2 \times e.$$

Les quantités d'électricité q_1 et q_2 étant de signes contraires et se déplaçant en sens inverse, s'ajoutent. L'intensité I du courant est donc :

$$I = q_1 + q_2 = eN\alpha s\,(u_1 + u_2).$$

Or $u_1 = k_1 H$ et $u_2 = k_2 H$. D'autre part, la différence de potentiel V entre *a* et *b* est égale au travail du champ électrique (§ 53) : $V = Hl$.

D'où : $$u_1 = k_1 \frac{V}{l}, \qquad u_2 = k_2 \frac{V}{l},$$

et : $$I = eN\alpha s \frac{V}{l}(k_1 + k_2).$$

Ce que nous pouvons écrire :

$$V = \frac{1}{(k_1 + k_2)\, N \alpha e} \times \frac{l}{s} \times I.$$

Nous voyons que :

1° La différence de potentiel est proportionnelle à l'intensité du courant ;

2° La résistance d'une colonne cylindrique d'électrolyte est donnée par la formule trouvée pour les fils (§ 128) :

$$R = \rho \frac{l}{s}, \qquad \text{avec} \qquad \rho = \frac{1}{(k_1 + k_2)\, N \alpha e}.$$

En résumé, **la loi d'Ohm et la formule $R = \rho \frac{l}{s}$ sont applicables aux électrolytes.**

*142. — **Loi d'Ohm généralisée.*** — La loi d'Ohm se rapporte à une portion de circuit ne contenant que des résistances mortes, c'est-à-dire où toute l'énergie électrique est transformée en chaleur par effet Joule. La loi d'Ohm généralisée est relative à une portion de circuit contenant en outre un récepteur ou un générateur.

1° Portion de circuit contenant un récepteur. — Soit AB (fig. 124) une portion de circuit comprenant des résistances mortes et un récepteur M (cuve électrolytique, moteur ou générateur en opposition). Ce récepteur, comme tout conducteur, est le siège d'un dégagement de chaleur par effet Joule et possède par suite une résistance propre r appelée *résistance intérieure* du récepteur.

Désignons par R la résistance *totale* de la portion de circuit AB, y compris la résistance intérieure du récepteur. Soit I l'intensité du courant qui parcourt le circuit de A en B (fig. 124) et appelons E′ la force contre-électromotrice du récepteur.

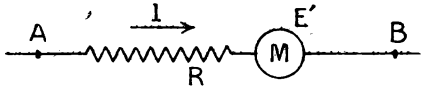


Fig. 124

La puissance électrique P disponible entre A et B est, d'après la propriété de la différence de potentiel :

$$P = (V_A - V_B)\, I.$$

Une partie de cette puissance se transforme en chaleur par effet Joule ; cette puissance est $P_1 = RI^2$ d'après la loi de Joule. Le reste est absorbé par le récepteur autrement que par effet Joule ; cette puissance est $P_2 = E'I$ d'après la définition de la f. c. é. m. Nous avons :

$$P = P_1 + P_2.$$

$$(V_A - V_B)\, I = RI^2 + E'I.$$

D'où :

$$\boxed{V_A - V_B = RI + E'}$$

Dans le cas particulier où A et B sont les bornes du récepteur, la formule précédente nous montre que *la différence de potentiel aux bornes du récepteur est toujours plus grande que sa f. c. é. m.*

Vérification expérimentale : Réalisons le montage représenté par la figure 125. Le générateur G est constitué par deux accumulateurs et le récepteur M est une pile en opposition avec G. La différence de potentiel est mesurée avec un appareil D appelé voltmètre qui sera décrit plus loin (§ 150). Le rhéostat R*h* permet de faire varier l'intensité dans le circuit.

Mesurons, pour différentes valeurs I_1, I_2, I_3 de l'intensité, lues sur l'ampèremètre, les valeurs correspondantes V_1, V_2, V_3 de la différence de potentie entre A et B. Traduisons nos résultats par un graphique (fig. 126) en portant en abscisses les intensités I et en or-

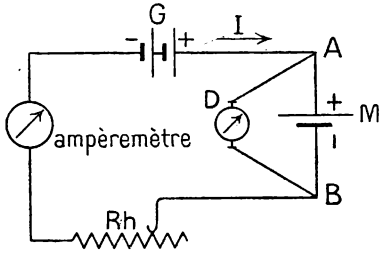


FIG. 125

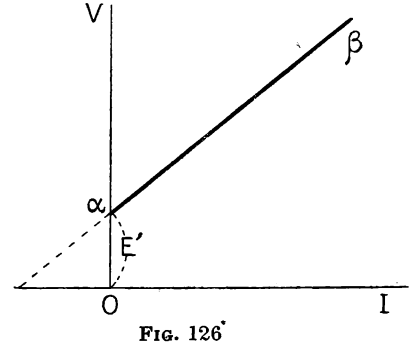


FIG. 126

données les différences de potentiel V. Nous trouvons que les points obtenus se disposent sur une droite $\alpha\beta$, ce qui prouve que V est une fonction linéaire de I. La formule $V = RI + E'$ montre que l'ordonnée à l'origine $O\alpha$ mesure la f. c. é. m. du récepteur et que le coefficient angulaire de la droite $\alpha\beta$ est égal à la résistance totale R de la portion de circuit AB. Ces deux résultats sont faciles à contrôler expérimentalement par mesure directe de E' et R.

2° PORTION DE CIRCUIT CONTENANT UN GÉNÉRATEUR. — Soit AGB la portion de circuit comprenant un générateur de f. é. m. E et des résistances mortes. Le générateur est le siège d'un effet Joule et possède une résistance propre appelée *résistance intérieure* du générateur.

Désignons par R la résistance totale de la portion AGB. Soit I l'intensité du courant qui parcourt le circuit de A en B à travers le générateur (fig. 127).

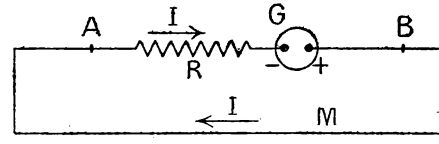


FIG. 127

La puissance électrique P fournie par le générateur est $P = EI$, d'après la définition de la f. é. m. Cette puissance se transforme, en partie, en chaleur par effet Joule dans la portion AGB. Cette puissance est $P_1 = RI^2$ d'après la loi de Joule. Le reste est absorbé dans le circuit extérieur BMA ; cette

puissance est $P_2 = (V_B - V_A)\, I$ d'après la propriété de la différence de potentiel. Nous avons donc :

$$P = P_1 + P_2.$$

$$EI = RI^2 + (V_B - V_A)\, I.$$

d'où :

$$\boxed{V_A - V_B = RI - E}$$

Dans le cas particulier où B et A sont les bornes positive et négative du

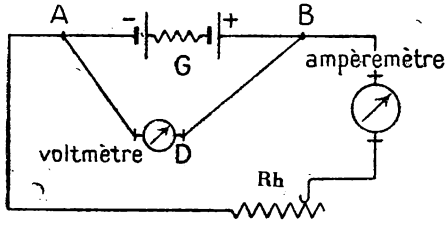


Fig. 128

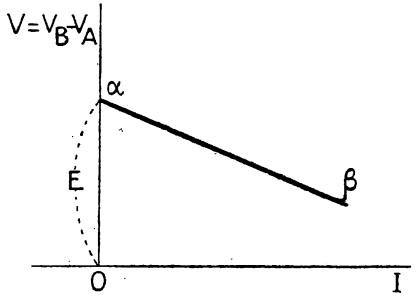


Fig. 129

générateur de résistance intérieure r, la relation précédente devient $V_B - V_A = E - rI$. Elle nous montre :

1° Que la différence de potentiel aux bornes d'un générateur est toujours inférieure à sa f. é. m.;

2° que si l'intensité est nulle ou négligeable, nous avons $V_B - V_A = E$. *La f. é. m. d'un générateur est égale à la différence de potentiel entre ses bornes en circuit ouvert* ($I = 0$).

Vérification expérimentale. — La méthode est analogue à la précédente. Réalisons le montage représenté par la figure 128. Le générateur G est constitué par deux accumulateurs reliés par un fil résistant. Le circuit extérieur comprend le rhéostat R*h* et un ampèremètre. Un voltmètre D, branché entre A et B, indique la différence de potentiel. Mesurons pour différentes valeurs I_1, I_2, I_3 de l'intensité, les valeurs correspondantes V_1, V_2, V_3 des différences de potentiel entre B et A. Traduisons nos résultats par un graphique (fig. 129) en portant en abscisses les intensités I et en ordonnées les différences de potentiel $V = V_B - V_A$. Les points obtenus se disposent sur une droite, ce qui prouve que V est une fonction linéaire décroissante de I. La formule $V = V_B - V_A = E - RI$ montre que l'ordonnée à l'origine Oα mesure la f. é. m. du générateur et que le coefficient angulaire de la droite est égal à la résistance de la portion AB. Ces deux résultats sont faciles à contrôler expérimentalement par mesure directe de E et de R.

3° LOI GÉNÉRALE. — Pour une portion de circuit AB, *le courant circulant de A en B*, nous avons obtenu les relations :

$$V_A - V_B = RI + E' \text{ pour un récepteur.}$$
$$V_A - V_B = RI - E \text{ pour un générateur.}$$

Nous pouvons grouper les formules précédentes en une seule :

$$\boxed{V_A - V_B = RI - E}$$

à condition d'appeler A le point d'entrée du courant et B le point de sortie, et de considérer E comme *positif* pour un générateur et *négatif* pour un *récepteur*.

La formule générale $V_A - V_B = RI - E$ traduit la LOI D'OHM GÉNÉRALISÉE.

143. — Loi d'Ohm étendue à un circuit fermé. — 1° PREMIER CAS. — Considérons un générateur de f. é. m. E et de résistance intérieure r dont les pôles sont reliés par une résistance morte R (fig. 130). Soit I l'intensité du courant. La puissance fournie par le générateur est $P = EI$. Elle se transforme en chaleur par effet Joule dans le générateur et dans la résistance ; la puissance ainsi libérée est, d'après la loi de Joule, $rI^2 + RI^2$. Nous pouvons donc écrire :

$$P = EI = rI^2 + RI^2.$$

D'où :

$$\boxed{E = (R + r)\, I} \qquad (1)$$

La quantité $R + r$ s'appelle la résistance totale du circuit. La relation (1) traduit ce qu'on appelle parfois la LOI DE POUILLET.

Dans un circuit fermé, dont la partie extérieure au générateur ne comprend que des résistances mortes, la f. é. m. du générateur est numériquement égale au produit de l'intensité du courant par la résistance totale du circuit.

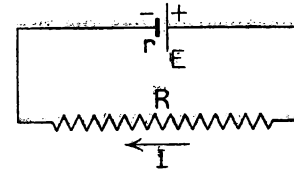


FIG. 130

Cette loi a été établie expérimentalement par Pouillet. Il utilisait un générateur dont la résistance intérieure était négligeable. Le circuit extérieur était constitué par un fil cylindrique et homogène de résistivité ρ, de section s, dont on pouvait faire varier la longueur l introduite dans le circuit. Dans ces conditions $r = 0$, $R = \rho \frac{l}{s}$ et la formule (1) devient :

$$E = \rho \frac{l}{s} I,$$

ou :

$$I = E \times \frac{s}{\rho l}.$$

C'est cette formule qui a été vérifiée par Pouillet. Il a également fait toute une série de mesures avec des générateurs dont la résistance intérieure n'était plus négligeable.

2° Deuxième cas. — Considérons un circuit fermé unique quelconque contenant des générateurs, des récepteurs et des résistances mortes. Appelons $E_1, E_2, \ldots, E_n$ les f. é. m. des générateurs et $E'_1, E'_2, \ldots, E'_p$ les f. c. é. m. des récepteurs. Désignons par $R_1, R_2, \ldots, R_m$ les résistances des différentes parties du circuit. Soit I l'intensité du courant qui est la même partout.

Ecrivons que l'énergie fournie par les générateurs est égale à l'énergie obtenue par effet Joule dans les résistances, augmentée de l'énergie absorbée autrement que par effet Joule dans les récepteurs. Nous avons

$$(E_1 + E_2 + \ldots + E_n)\, I = (R_1 + R_2 + \ldots + R_m)\, I^2 + (E'_1 + E'_2 + \ldots E'_p)\, I,$$

ce qui s'écrit :

$$\boxed{\Sigma E - \Sigma E' = I \times \Sigma R} \qquad (2)$$

en désignant par ΣE la somme des forces électromotrices, par $\Sigma E'$ la somme des forces contre-électromotrices et par ΣR la somme des résistances du circuit.

La formule générale (2) traduit ce qu'on appelle parfois la loi de Pouillet généralisée.

144. — Lois de Kirchhoff. — Les lois de Kirchhoff constituent une généralisation des lois précédentes et s'appliquent à un réseau quelconque de conducteurs. Nous supposerons seulement que les générateurs ont des f. é. m. indépendantes de l'intensité et que les récepteurs ont aussi des f. c. é. m. indépendantes de l'intensité.

Considérons le réseau de conducteurs représenté par la figure 131. On appelle **nœuds** du réseau, les points tels que A, B, C... communs à plusieurs branches. On appelle **mailles** du réseau, les différents circuits fermés que l'on peut constituer avec les conducteurs. Les circuits fermés ABCDFGA, CHDC et FDKF constituent des mailles.

Première loi relative aux nœuds. — Considérons un nœud A (fig. 131). Comme le régime permanent est supposé établi, il ne peut se produire en A ni accumulation, ni disparition d'électricité. Donc la somme des intensités

I_6 et I_7 des courants qui se dirigent vers A est égale à la somme des intensités I_1 et I_8 des courants qui s'en éloignent.

Nous avons $$I_6 + I_7 = I_1 + I_8,$$

ou : $$I_6 + I_7 - I_1 - I_8 = 0.$$

Si nous convenons de compter comme positives les intensités des courants qui se dirigent vers A et comme négatives celles des courants qui s'en éloignent, nous avons alors :

$$I_6 + I_7 + I_1 + I_8 = 0.$$

La somme algébrique des intensités des courants qui passent par un même nœud est nulle.

C'est la première loi de Kirchhoff.

SECONDE LOI RELATIVE AUX MAILLES. — Considérons la maille ABCDFGA (fig. 131) et appliquons la loi d'Ohm généralisée à chacune des branches.

La branche AB de résistance R_1 ne contient ni générateur, ni récepteur. Le courant I_1 allant de A vers B, nous avons :

$$V_A - V_B = R_1 I_1.$$

La branche BC de résistance R_2 contient un récepteur de f. c. é. m. E'_2 et un générateur en opposition sur le courant, c'est-à-dire jouant le rôle d'un récepteur.

Donc :

$$V_B - V_C = R_2 I_2 + E_2 + E'_2.$$

La branche CD de résistance R_3 contient un générateur de f. é. m. E_3.

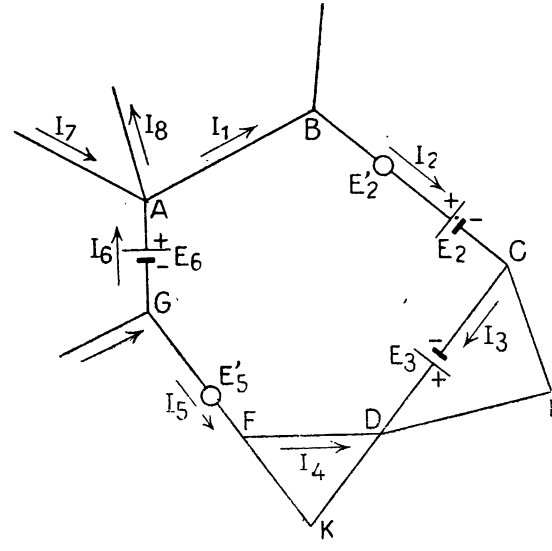


FIG. 131

Donc : $$V_C - V_D = R_3 I_3 - E_3.$$

La branche DF ne contient qu'une résistance R_4. Le courant allant de F en D, nous avons $V_F - V_D = R_4 I_4$, d'où :

$$V_D - V_F = - R_4 I_4.$$

La branche FG de résistance R_5 contient un récepteur de f. c. é. m. E'_5. Donc, le courant allant de G en F, nous avons : $V_G - V_F = R_5 I_5 + E'_5$, d'où :

$$V_F - V_G = - R_5 I_5 - E'_5.$$

Enfin, la branche GA contient un générateur. Nous avons :

$$V_G - V_A = R_6 I_6 - E_6.$$

En résumé, nous obtenons les six relations :

$$V_A - V_B = R_1 I_1.$$
$$V_B - V_C = R_2 I_2 + E_2 + E'_2.$$
$$V_C - V_D = R_3 I_3 - E_3.$$
$$V_D - V_F = - R_4 I_4.$$
$$V_F - V_G = - R_5 I_5 - E'_5.$$
$$V_G - V_A = R_6 I_6 - E_6.$$

Ajoutons membre à membre, nous obtenons la relation (1) :

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 - R_4 I_4 - R_5 I_5 + R_6 I_6 = E_2 + E'_5 + E_6 - E_3 - E'_2.$$

Cette relation peut prendre une forme algébrique simple en adoptant les conventions suivantes :

Remplaçons d'abord les récepteurs non polarisés par des générateurs polarisés en opposition avec le courant qui les traverse. La maille ABCDFGA est alors représentée par la figure 132. Choisissons arbitrairement un sens positif de déplacement sur cette maille. Les courants seront comptés positivement quand ils auront le sens positif et négativement dans le cas contraire. Les f. é. m. et les f. c. é. m. seront comptées positivement si l'appareil polarisé correspondant tend à produire, s'il était seul, un courant dans le sens positif ; elles seront négatives dans le cas contraire.

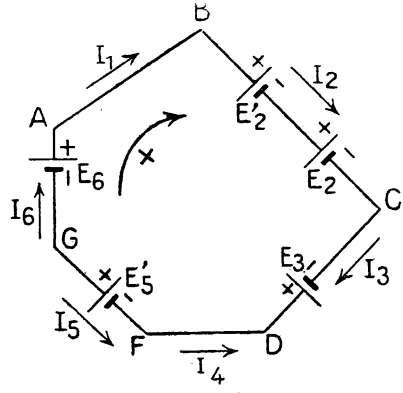


FIG. 132

Avec cette convention, I_1, I_2, I_3 et I_6 sont positifs et I_4 et I_5 sont négatifs ; E_2, E'_5 et E_6 sont positifs et E'_2, E_3 sont négatifs. La relation (1) devient, avec les valeurs algébriques :

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_5 I_5 + R_6 I_6 = E_2 + E'_5 + E_6 + E_3 + E'_2,$$

ce que l'on peut écrire :

$$\boxed{\Sigma E = \Sigma RI}$$

Cette relation est générale et traduit la seconde loi de Kirchhoff.

145. — Utilisation des lois de Kirchhoff. — L'application des lois de Kirchhoff nécessite la connaissance *préalable* du sens du courant dans les branches contenant des récepteurs non polarisés, afin de placer les pôles du générateur en opposition équivalent. Pour préciser l'utilisation de ces lois, nous distinguerons trois cas :

1° LE SENS DES COURANTS EST CONNU DANS CHACUNE DES BRANCHES du

réseau de conducteurs. Il est alors facile d'appliquer les lois de Kirchhoff. Nous remplaçons d'abord tous les récepteurs non polarisés par des générateurs polarisés en opposition avec le courant *dont le sens est connu.* Puis nous choisissons un sens positif de circulation, d'ailleurs arbitraire, et nous appliquons aux nœuds et aux mailles les lois de Kirchhoff. Le nombre d'équations *indépendantes* est égal au nombre de quantités à déterminer.

2° LE RÉSEAU NE CONTIENT AUCUN RÉCEPTEUR NON POLARISÉ et le sens réel des courants n'est pas connu. Nous choisirons, sur chaque branche, un sens *arbitraire* pour le courant, le sens le plus probable de préférence. Puis, nous appliquerons les lois de Kirchhoff aux nœuds et aux mailles et nous pourrons calculer les intensités dans les différentes branches. Le signe des intensités permet de déduire le sens réel des courants : sens prévu initialement pour les intensités positives ; sens inverse du sens prévu initialement pour les intensités négatives.

3° CAS GÉNÉRAL. — Certaines branches contiennent des récepteurs non polarisés (voltamètres) et le sens des courants correspondants n'est pas connu. Nous choisirons sur chaque branche un sens de courant, celui qui semble le plus probable, et nous opérerons comme dans le premier cas. Le signe des intensités calculées donne (2°) le sens réel des courants. Pour que la solution obtenue soit acceptable, *il est nécessaire que les courants dans les branches contenant les récepteurs non polarisés, aient le sens choisi au début, c'est-à-dire que les intensités correspondantes soient positives.* Ainsi le générateur ayant remplacé le récepteur sera effectivement en opposition et jouera bien le rôle d'un récepteur.

S'il n'en est pas ainsi, nous changerons le sens du courant dans la branche, nous intervertirons les pôles du générateur en opposition équivalent au récepteur, et nous recommencerons le calcul. *La seule solution acceptable sera celle pour laquelle tous les générateurs équivalents aux récepteurs non polarisés seront effectivement traversés par des courants de sens inverses à ceux qu'ils tendent à produire seuls, d'après la position choisie pour leurs pôles.*

Indiquons sur un exercice l'utilisation pratique de tout ce qui précède :

EXERCICE. — Un circuit électrique est constitué comme l'indique la figure 133. M est un voltamètre de f. c. é. m. E′. Calculer les intensités dans les différentes branches dans les deux cas suivants :

$$E' = 1 \text{ volt}, \quad E' = 2 \text{ volts}.$$

Prenons comme sens positif de déplacement le sens trigonométrique et adoptons

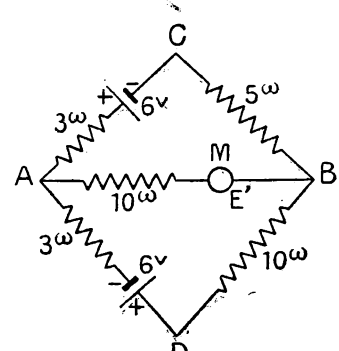


FIG. 133

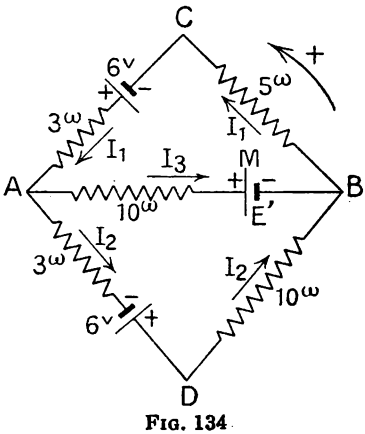


FIG. 134

les sens de courant indiqués par les flèches (fig. 134). Remplaçons le récepteur par un générateur en opposition et appliquons les lois de Kirchhoff, nous obtenons :

$$I_1 = I_2 + I_3.$$
$$6 - E' = 8I_1 + 10\,I_3,$$
$$6 + E' = 13I_2 - 10I_3,$$

d'où l'on tire :

$$I_3 = \frac{30 - 21\,E'}{314}.$$

1er *Cas.* — $E' = 1$ volt, $I_3 = \frac{9}{314} > 0$. Le courant I_3 ayant le sens choisi au début, la solution est acceptable. Les intensités des courants seront :

$$I_1 = 0{,}589\ \text{A} \qquad I_2 = 0{,}56\ \text{A} \qquad I_3 = 0{,}029\ \text{A}.$$

Leurs sens réels sont ceux indiqués par les flèches (fig. 134).

2e *Cas.* — $E' = 2$ volts,

$I_3 = -\frac{12}{14} < 0$. Le courant I_3 ayant un sens opposé au sens choisi, la solution n'est pas acceptable.

Changeons le sens du courant dans la branche AB et remplaçons le récepteur M par un générateur en opposition sur le courant (fig. 135). Nous obtenons le circuit représenté par la figure 135 auquel nous appliquons les lois de Kirchhoff. Nous avons :

$$I_2 = I_1 + I_3$$
$$6 + E' = 8I_1 - 10I_3$$
$$6 - E' = 13I_2 + 10I_3$$

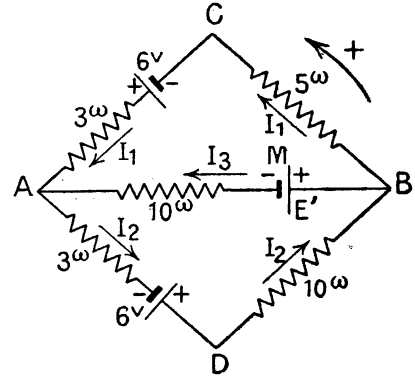


FIG. 135

D'où nous tirons :

$$I_3 = -\frac{30 + 21\,E'}{314} < 0.$$

Le courant I_3 ayant encore le sens inverse du sens choisi, la solution n'est pas acceptable. Le sens du courant n'étant ni de A vers B, ni de B vers A, c'est que l'intensité du courant est nulle dans la branche AB : $I_3 = 0$. Que se passe-t-il dans le circuit ?

Nous avons signalé (§ 138) qu'un voltamètre prenait **progressivement** sa f. c. é. m. limite E'. Quand on ferme le circuit précédent, un courant passe de A vers B dans la branche AB et la f. c. é. m. du voltamètre, initialement nulle, augmente. A un moment donné, cette f. c. é. m. devient juste égale à la différence de potentiel entre A et B (inférieure à E') et aucun courant ne passe plus dans le voltamètre. On dit que le voltamètre n'est que partiellement polarisé (§ 165).

Dans le cas actuel $I_2 = 0$, d'où :

$$I_1 = I_2 = \frac{12}{21} A \quad \text{et} \quad V_A - V_B = 13 \times \frac{12}{21} - 6 = \frac{30}{21} = 1{,}43 \text{ V}.$$

Le voltamètre dont la f. c. é. m. *limite* est de 2 volts n'atteindra qu'une f. c. é. m. égale à 1,43 V.

Notons qu'un récepteur *polarisé* de f. c. é. m. égale à 2 volts mis à la place du voltamètre, jouerait le rôle d'un générateur quelle que soit la position de ses pôles sur la branche AB

Exercices.

33. On associe en série 100 accumulateurs possédant chacun une f.é.m. de 2 volts et une résistance intérieure de 0,1 ohm. On ferme cette série sur une résistance de 90 ohms pendant un temps que l'on demande de calculer sachant que la quantité de chaleur dégagée dans la résistance extérieure est 43 750 calories-grammes.

Quelle est la différence de potentiel aux bornes de la série ?

Réponse : $t = 508$ s ; $= V$ 180 volts.

34. Une résistance R de 20 Ω et un moteur M de f.c.é.m. E' et de résistance intérieure $r = 2$ Ω sont disposés en parallèle entre les bornes d'un générateur ayant une f. é. m. de 120 volts et une résistance de 1 Ω.

Calculer la f. c. é. m. E' du moteur sachant qu'il est traversé par un courant de 15 ampères.

Réponse : E' = 70 volts.

35. Un générateur G a une f. é. m. de 20 volts et une résistance intérieure de 1 Ω. On monte, en dérivation entre ses bornes, trois circuits comprenant : le premier, une résistance $R_1 = 10$ Ω ; le second, une résistance $R_2 = 2$ Ω ; le troisième, un voltamètre dont la f. c. é. m. est 4 volts et la résistance intérieure 2 Ω. Calculer la puissance consommée dans le voltamètre.

Réponse : 33,9 watts.

36. Un circuit est constitué par 4 résistances identiques AB, BC, CD et DA, égales à r et placées suivant les 4 côtés d'un carré ABCD. En dérivation entre C et D, on monte un fil CMD, de milieu M et de résistance $2r$. Un courant de 11 ampères arrive par A et sort par un fil branché en M. Calculer les intensités dans les différentes branches du circuit.

CHAPITRE XVII

APPLICATIONS DES LOIS D'OHM ET DE KIRCHHOFF

I. — COURANTS DÉRIVÉS

146. — Lois des courants dérivés. — Considérons un circuit électrique comprenant entre deux points A et B plusieurs branches allant toutes de A en B (fig. 136). Ces branches constituent des *dérivations*. Nous supposerons que *les dérivations ne contiennent que des résistances mortes*.

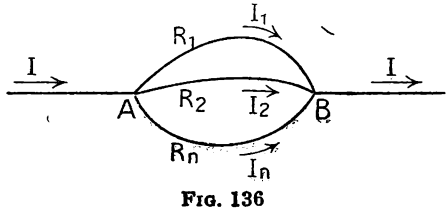


FIG. 136

Le courant principal I se partage entre les différentes branches. Soit I_1, I_2, ... I_n les intensités dans les différentes dérivations de résistances R_1, R_2... R_n. Les courants I_1, I_2, ..., I_n s'appellent des courants dérivés.

1° Appliquons au point A la loi de Kirchhoff relative aux nœuds. Nous avons :

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n.$$

La somme des intensités des courants dérivés est égale à l'intensité du courant dans le circuit principal.

Cette loi peut facilement se vérifier par l'expérience. Il suffit de placer sur le circuit principal et sur chaque dérivation un voltamètre ou un ampèremètre.

2° L'application de la loi d'Ohm aux différentes dérivations nous donne:

$$V_A - V_B = R_1I_1 = R_2I_2 = \ldots = R_nI_n.$$

D'où la loi :

Les intensités des courants dérivés sont inversement proportionnelles aux résistances correspondantes.

147. — Résistance équivalente à un ensemble de dérivations. — Considérons le conducteur unique qui, placé entre A et B à la place des dérivations, ne modifie pas ce qui se passe dans le reste du circuit. La résistance R de ce conducteur s'appelle la *résistance équivalente* à l'ensemble des dérivations.

Si rien n'est changé dans le circuit extérieur, c'est que la différence de potentiel entre A et B n'est pas modifiée. Comme ce conducteur unique est parcouru par le courant principal I, nous devons avoir :

$$V_A - V_B = RI.$$

Par suite :

$$V_A - V_B = RI = R_1I_1 = R_2I_2 = \ldots = R_nI_n.$$

D'où :

$$\frac{I}{\frac{1}{R}} = \frac{I_1}{\frac{1}{R_1}} = \frac{I_2}{\frac{1}{R_2}} = \ldots = \frac{I_n}{\frac{1}{R_n}} = \frac{I_1 + I_2 + \ldots + I_n}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}}$$

Or $I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$. La comparaison des rapports extrêmes nous montre que :

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{R_n}} \qquad (1)$$

On appelle *conductance* d'un conducteur, l'inverse de sa résistance. Nous voyons donc que :

La conductance d'un ensemble de conducteurs placés en dérivation est égale à la somme des conductances de ces divers conducteurs.

De la formule (1) il résulte :

1° Que la résistance équivalente à un ensemble de dérivations est inférieure à celle de la branche la moins résistante.

2° Que la résistance R équivalente à n résistances égales à r, et placées en dérivation, est $R = \frac{r}{n}$.

148. — Boîtes de résistances. Rhéostats. — BOÎTES DE RÉSISTANCES. — Les boîtes de résistances sont des appareils qui permettent d'introduire

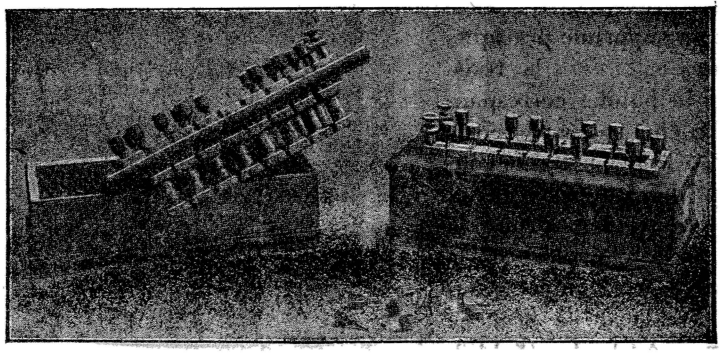


FIG. 137. — Boîtes de résistances

aisément dans un circuit des résistances variées et connues. Elles sont utilisées dans les laboratoires de mesures.

Elles sont constituées par un ensemble de bobines ayant des résistances connues disposées dans une même boîte (fig. 137). Les extrémités du fil d'une bobine aboutissent à deux grosses masses de laiton (*plots*) (fig. 138) qu'on peut relier à volonté en introduisant entre elles une cheville métallique. Les plots relatifs aux diverses bobines sont fixés sur une plaque d'ébonite formant le couvercle de la boîte. Un même plot relie deux bobines successives qui sont ainsi disposées en série.

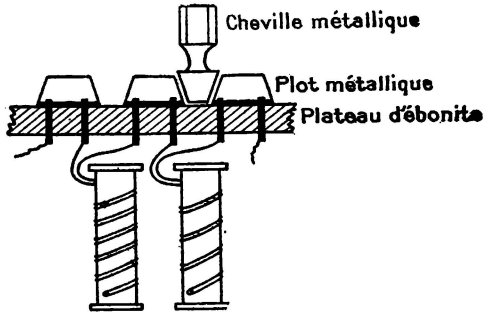


FIG. 138

Le fil des bobines est constitué par un alliage (manganine en général) dont la résistivité est pratiquement indépendante de la température ; la résistance d'une bobine garde ainsi une valeur invariable malgré l'échauffement que produit le passage du courant ; il est prudent néanmoins, pour la précision des mesures, de ne faire passer que des courants faibles.

La valeur de la résistance de chaque bobine est inscrite sur l'ébonite en regard de l'orifice correspondant. Les valeurs relatives des résistances des bobines d'une même boîte sont celles des poids marqués d'une boîte de poids : 1, 2, 2, 5 fois l'unité et ses multiples et sous-multiples décimaux.

Lorsqu'on introduit une cheville métallique dans l'un des orifices, on supprime pratiquement dans le circuit la résistance de la bobine correspondante. En effet, pour passer de l'un à l'autre des plots, le courant peut dès lors suivre deux conducteurs en dérivation : la bobine et la cheville. Or la résistance de l'ensemble est inférieure à celle de la branche la moins résistante (§ 147), c'est-à-dire celle de la cheville,

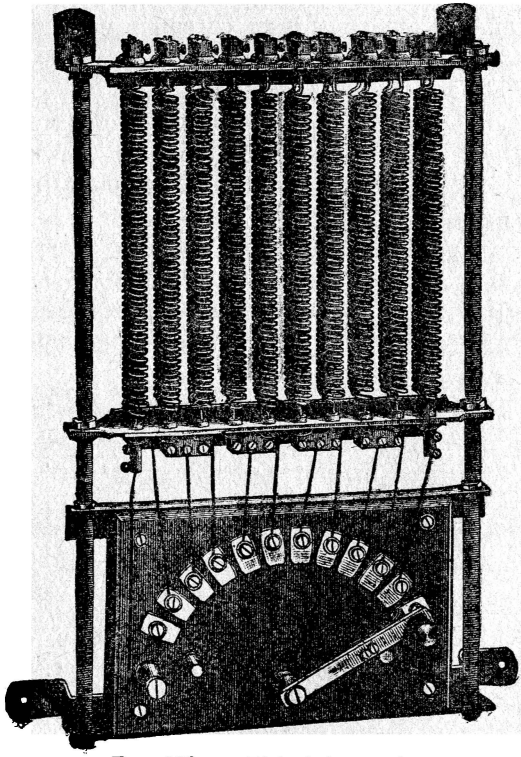


FIG. 139. — Rhéostat à plots.

et cette cheville a des dimensions telles que sa résistance est pratiquement nulle.

Nous verrons des applications de ces boîtes dans diverses mesures.

RHÉOSTATS. — On donne plus particulièrement le nom de *rhéostats* à des instruments *industriels* destinés à faire varier l'intensité du courant envoyé dans un appareil d'utilisation (moteur, lampe, ...). Un contact glissant permet d'intercaler dans le circuit une partie plus ou moins longue d'un fil métallique, généralement enroulé en hélice pour diminuer l'encombrement.

Dans le rhéostat représenté par la figure 139, le contact glissant est obtenu en faisant tourner autour d'un axe métallique une manette, métallique également, dont l'extrémité s'appuie successivement sur une série de plots entre lesquels sont intercalés des fils roulés en spirales.

Le courant entre par la borne de gauche, qui communique avec le premier plot ; il sort par une autre borne qui est en contact permanent avec l'axe de rotation de la manette. La portion de fil intercalée dans le circuit, variable avec la position de la manette, est celle qui va du premier plot à celui que touche l'extrémité mobile de cette manette.

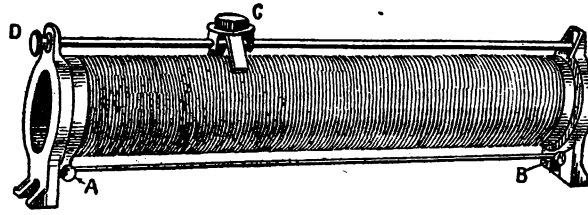


FIG. 140. — Rhéostat à curseur.

Le rhéostat de la figure 140 comporte un fil enroulé en hélice sur un long cylindre, et dont les extrémités sont fixées aux bornes A et B. Le fil est dénudé suivant une génératrice du cylindre. Un curseur métallique C peut glisser le long de la tige conductrice D et son extrémité est constamment en contact avec la partie dénudée du fil. Le circuit extérieur aboutit aux bornes A et D. La partie du rhéostat intercalée dans le circuit est ainsi la portion de fil qui va de la borne A au curseur C ; sa résistance croît lorsqu'on pousse le curseur vers la droite.

Signalons enfin que, dans les expériences de laboratoires, on utilise fréquemment, comme rhéostat, une simple cuve électrolytique de forme allongée. Il suffit, pour modifier sa résistance, de faire varier la distance des électrodes ou de les enfoncer plus ou moins dans le liquide. Le métal des électrodes est choisi de même nature que le cathion de l'électrolyte afin d'éviter l'existence d'une force contre-électromotrice (on utilise par exemple deux lames de zinc plongeant dans une solution de sulfate de zinc).

149. — Shunts des ampèremètres. — Un ampèremètre donne l'intensité d'un courant par simple lecture de la position d'une aiguille sur un cadran divisé. La valeur maximum de la graduation fixe la limite des intensités de courant mesurables avec cet appareil.

On étend cette limite d'utilisation par l'emploi de *shunts*. Un shunt est une faible résistance qu'on peut installer en dérivation sur les bornes A et B (fig. 141-*a*) d'un ampèremètre ou d'un galvanomètre. Seule une fraction du courant passe dans l'ampèremètre et le reste passe dans le shunt. Le shunt est choisi de façon qu'il ne passe dans l'ampèremètre qu'une fraction connue du courant à mesurer.

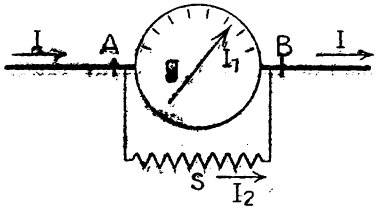


FIG. 141-*a*.

Un appareil est shunté au n^e lorsque l'intensité du courant qui traverse l'ampèremètre est le n^e de l'intensité dans le circuit principal ; n s'appelle le *pouvoir multiplicateur du shunt*. Les valeurs de n généralement utilisées sont $n = 10$, $n = 100$ et $n = 1000$.

D'une manière générale, cherchons quelle doit être la résistance s du shunt pour qu'un ampèremètre de résistance g soit shunté au n^e ? Appelons I l'intensité dans le circuit principal, I_1 celle du courant dans l'ampèremètre et I_2 celle du courant dans le shunt. Nous devons avoir : $I_1 = \frac{I}{n}$ d'où :

$$I_2 = I - I_1 = I\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

La loi des courants dérivés nous donne la relation :

$$g I_1 = s I_2$$

$$g \frac{I}{n} = s I\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

D'où :

$$s = \frac{g}{n - 1}.$$

Ainsi les shunts au 10^e, au 100^e, au 1000^e ont des résistances respectivement égales au 9^e, au 99^e, au 999^e de celle de l'ampèremètre.

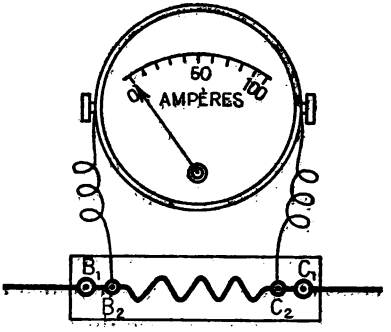


FIG. 141-*b*.
Ampèremètre et son shunt.

La plus grande partie du courant passe dans le shunt qui risque de s'échauffer. Comme il doit avoir une résistance constante il faudra : 1° assurer un bon refroidissement en donnant au shunt une large surface ; 2° avoir, malgré l'échauffement possible, une résistance constante. C'est pourquoi les shunts sont, en général, des fils (fig. 141-*b*) ou des plaques d'un alliage à faible coefficient de température (maillechort). Pour obtenir la résistance s voulue, on pratique des encoches (traits de scie) dans la plaque (fig. 142).

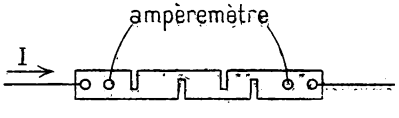


FIG. 142. — Shunt.

REMARQUE. — **L'introduction d'un shunt modifie la résistance du circuit et par suite peut faire varier l'intensité dans le circuit principal.**

150. — Voltmètre. — Plaçons en dérivation entre deux points A et B d'un circuit parcouru par un courant I, un circuit comprenant un ampèremètre G de résistance g et une résistance R (fig. 143). Appelons I_1 l'intensité du courant qui passe dans l'ampèremètre. La différence de potentiel entre A et B est, d'après la loi d'Ohm :

$$V_A - V_B = (R + g)\ I_1.$$

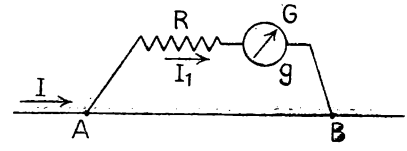


FIG. 143

La quantité $R + g$ étant constante, la différence de potentiel est donc proportionnelle à l'intensité I_1, c'est-à-dire que la connaissance de $R + g$ permet de déduire la différence de potentiel d'une lecture d'intensité. Pour éviter tout calcul, on inscrit directement sur le cadran de l'ampèremètre la valeur de $(R + g)\ I_1$ en volts. L'ampèremètre ainsi modifié s'appelle un *voltmètre*.

Notons que le voltmètre se place *en dérivation* sur le circuit principal. Pour qu'il n'apporte qu'une perturbation négligeable au régime établi, il faudra que I_1 soit très faible, c'est-à-dire que la résistance de l'appareil soit grande. Mais si I_1 est faible, l'appareil devra être constitué par un ampèremètre très sensible.

En définitive, un voltmètre sera constitué par l'ensemble d'un *milliampèremètre et d'une grande résistance*, placés en série ; le tout est enfermé dans un boîtier métallique muni de deux bornes.

REMARQUE. — On peut diminuer la sensibilité d'un voltmètre et augmenter son domaine d'utilisation en augmentant la résistance additionnelle R. Si, à l'appareil de résistance totale $R_1 = R + g$, on ajoute en série une résistance égale à $9\ R_1$, la résistance de l'ensemble est 10 fois plus grande. Pour obtenir la même déviation, c'est-à-dire la même intensité I_1, il faudra une différence de potentiel 10 fois plus grande. Les indications de l'appareil doivent être multipliées par 10.

Un voltmètre gradué de 0 à 1 volt peut donc servir jusqu'à 10 volts si on lui adjoint une résistance additionnelle de $9\ R_1$. Il pourra servir jusqu'à 100 volts si la résistance additionnelle est égale à $99\ R_1$. Ces résistances additionnelles, en série avec le voltmètre, jouent un rôle analogue aux shunts des ampèremètres.

II. — ASSOCIATION DES GÉNÉRATEURS

Cette question ne présente d'intérêt pratique que dans le cas où les générateurs sont des accumulateurs ou des piles *identiques*. Soit e la f. é. m. d'un générateur et r sa résistance.

151. — Association en série. — Pour obtenir un tel groupement, on relie le pôle positif de chaque générateur au pôle négatif du suivant. Le circuit extérieur est branché entre le pôle positif P du dernier et le pôle négatif N du premier (fig. 144). Cherchons la f. é. m. E et la résistance intérieure R du générateur unique équivalent au groupement, c'est-à-dire qui produirait les mêmes effets dans le circuit extérieur.

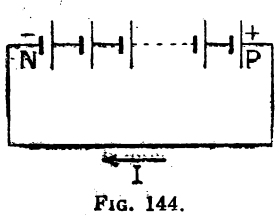


FIG. 144.
Générateurs en série.

Soit n le nombre des générateurs ; ils sont tous

traversés par le même courant d'intensité I. La puissance W disponible dans le circuit extérieur est égale à la puissance *ne*I fournie par les générateurs moins la puissance nrI^2 absorbée par effet Joule dans le groupement.

$$W = neI - nrI^2.$$

Un générateur unique fournirait au circuit extérieur une puissance :

$$W' = EI - RI^2.$$

Pour qu'il y ait équivalence entre le générateur unique et le groupement, il faut que $W = W'$ et ceci *quel que soit le circuit extérieur, c'est-à-dire quel que soit* I. Nous devons avoir :

$$EI - RI^2 \equiv neI - nrI^2,$$

ce qui exige

$$E = ne, \qquad R = nr.$$

Dans une association de générateurs en série, la f. é. m. de l'ensemble est égale à la somme des f. é. m. des divers générateurs et la résistance intérieure est égale à la somme des résistances intérieures.

152. — ***Association en parallèle.*** — Ce montage s'appelle encore association en *surface* ou en *batterie*. Les pôles positifs des générateurs sont tous reliés au même point P qui est le pôle positif du groupe ; les pôles négatifs sont tous reliés au même point N qui est le pôle négatif du groupe (fig. 145). Le circuit extérieur est branché entre P et N.

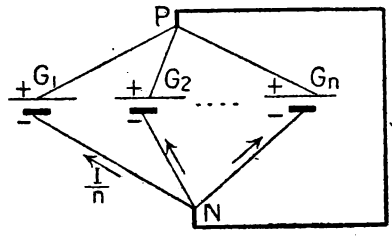


FIG. 145. — Générateurs en parallèle.

Cherchons le générateur unique de f. é. m. E et de résistance intérieure R équivalent au groupe des *n* générateurs en parallèle. Pour qu'il y ait équivalence, il suffit que la différence de potentiel entre P et N soit la même, *quel que soit le circuit extérieur.*

Soit I l'intensité du courant dans le circuit extérieur. Au point N, le courant se partage entre *n* branches *identiques*. Par raison de symétrie le courant dans chaque branche a pour intensité $\frac{I}{n}$. Appliquons la loi d'Ohm généralisée à la portion de circuit NG_1P contenant un générateur. Nous avons :

$$V_N - V_P = r\frac{I}{n} - e.$$

La même loi appliquée au générateur unique mis à la place du groupement et qui serait alors parcouru par le courant total I, nous donne :

$$V_N - V_P = RI - E.$$

L'équivalence exige que l'on ait l'identité :

$$RI - E \equiv r\frac{I}{n} - e.$$

D'où :

$$E = e, \qquad R = \frac{r}{n}.$$

Dans un groupe de n *générateurs en parallèle, la f. é. m. de l'ensemble est égale à celle d'un générateur et la résistance intérieure est la* n^e^ *partie de celle d'un générateur.*

L'intérêt de ce mode de groupement ne réside pas dans la diminution de la résistance intérieure, car les générateurs usuels, surtout les accumulateurs, ont une résistance beaucoup plus faible que celle du circuit extérieur. Mais l'intérêt réside dans le fait que chaque générateur n'est traversé que par une *partie* du courant principal. On peut avec une grande intensité extérieure, obtenir une faible intensité dans chaque générateur et éviter ainsi les risques de détérioration.

*153. — **Association en séries parallèles.*** — Ce montage s'appelle encore *groupement mixte.* Avec les n générateurs, on réalise p séries identiques contenant chacune q générateurs ($pq = n$). Les p séries sont montées en parallèle entre deux points P et N (fig. 146). Cherchons le générateur équivalent à ce groupe.

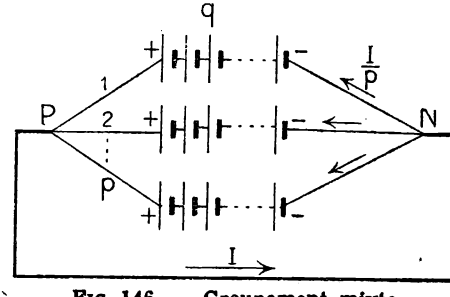


Fig. 146. — Groupement mixte.

Remplaçons d'abord chaque série par un générateur unique ; sa f. é. m. est qe et sa résistance intérieure qr (§ 151). Nous avons alors p générateurs en parallèle ; donc l'ensemble a une *f. é. m.* $E = qe$ et une résistance intérieure $R = \frac{qr}{p}$. Dans le cas du montage mixte, le générateur équivalent a une f. é. m. E et une résistance intérieure R telles que

$$E = qe, \quad \text{et} \quad R = \frac{qr}{p}.$$

Ce groupement permet d'obtenir une grande f. é. m. en augmentant q et de ne pas détériorer les générateurs en augmentant convenablement p.

*154. — **Choix du mode de groupement.*** — Le problème se présente en général de la manière suivante : le circuit extérieur a une résistance R_e donnée et il doit être le siège d'un courant d'intensité I imposée. De plus les générateurs utilisés de f. é. m. e et de résistance r ne peuvent supporter sans détérioration une intensité supérieure à une valeur limite I_m. Quel mode de groupement et combien de générateurs doit-on utiliser ?

Prenons un groupement mixte comprenant p séries de q éléments chacune. Le générateur équivalent a pour f. é. m. $E = qe$ et pour résistance $R = \frac{qr}{p}$. Appliquons la loi de Pouillet, nous avons :

$$E = (R + R_0)\, I.$$

$$qe = \left(R_0 + \frac{qr}{p}\right) I$$

D'où :

$$I = \frac{qe}{R_0 + \frac{qr}{p}}$$

La résistance intérieure $\frac{qr}{p}$ est souvent négligeable devant R_0. Par suite $I \# \frac{qe}{R_0}$. Or I, e et R_0 étant donnés, la formule précédente fixe q, c'est-à-dire le nombre d'éléments à mettre dans chaque série.

De plus l'intensité dans chaque générateur est $\frac{I}{p}$ qui doit être inférieure à I_m. La relation $\frac{I}{p} < I_m$ fixe la valeur à prendre pour p.

III. — SUPERPOSITION DES ÉTATS D'ÉQUILIBRE

155. — Principe fondamental. — Considérons un réseau de n conducteurs de résistances $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sur lequel se trouvent disposés divers appareils de f. é. m. ou f. c. é. m. $E_1, E_2, \ldots E_p$. Appelons $I_1, I_2, \ldots, I_n$ les intensités dans les différentes branches. Elles peuvent se calculer par application des lois de Kirchhoff qui sont *linéaires* par rapport aux f. é. m. et aux intensités.

Considérons le *même* réseau de n conducteurs avec une nouvelle distribution d'appareils de f. é. m. ou f. c. é. m. $E'_1, E'_2, \ldots, E'_q$. Appelons I', $I'_2, \ldots, I'_n$ les intensités correspondantes, elles se calculent par application des lois de Kirchhoff.

Prenons maintenant le *même* réseau et superposons l'ensemble des deux systèmes de f. é. m. Soit $i_1, i_2, \ldots, i_n$ les intensités dans les différents conducteurs.

Prenons une maille quelconque du réseau. La loi de Kirchhoff appliquée aux trois états successifs, donne :

$$\Sigma E = \Sigma R I, \qquad \Sigma E' = \Sigma R I', \qquad \Sigma (E + E') = \Sigma R i.$$

La loi de Kirchhoff étant *linéaire* par rapport aux f. é. m. nous avons :

$$\Sigma (E + E') = \Sigma E + \Sigma E' = \Sigma R I + \Sigma R I'$$

La loi de Kirchhoff étant *linéaire* par rapport aux intensités :

$$\Sigma R I + \Sigma R I' = \Sigma R (I + I').$$

Finalement : $\Sigma (E + E') = \Sigma R i = \Sigma R (I + I')$.

La dernière relation est vérifiée pour toutes les mailles du réseau. Ceci exige que, dans chaque branche, $i = I + I'$.

Donc :

$$i_1 = I_1 + I'_1 \qquad i_2 = I_2 + I'_2 \qquad \ldots \qquad i_n = I_n + I'_n.$$

Donc, quand on ajoute, pour chaque branche d'un réseau, les f. é. m. et les intensités correspondant à deux régimes permanents, on obtient les valeurs de f. é. m. et d'intensités correspondant à un nouveau régime permanent.

Ce résultat constitue le THÉORÈME DE LA SUPERPOSITION DES ÉTATS D'ÉQUILIBRE que l'on énonce ainsi :

La superposition de plusieurs états d'équilibre est un nouvel état d'équilibre.

Exercices.

37. Montrer que la loi des courants dérivés $r_1 i_1 = r_2 i_2$ correspond à un effet Joule minimum dans l'ensemble des deux résistances.

38. Une pile dont la f. é. m. est 1,14 volt et la résistance intérieure 4 Ω est fermée sur un voltmètre gradué en centivolts. Quelle doit être la résistance minima de cet appareil pour que son indication représente, à une division près, la force électromotrice de la pile ?

Réponse : R = 452 ohms.

39. On dispose de 4 éléments de pile ayant chacun une f. é. m. de 1,1 volt et une résistance intérieure de 0,1 Ω. De quelle manière doit-on les grouper pour que, en fermant le circuit, par une résistance de 6 Ω, on obtienne la plus grande intensité de courant possible ? Quel est le rendement du dispositif ?

40. On monte en parallèle deux séries de 12 accumulateurs ayant chacun une f. é. m. de 2 volts et une résistance intérieure de 0,2 Ω. Les bornes de ce montage sont réunies par un circuit extérieur comprenant, en série, une résistance de 4 ohms et un ampèremètre ayant une résistance de 3 ohms shunté par une résistance de 0,75 Ω. Calculer l'intensité du courant qui traverse l'ampèremètre.

Réponse : I = 0,83 ampère.

CHAPITRE XVIII

MESURES ÉLECTRIQUES BASÉES SUR LES LOIS D'OHM ET DE KIRCHHOFF

I. — MESURE DES RÉSISTANCES

Les méthodes de mesure des résistances sont nombreuses.

Nous exposerons successivement : la méthode générale du pont de Wheatstone, l'extension de cette méthode à certains cas particuliers, les méthodes industrielles et enfin nous indiquerons le *principe* des mesures absolues.

156. — Méthode du Pont de Wheatstone. — PRINCIPE. — Considérons un circuit contenant une pile P, un galvanomètre G et quatre résistances r_1, r_2, r_3 et r_4 connectées comme l'indique la figure 147. La branche CGD qui contient le galvanomètre est un *pont* jeté entre les deux branches ACB et ADB.

Etudions le cas particulier où il ne passe aucun courant dans G. On dit alors que *le pont est équilibré.* Soit i_1, i_2, i_3 et i_4 les intensités des courants dans les résistances r_1, r_2, r_3, r_4.

La loi de Kirchhoff relative aux nœuds, appliquée aux points C et D, donne :

$$i_1 = i_3 \qquad i_2 = i_4.$$

La loi de Kirchhoff appliquée aux mailles ACDA et CBDC donne les relations :

$$i_1 r_1 - i_2 r_2 = 0 \qquad i_2 r_2 - i_4 r_4 = 0$$

En tenant compte des relations précédentes, nous avons :

$$i_1 r_1 = i_2 r_2$$
$$i_1 r_3 = i_2 r_4$$

D'où, en divisant membre à membre :

$$\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4}$$

ou

$$\boxed{r_1 r_4 = r_2 r_3} \qquad (1)$$

Telle est la condition pour qu'il ne passe aucun courant dans le galvanomètre. La relation (1) permet de calculer r_4 connaissant r_1, r_2 et r_3.

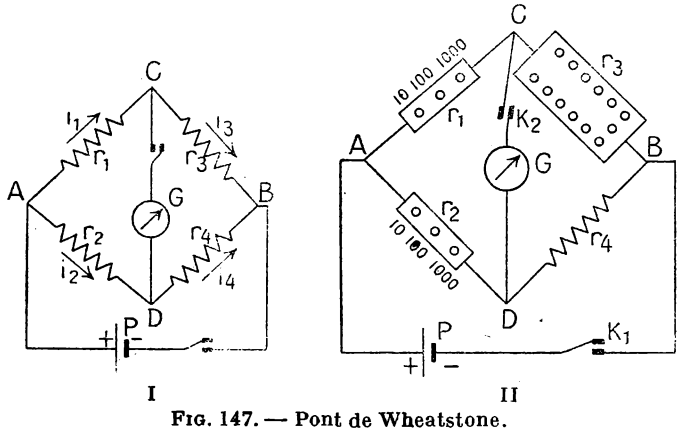


FIG. 147. — Pont de Wheatstone.

MODE OPÉRATOIRE. — Pour mesurer une résistance r_4, on prend généralement les résistances r_1 et r_2 sur deux petites boîtes de résistances identiques ne contenant chacune que trois bobines ayant pour résistances respectives 10Ω, 100Ω et 1000Ω. On peut ainsi donner à volonté, au rapport $\frac{r_2}{r_1}$ l'une des valeurs 0,01 ; 0,1 ; 1 ; 10 ; 100.

La résistance r_3 est prise sur une boîte de résistances étalonnées (fig. 147-II).

Pour effectuer la mesure de r_4, on commence par prendre $r_1 = r_2 = 10\Omega$ et par essayer les bobines de la boîte de résistances, dans l'ordre des résistances décroissantes, jusqu'à ce que l'on trouve deux valeurs de r_3, différant de 1Ω, et donnant au galvanomètre des déviations de sens contraires. Si $r_1 = r_2$, nous avons $r_3 = r_4$, donc la résistance cherchée est comprise entre ces deux valeurs. Par exemple on obtient

$$23\Omega < r_4 < 24\Omega.$$

On prend ensuite $r_1 = 100\Omega$, $r_2 = 10\Omega$. A l'équilibre : $r_4 = \frac{r_2}{r_1} r_3 = \frac{r_3}{10}$.

On réalise l'équilibre du pont à 1 ohm près. On trouve par exemple $237 < r_3 < 238$. Donc :

$$23,7 < r_4 < 23,8.$$

On prend enfin $r_1 = 1000\Omega$ et $r_2 = 10\Omega$, à l'équilibre $r_4 = \frac{r_3}{100}$. On réalise l'équilibre à 1Ω près. On trouve par exemple $2375 < r_3 < 2376$. Donc :

$$23,75 < r_4 < 23,76.$$

On peut même, en observant les valeurs des déviations correspondant à $r_3 = 2375\Omega$ et $r_3 = 2376\Omega$, en déduire, par interpolation, la résistance qui correspond à l'équilibre du pont. Par exemple, si pour $r_3 = 2375$ le spot se

trouve à 6 divisions à droite et pour $r_3 = 2376$ il se place à 9 divisions à gauche, l'équilibre correspondrait à la valeur

$$r_3 = 2375 + \frac{6}{15} = 2375{,}4 \quad \text{et} \quad r_4 = 23{,}754\,\Omega.$$

La méthode est donc susceptible d'une grande précision. Les résistances moyennes de l'ordre d'une centaine d'ohms peuvent être évaluées à un cent millième près. Mais cette approximation n'a un sens que si les résistances utilisées sont *définies* avec cette précision. Ceci exige en particulier de bons contacts aux points de jonction des fils et une température constante.

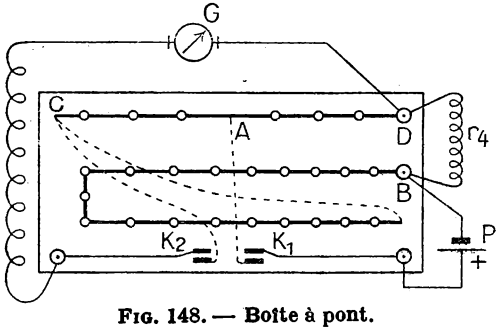


FIG. 148. — Boîte à pont.

Pendant la mesure, il est nécessaire de prendre quelques précautions. Il est bon de ne laisser passer le courant que pendant le temps nécessaire aux lectures afin d'éviter un échauffement des résistances qui peut modifier leurs valeurs. Dans ce but l'appareil comprend deux interrupteurs K_1 et K_2 (fig. 147-II). On ferme d'abord K_1 ; un régime permanent s'établit. On ferme ensuite l'interrupteur K_2 du galvanomètre pendant un temps très court. Le sens de la déviation nous fixe sur le sens des variations à apporter à r_3. Il est prudent de shunter le galvanomètre au début, afin d'éviter le passage d'un courant trop intense dans le galvanomètre. On enlève le shunt quand on approche de l'équilibre. pour terminer la mesure dans les conditions de meilleure sensibilité.

On trouve chez les constructeurs des boîtes spéciales dites *boîtes à pont*, qui contiennent tout l'ensemble précédent avec connexions intérieures. Il suffit de relier la pile, le galvanomètre et la résistance à mesurer à des bornes apparentes sur la boîte et portant les indications correspondantes. L'ensemble a l'aspect indiqué par la figure 148. Les lettres correspondent au schéma précédent (fig. 147).

157. — Méthode du Pont à corde. — C'est un cas particulier de la méthode générale du pont de Wheatstone.

PRINCIPE. — Le schéma du pont à corde est représenté par la figure 149. AB est un fil de manganine homogène, de section constante et de 1 mètre de longueur. Le contact mobile C est obtenu à l'aide d'un curseur qui peut se déplacer le long de AB. Nous avons un pont de Wheatstone dont les quatre résistances

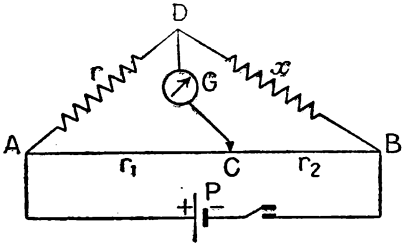


FIG. 149. — Pont à corde (schéma).

sont AD $= r$, AC $= r_1$, BC $= r_2$ et BD $= x$ qui est la résistance à mesurer.

Plaçons le curseur C de manière que le galvanomètre G ne soit parcouru par aucun courant. Le pont est équilibré et la condition d'équilibre s'écrit

$$r \times r_2 = r_1 \times x.$$

D'où :
$$x = \frac{r_2}{r_1} \times r.$$

Le fil AB étant cylindrique et homogène, le rapport $\frac{r_2}{r_1}$ est égal au rapport $\frac{l_2}{l_1}$ des longueurs BC $= l_2$ et AC $= l_1$. Comme $l_2^{cm} = 100 - l_1^{cm}$, nous avons :

$$x = \frac{100 - l_1}{l_1} \times r \qquad (1)$$

Cette relation permet de calculer x connaissant r et mesurant l_1.

PRÉCISION. — L'erreur principale provient de l'imprécision sur la lecture de la position de C ; elle est la même tout le long du fil, soit Δl_1 cette erreur. Cherchons quelle est la position de C pour laquelle l'erreur relative $\frac{\Delta x}{x}$ commise sur x est minimum.

Différentions la relation (1) :

$$\frac{\Delta x}{x} = -\frac{\Delta l_1}{100 - l_1} - \frac{\Delta l_1}{l_1}$$

$$\frac{\Delta x}{x} = -\frac{100\ \Delta l_1}{l_1(100 - l_1)}$$

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \leq \frac{100}{l_1(100 - l_1)} \left|\Delta l_1\right|.$$

Δl_1 étant constant, l'erreur relative sur x sera minimum lorsque $l_1\,(100 - l_1)$ sera maximum. Or cette quantité est le produit de deux termes dont la somme est constante et égale à 100. Elle est maximum lorsque les deux termes sont égaux. Donc :

$$l_1 = 50 \text{ cm et } x = r.$$

La méthode du pont à corde est donc précise pour la comparaison de deux résistances voisines.

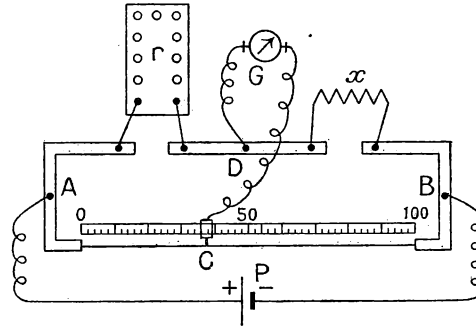


FIG. 150. — Pont à corde.

MODE OPÉRATOIRE. — L'appareil utilisé est représenté par la figure 150. La résistance r est prise sur une boîte de résistances. On commence par prendre pour r une valeur quelconque et on détermine grossièrement l'équilibre du pont. On en déduit ainsi l'ordre de grandeur de x. On donne alors à r une valeur voisine de la valeur trouvée pour x et on

déplace le curseur C jusqu'au moment où le galvanomètre reste au zéro. On lit la position du curseur sur la règle, voisine du milieu, et, en appliquant la formule (1), on calcule x.

Il faudra prendre les mêmes précautions que dans la méthode précédente : éviter de faire débiter inutilement les piles, shunter le galvanomètre au début et enlever le shunt pour finir.

Remarque. — Le pont à corde sert à mesurer les résistances des électrolytes mais à cause des phénomènes d'électrolyse qui se produisent avec un courant continu, la méthode est légèrement modifiée. Kohlrausch a employé des électrodes en platine et a substitué au courant continu, un courant alternatif. Le galvanomètre, insensible au courant alternatif, était remplacé par un téléphone. A l'équilibre du pont, l'intensité du son rendu par le téléphone est minimum. Elle ne s'annule pas en général, à cause de la self du circuit.

158. — ***Mesure des très faibles résistances.*** — Les méthodes précédentes permettent de calculer la résistance d'une branche du pont. Celle-ci ne se confond avec la résistance à mesurer que si les connexions et les contacts n'introduisent que des résistances négligeables, très inférieures à celles que l'on veut mesurer. *Le pont de Wheatstone ne peut donc pas servir à mesurer les très faibles résistances.* On peut utiliser alors le **pont double** de Lord Kelvin.

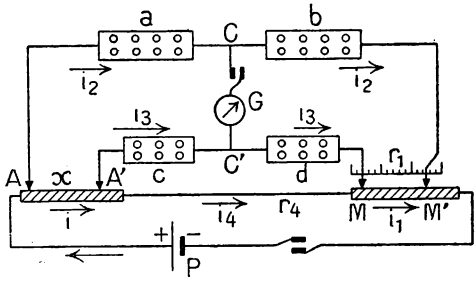


Fig. 151. — Pont double.

La résistance x à mesurer est comparée à une résistance du même ordre r_1 connue et constituée généralement par un gros fil cylindrique de maillechort placé devant une règle graduée.

Le montage est représenté sur la figure 151. La résistance x à mesurer est constituée par une longueur $l = AA'$ d'une tige cylindrique et homogène d'un métal dont on veut calculer la résistivité. Les résistances a, b, c, d sont prises sur des boîtes de résistances et choisies de façon que l'on ait $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. La résistance r_1 est celle de la portion MM' ; le contact M est fixe tandis que le contact M' est mobile. Un galvanomètre G est placé sur la branche CC' et une pile P fournit le courant.

Déplaçons le contact mobile M' jusqu'à ce qu'il ne passe plus aucun courant dans G. La loi de Kirchhoff relative aux nœuds nous montre que le même courant i_2 passe dans a et b, le même courant i_3 passe dans c et d, et enfin $i = i_3 + i_4 = i_1$.

Appliquons la loi de Kirchhoff aux mailles ACC'A'A et CM'MC'C. Nous avons :

$$ai_2 = ci_3 + xi \qquad bi_2 = r_1 i + di_3$$

D'où : $$xi = ai_2 - ci_3 \qquad r_1 i = bi_2 - di_3$$

Divisons membre à membre les deux dernières relations :

$$\frac{x}{r_1} = \frac{ai_2 - ci_2}{bi_2 - di_2}.$$

Or les résistances a, b, c, d sont telles que :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{ai_2}{bi_2} = \frac{ci_2}{di_2} = \frac{ai_2 - ci_2}{bi_2 - di_2} = \frac{x}{r_1}.$$

D'où :

$$\frac{x}{r_1} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Ces relations permettent de calculer le rapport $\frac{x}{r_1}$ connaissant les rapports $\frac{a}{b}$ ou $\frac{c}{d}$ arbitrairement choisis, mais égaux ; r_1 est connu d'après la position du point M′ sur la tige de maillechort, d'où x.

REMARQUE. — L'étude générale du montage où les résistances a, b, c, d sont quelconques montre que, si r_4 est la résistance de la branche A′M, le galvanomètre reste au zéro si :

$$bx - ar_1 = \frac{r_4}{c + d + r_4}(ad - bc)$$

La condition d'équilibre devient $bx - ar_1 = 0$ si $ad - bc = 0$ et on a alors $\frac{x}{r_1} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. C'est ce que nous avons supposé.

Mais au cas où la quantité $ad - bc$ ne serait pas exactement nulle, on voit que l'on a intérêt à prendre r_4 faible afin que le second membre soit très faible et que la condition d'équilibre reste pratiquement $bx - ar = 0$. C'est pourquoi la résistance r_4 est constituée par un simple fil de connexion assez gros.

159. — Mesures industrielles des résistances. — Dans la pratique, la méthode employée pour mesurer une résistance dépend de la *nature* de celle-ci et de son *ordre de grandeur.*

1° RÉSISTANCES MOYENNES. — On utilise la *méthode de l'ampèremètre et du voltmètre* basée sur la loi d'Ohm $V = RI$, d'où $R = \frac{V}{I}$. La mesure de la résistance se ramène à celles de l'intensité I et de la différence de potentiel V entre les bornes de la résistance.

Deux montages sont possibles, ils sont représentés sur la figure 152. Dans le premier cas (a), le voltmètre V est monté en dérivation aux bornes de la résistance et l'ampèremètre A sur le circuit principal. L'intensité qui passe dans la résistance R ne se confond pratiquement avec celle qui traverse l'ampèremètre que si la résistance du voltmètre est grande devant R. Cette

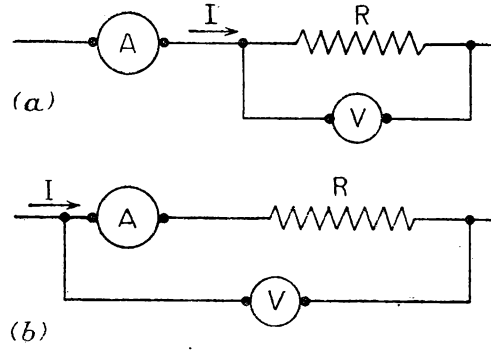


FIG. 152. — Mesure pratique d'une résistance

méthode s'applique aux résistances de quelques ohms qui sont généralement petites devant les résistances habituelles des voltmètres.

Dans le second cas (*b*), le voltmètre est monté en dérivation aux bornes de l'ensemble ampèremètre-résistance. La résistance mesurée $R = \frac{V}{I}$ est celle de cet ensemble. Elle ne se confond avec la résistance à mesurer que si celle de l'ampèremètre est négligeable. La méthode convient bien pour mesurer des résistances de quelques centaines d'ohms qui sont généralement grandes devant les résistances habituelles des ampèremètres.

2° Faibles résistances. — Pour les faibles résistances, on utilise la *méthode de comparaison.* Sur un circuit, on monte en série la résistance R à mesurer et une résistance connue R_0 également faible (celle d'un shunt par exemple). On fait passer un courant assez intense (plusieurs dizaines d'ampères si les résistances peuvent le supporter) et avec un voltmètre résistant, on mesure les différences de potentiel V et V_0 aux bornes des résistances R et R_0. Comme la même intensité traverse les deux résistances, nous avons :

$$\frac{V}{V_0} = \frac{RI}{R_0 I} = \frac{R}{R_0}$$

3° Très grandes résistances. — On utilise la *méthode des pertes de charge.* — Soit R la résistance très grande à mesurer qui peut être, par exemple, celle d'un isolant. Prenons un condensateur de capacité connue C et chargeons-le sous la différence de potentiel V_0 ; il prend une charge Q_0.

A) Coupons la communication entre le condensateur et la source. Le diélectrique, n'étant jamais parfait, possède une résistance R_0 ; le condensateur se décharge lentement à travers le diélectrique et la loi de la décharge est (§ 110) :

$$Q = Q_0 e^{-\frac{1}{CR_0}t} \qquad (1)$$

Déchargeons ce condensateur dans un galvanomètre balistique (§ 271) au bout d'un temps θ après sa charge, temps qui est de l'ordre de 1000 à 10 000 secondes. L'élongation maximum α_1 du balistique est proportionnelle à la charge résiduelle Q_1 du condensateur ; cette charge Q_1 est donnée par la relation (1) où l'on fait $t = \theta$, d'où :

$$L\frac{Q_1}{Q_0} = -\frac{1}{CR_0}\theta \qquad (2)$$

B) Rechargeons le condensateur sous la différence de potentiel V_0, puis, après l'avoir séparé de la source, relions les armatures par la résistance R à mesurer.

Le diélectrique du condensateur, de résistance R_0, et la résistance R sont montées aux bornes du condensateur. Elles constituent deux résistances *en dérivation* R et R_0 et sont équivalentes à une résistance R' telle que (§ 147) :

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}$$

La loi de la décharge devient :

$$Q = Q_0 \, e^{-\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}\right)}$$

Laissons le condensateur pendant un temps θ, le même que dans la première expérience (A) et mesurons au balistique la charge résiduelle Q_2 qui correspond alors à une amplitude maximum α_2. Nous avons :

$$L \frac{Q_2}{Q_0} = -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}\right)\theta \qquad (3)$$

Retranchons membre à membre les relations (2) et (3), nous obtenons :

$$L \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{CR}\theta$$

Mais, d'après les propriétés du galvanomètre balistique (§ 271) :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

d'où

$$L \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1}{CR}\theta$$

$$R = \frac{\theta}{C} \times \frac{1}{L \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$$

On obtient donc la résistance R connaissant C, θ et mesurant les amplitudes α_1 et α_2.

4° RÉSISTANCE D'UN GALVANOMÈTRE. — Nous pouvons employer la méthode générale du pont de Wheatstone, mais il faut alors un deuxième galvanomètre pour constater l'équilibre du pont. Si nous ne disposons que du galvanomètre à étudier, nous pouvons utiliser la méthode suivante dite **méthode du faux zéro** (fig. 153).

Plaçons le galvanomètre G sur l'une des branches d'un pont de Wheatstone. Soit g sa résistance et a, b, c, celles des trois autres branches.

A l'équilibre du pont, nous avons (§ 156) $g\,b = a\,c$; il ne passe alors aucun courant dans la diagonale CD et, par suite, les courants dans les autres parties du pont sont indépendants de la résistance de la diagonale CD. La fermeture de l'interrupteur K ne modifie pas l'intensité du courant qui passe dans le galvanomètre.

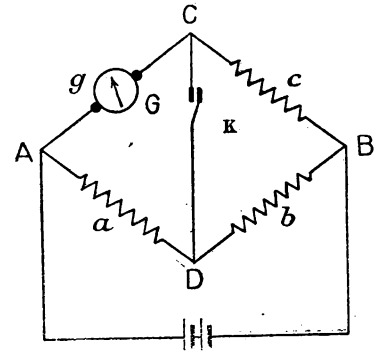


FIG. 153. — Mesure de la résistance d'un galvanomètre.

La réciproque est vraie, c'est-à-dire que si la fermeture de l'interrupteur K ne modifie pas l'indication du galvanomètre, c'est que le pont est équilibré et que l'on a la relation $g\,b = a\,c$.

Donc, pour mesurer g, on réglera la résistance b de façon que l'ouverture

ou la fermeture de l'interrupteur K ne modifie en rien l'indication du galvanomètre. A ce moment on a

$$g = \frac{a\ c}{b}$$

Cette méthode du faux zéro donne une médiocre précision.

5° RÉSISTANCE INTÉRIEURE D'UNE PILE. — La résistance intérieure d'une pile est une grandeur si variable, qu'une grande précision est inutile dans sa mesure.

Souvent on se contente de monter la pile sur un circuit comprenant un ampèremètre de résistance R_0 et une résistance variable R. On donne à R deux valeurs distinctes R_1 et R_2, et on mesure les intensités I_1 et I_2 correspondantes. Désignons par E la f. e. m. de la pile et r sa résistance, nous avons :

$$E = (R_0 + R_1 + r)\ I_1$$
$$E = (R_0 + R_2 + r)\ I_2$$

d'où, en égalant les deux expressions de E :

$$(R_0 + R_1 + r)\ I_1 = (R_0 + R_2 + r)\ I_2$$
$$r = \frac{(R_0 + R_1)\ I_1 - (R_0 + R_2)\ I_2}{I_2 - I_1}$$

Une mesure *relative* des intensités I_1 et I_2 est suffisante, car r ne dépend que du rapport $\frac{I_1}{I_2}$.

Une autre méthode est dite **méthode de Mance** ; elle est basée sur la propriété suivante que nous admettrons :

Dans un pont de Wheatstone où les résistances des quatre branches satisfont à la relation $r_1\ r_4 = r_2\ r_3$, *les deux diagonales sont indépendantes.*

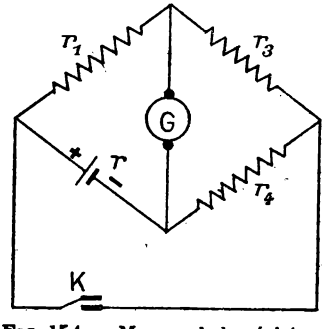


FIG. 154. — Mesure de la résistance d'une pile (Méthode de Mance).

Cette propriété est vraie même si les branches contiennent des f. é. m. invariables, elle exprime que l'on peut ajouter des piles, des résistances sur une diagonale et même la rompre, le courant dans l'autre diagonale n'est pas modifié.

Réalisons le montage représenté sur la figure 154 et réglons la résistance r_3 de façon que le courant qui passe dans le galvanomètre G reste invariable quand on actionne l'interrupteur K. Quand ce réglage est réalisé, le pont est équilibré et nous avons

$$r = \frac{r_1\ r_4}{r_3}$$

160. — Principe des mesures absolues des résistances. — On peut, pour effectuer des mesures absolues de résistances, partir de la loi de Joule ou de la loi d'Ohm. Mais, comme les mesures calorimétriques sont

moins précises que les mesures électriques, les seules méthodes importantes utilisées sont celles qui sont basées sur la loi d'Ohm.

On produit dans une spire une f. é. m. *calculable* e et on mesure avec un électrodynamomètre (§ 262) l'intensité I du courant obtenu. On a $R = \frac{e}{I}$. Les seules f. é. m. calculables sont dues à l'induction. Par suite, toutes les méthodes de mesures absolues des résistances sont basées sur le phénomène d'induction et nous ne les exposerons pas.

Ces mesures absolues permettent de définir l'unité de résistance à partir des unités fondamentales. Elles ont permis de déterminer l'ohm international (Congrès de 1908) qui est la résistance à 0° d'une colonne cylindrique de mercure de 1 mm² de section et de 106,3 cm de longueur. Cette unité avait été prise égale à 10^9 U. E. M.

Depuis le congrès de 1908, de nouvelles mesures ont été faites et ont montré que la longueur de la colonne de mercure ayant une résistance de 10^9 U. E. M. était comprise entre 106,25 cm et 106,27 cm. Par suite l'ohm international défini par le Congrès de 1908 est supérieur de 3 à 5 dix-millièmes à l'ohm vrai, ce dernier étant, par définition, égal à 10^9 U. E. M.

II. — MESURE DES DIFFÉRENCES DE POTENTIEL ET DES FORCES ÉLECTROMOTRICES

161. — ***Voltmètre.*** — Nous avons vu que l'électromètre pouvait servir à mesurer les différences de potentiel en électrostatique et en électrodynamique (§ 134). Mais c'est un appareil délicat. Les appareils industriels basés sur les mêmes principes sont plus robustes, mais ils ne sont utilisés que pour la mesure des différences de potentiel supérieures à 1000 volts.

Pour déterminer la différence de potentiel entre deux points d'un circuit, on emploie généralement un *voltmètre*. Le principe de cet appareil a été donné au paragraphe 150. L'appareil est placé en dérivation entre les deux points et donne, par simple lecture, la différence de potentiel. Nous avons vu (§ 150) que l'on pouvait augmenter les limites d'utilisation d'un voltmètre par l'addition de résistances en série.

Le voltmètre sert également à déterminer la f. é. m. E d'un générateur. Branchons l'appareil, dont la résistance R est très grande, directement aux bornes du générateur. Soit I l'intensité du courant et V la lecture faite au voltmètre. La loi de Pouillet nous donne:

$$E = (R + r)\, I = RI + rI = V + r\, I,$$

r étant la résistance intérieure du générateur qui est négligeable devant R. Donc rI est négligeable devant RI, c'est-à-dire V. D'où:

$$E = V.$$

Le voltmètre donne par simple lecture la f. é. m. cherchée.

162. — ***Méthode d'opposition.*** — Cette méthode est utilisée pour la comparaison des f. é. m. de deux générateurs. Si l'un des générateurs est une

pile étalon (élément Weston) de f. é. m. connue, on peut en déduire la valeur exacte de l'autre f. é. m.

PRINCIPE. — Un générateur P de *f. é. m.* E *bien constante* (accumulateurs au milieu de la décharge) débite dans un circuit comprenant une résistance AB constante (fig. 155, I). Entre l'extrémité A et un point mobile C pris sur AB, on branche un circuit auxiliaire comprenant une pile P_1 de f. é. m. E_1, un galvanomètre G et un interrupteur K. La pile P_1 est placée de façon à être en opposition avec le courant que produirait, dans le circuit AP_1C, le générateur P s'il était seul. La position des pôles est indiquée sur la figure 155, I.

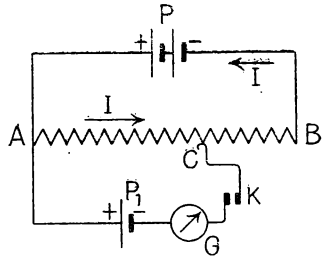


FIG. 155, I.

Déplaçons le contact mobile C jusqu'à ce que le galvanomètre G reste au zéro. Aucun courant ne passe dans la branche AP_1C. Le même courant d'intensité I parcourt la maille ACBPA. Appliquons la loi de Kirchhoff aux mailles ACBPA et AP_1CA. Appelons R_1 la résistance de AC et R la résistance totale, qui est constante, de la maille ACBPA. Nous avons :

$$E = RI \quad (1) \qquad \text{et} \qquad E_1 = R_1 I \quad (2)$$

Remplaçons la pile P_1 par une autre pile P_2 de f. é. m. E_2 et recommençons les mêmes opérations. Le courant est nul dans G pour une position C_2 du point C. Soit R_2 la résistance de AC_2. Appelons I' l'intensité du courant. Nous avons, en appliquant la loi de Kirchhoff :

$$E = RI' \quad (3) \qquad \text{et} \qquad E_2 = R_2 I' \quad (4)$$

Les relations (1) et (3) nous montrent que $I = I'$. Divisons membre à membre les relations (2) et (4), nous obtenons :

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{R_2}}$$

La comparaison des f. é. m. E_1 et E_2 est ramenée à la comparaison de deux résistances R_1 et R_2.

MODE OPÉRATOIRE. — On peut utiliser comme résistance AB un fil cylindrique et homogène. Dans ce cas le rapport $\frac{R_1}{R_2}$ est égal au rapport des longueurs AC dans les deux mesures.

Souvent, la résistance AB est constituée par l'ensemble de deux boîtes de résistances B_1 et B_2 identiques mais dont on n'utilise que la moitié de la résistance totale

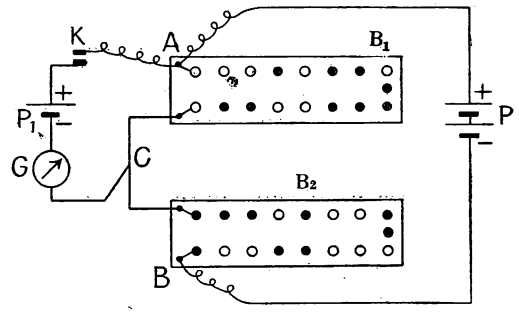


FIG. 155, II. — Méthode d'opposition.

(fig. 155, II). Quand on retire une fiche d'une des boîtes, il faut la remettre dans la place correspondante de l'autre boîte. La résistance prise sur B varie, tandis que la résistance de l'ensemble reste constante.

Pour faire une mesure, il faut éviter que les piles P_1 et P_2 soient traversées par un courant intense, car leurs f. é. m. varieraient (polarisation). I faut donc :

1° Ne fermer l'interrupteur K que juste le temps nécessaire aux lectures

2° Mettre au début, sur le circuit AP_1C, une grande résistance que l'on supprimera pour terminer la mesure afin d'avoir la sensibilité la meilleure.

La méthode d'opposition peut donner une précision du cent-millième à condition que les f. é. m. et les résistances soient définies avec cette précision.

REMARQUES. — 1° La f. é. m. E du générateur P n'intervient pas. Il suffit qu'elle reste constante pendant toute l'expérience. L'équilibre sera alors possible si la f. é. m de P est *supérieure* à celle du générateur mis sur la branche AP_1C.

2° Le montage de la figure 155-I permet d'obtenir entre le point A et le curseur mobile C une différence de potentiel $V_A - V_C$ variable ; de ce fait, il s'appelle encore MONTAGE POTENTIOMÉTRIQUE.

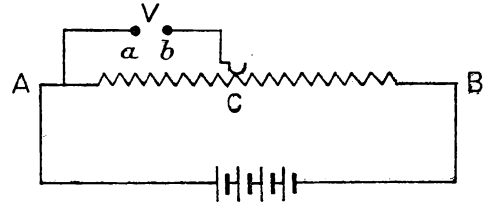


FIG. 156. — Potentiomètre.

Ce montage est utilisé parfois comme source de courant à *différence de potentiel variable.* Le secteur (générateur) débite dans un rhéostat qui joue le rôle de la résistance AB. Le circuit à alimenter (fig. 156) est monté entre la borne A et le curseur mobile C ;

Un tel rhéostat est dit monté en *potentiomètre,* tandis que, dans son utilisation habituelle, il est monté en *réducteur d'intensité.*

163. — ***Etalon de f. é. m.*** — La méthode d'opposition permet de mesurer en volts la f. é. m. d'un générateur si l'on dispose d'une pile de référence de f. é. m. connue.

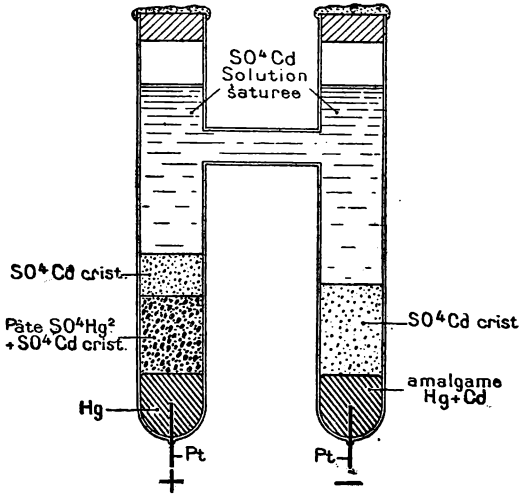


FIG. 157. — Etalon Weston.

L'étalon légal est **l'élément Weston** dont la f. é. m. est 1,0183 V à 20°. Sa f. é. m. à $\theta°$ se calcule par la formule

$$E_\theta = 1{,}0183 - 0{,}0000406\,(\theta-20) - 95 \times 10^{-8}(\theta-20)^2 + 10^{-8}\,(\theta-20)^3.$$

Remarquons que la f. é. m. varie peu avec la température : environ 4 cent-millièmes de volt par degré. C'est cette propriété qui a fait choisir l'élément Weston de préférence à d'autres piles.

L'élément Weston est une pile impolarisable constituée par la chaîne

$$Hg - SO_4Hg_2 - SO_4Cd - Cd.$$

Les solutions de sulfate mercureux et de sulfate de cadmium sont saturées et en présence des cristaux correspondants. La forme de l'appareil est représentée par la fig. 157.

Une pile étalon ne doit jamais être traversée par un courant. Sinon il y aurait une légère variation de sa f. é. m. (§ 166).

Exercices.

41. Les résistances r_1, r_2, r_3, r_4, d'un pont de Wheatstone étant quelconques, calculer l'intensité du courant dans le galvanomètre en fonction des résistances et du courant I du circuit des piles. On considérera la diagonale contenant les piles comme ayant une résistance négligeable.

Réponse : $i = \dfrac{I(r_1 r_4 - r_2 r_3)}{(r_2 + r_4)(r_1 + r_3) + g(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)}$

42. Établir la relation qui lie les 7 résistances d'un pont double de Lord Kelvin (§ 158) lorsque celui-ci est équilibré.

43. Dans un pont de Wheatstone non équilibré, la diagonale du galvanomètre est parcourue par un courant i. On intercale sur cette diagonale une pile de résistance intérieure négligeable et de f. é. m. telle que le galvanomètre revienne au zéro. Ceci fait, on supprime les piles situées sur l'autre diagonale et on réunit les fils par un conducteur de résistance négligeable. Montrer que le galvanomètre est alors parcouru par le même courant i mais changé de sens. (On pourra appliquer le théorème de la superposition des états d'équilibre.)

44. Un pont de Wheatstone étant équilibré, les quatre résistances ont pour valeur r_1, r_2, r_3 et r_4. La résistance r_4 subit une faible variation Δr_4, calculer l'intensité du courant dans le galvanomètre en fonction des résistances et de la f. é. m. E des piles du pont. En déduire les conditions de meilleure sensibilité et montrer que le galvanomètre doit être sur la diagonale reliant le point de jonction des deux plus grandes résistances au point de jonction des deux plus petites. On considérera la diagonale contenant les piles comme ayant une résistance négligeable.

CHAPITRE XIX

DIFFÉRENCE DE POTENTIEL DE CONTACT PILES [1]

164. — Propriétés des chaînes de conducteurs. — L'expérience montre que toute chaîne de conducteurs ouverte et non symétrique présente entre ses extrémités une différence de potentiel.

La dissymétrie peut provenir :

1° *De la nature des conducteurs.* Par exemple la chaîne Cu — Zn — SO_4H — Zn — Cu est symétrique tandis que la chaîne Cu — SO_4H_2 — Zn — Cu n'est pas symétrique. Quand la chaîne dissymétrique ne contient que des métaux, la différence de potentiel entre ses extrémités est de l'ordre du millivolt, elle atteint rarement le centième de volt. Mais, si la chaîne contient un électrolyte, la différence de potentiel devient de l'ordre du volt.

2° *De la non-uniformité de la température* le long de la chaîne. Une barre métallique dont les extrémités sont maintenues à des températures différentes présente, entre ses extrémités, une différence de potentiel qui est de l'ordre du microvolt pour une différence de température d'un degré.

Une chaîne fermée constituée par deux métaux soudés aux deux extrémités et dont les soudures sont à des températures différentes est le siège d'un courant électrique. C'est le principe des piles thermo-électriques.

3° *D'une non-uniformité dans la concentration* des solutions. La chaîne Ag — solution de NO_3Ag à 1,7 % — solution de NO_3Ag à 0,17 % — Ag présente une différence de potentiel de l'ordre de 0,05 volt et constitue une pile de concentration.

Ces chaînes dissymétriques constituent des générateurs électriques dont les plus employés sont les piles thermo-électriques, les piles hydro-électriques et les accumulateurs. De plus, toute cause qui fera varier la nature des contacts dans une chaîne conductrice, fera varier la différence de potentiel entre ses extrémités. On dit que la chaîne se polarise.

165. — Polarisation. — Le phénomène de la polarisation consiste en une modification de la nature des contacts d'une chaîne conductrice. Quand la chaîne est initialement symétrique, la modification apporte en général

(1) Les questions traitées dans ce chapitre ne sont pas explicitement au programme de la classe de Mathématiques spéciales. Nous nous bornerons à un exposé sommaire ne contenant que les résultats essentiels.

une dissymétrie, d'où une différence de potentiel entre les extrémités. *La chaîne a acquis des pôles*, d'où le nom de polarisation donné au phénomène.

1° PRENONS D'ABORD UNE CHAINE SYMÉTRIQUE, par exemple la chaîne Pt — SO_4H_2 — Pt. Plaçons ce voltamètre à acide sulfurique sur un circuit électrique parcouru par un courant. Il y a électrolyse de la solution de SO_4H_2 et, au bout d'un moment, une gaine d'hydrogène entoure la cathode et une gaine d'oxygène entoure l'anode. On a alors la chaîne Pt — O_2 — SO_4H_2 — H_2 — Pt qui n'est plus symétrique. *Le voltamètre s'est polarisé.* Laissons alors ce voltamètre en circuit ouvert. Les gaz O_2 et H_2 adsorbés par les électrodes diffusent dans la solution et au bout de quelques heures les électrodes ont repris leur état initial. On retrouve la chaîne symétrique Pt — SO_4H_2 — Pt. On dit que le voltamètre a subi une **dépolarisation spontanée.**

Le voltamètre précédent, polarisé, présente une différence de potentiel entre ses extrémités et devient un véritable générateur. Si, après l'avoir séparé du circuit précédent, nous relions les électrodes par un fil de cuivre, nous observons que ce fil est le siège d'un courant appelé **courant de dépolarisation.** Ce courant est dirigé en sens inverse de celui qui a provoqué la polarisation. Il détruit progressivement la dissymétrie de la chaîne et ramène celle-ci à l'état initial : Pt — SO_4H_2 — Pt.

2° PRENONS MAINTENANT LA CHAINE DISSYMÉTRIQUE Cu — SO_4H_2 — Zn qui constitue une pile de Volta. Relions ses pôles par un fil conducteur. Celui-ci est le siège d'un courant allant du cuivre au zinc à l'extérieur de la pile. Ce courant provoque une électrolyse de la solution d'acide sulfurique. L'ion SO_4 se dégage sur le zinc et l'hydrogène sur le cuivre. SO_4 attaque le zinc en donnant du sulfate de zinc qui se dissout, tandis que l'hydrogène se dépose sur le cuivre. Il y a modification des contacts dans la pile ; la pile se polarise et la différence de potentiel entre ses pôles **diminue.** Laissée en circuit ouvert, la pile polarisée subit la dépolarisation spontanée, c'est-à-dire que la différence de potentiel entre ses bornes reprend sa valeur initiale en quelques heures.

166. — ***Piles hydro-électriques.*** — Une pile hydro-électrique est constituée par une chaîne de conducteurs non symétrique et contenant au moins un électrolyte. Nous les classerons en trois groupes : les *piles polarisables*, les *piles à dépolarisant* et les *piles impolarisables.*

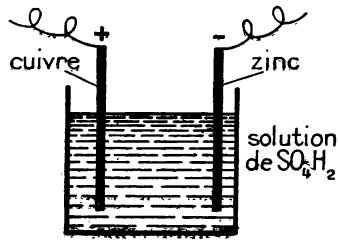


FIG. 158. — Pile de Volta.

1° PILES POLARISABLES. — Ce sont les piles dont le fonctionnement modifie la nature des contacts à l'intérieur de la pile. Quand ces piles débitent, leur f. é. m. diminue. Elles manquent d'intérêt pratique. Le type est la pile de Volta (fig. 158) constituée par la chaîne $\overset{+}{Cu}$ — SO_4H_2 — $\overset{-}{Zn}$ et dont la f. é. m. initiale est égale à 1 volt environ.

2° PILES A DÉPOLARISANT. — Ce sont des piles où la polarisation est pratiquement supprimée. La polarisation d'une pile provient à la fois de la variation de la concentration des électrolytes et de la modification des contacts. Mais l'expérience montre que la cause principale est le dépôt d'hydrogène qui se produit à l'électrode positive. Aussi la polarisation est-elle atténuée considérablement en absorbant cet hydrogène par une substance oxydante appelée *dépolarisant*. L'hydrogène réduit le dépolarisant et se transforme en eau. Les principaux oxydants utilisés comme dépolarisants sont le bioxyde de manganèse MnO_2, le bichromate de potassium $Cr_2O_7K_2$, l'acide azotique NO_3H et aussi l'oxygène de l'air. Les piles à dépolarisant les plus utilisées sont par suite :

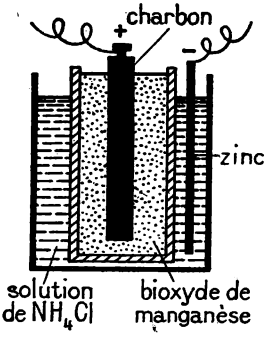


FIG. 158-I. — Pile Leclanché.

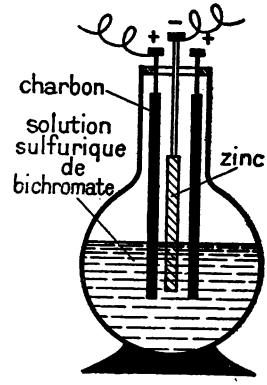


FIG. 158-II. — Pile au bichromate (le zinc doit être relevé et sorti du bain quand la pile ne fonctionne pas).

α) *La Pile Leclanché* (fig. 158-I) constituée par la chaîne $\overset{+}{\text{charbon}}$ — NH_4Cl — $\overline{Zn}$. La lame positive en charbon est entourée d'un aggloméré de MnO_2 solide et de charbon. L'action oxydante de ce dépolarisant *solide* est lente. Si la pile débite d'une façon continue un courant un peu intense, la production d'hydrogène est plus rapide que son oxydation, la pile se polarise. Cette pile sera donc utilisée pour un usage discontinu, elle sert à actionner les sonneries. Sa f. é. m. est de 1,5 volt lorsqu'elle n'est pas polarisée.

β) La *Pile au bichromate* (fig. 158-II) constituée par la chaîne : $\overset{+}{\text{charbon}}$ — solution sulfurique de $Cr_2O_7K_2$ — $\overline{Zn}$. L'électrolyte est l'acide sulfurique. La f. é. m. est voisine de 2 volts. Le zinc doit être relevé et sorti du liquide quand la pile ne fonctionne pas, car le mélange acide sulfurique et bichromate attaque le zinc en circuit ouvert.

γ) La *Pile Bunsen* constituée par la chaîne : $\overset{+}{\text{charbon}}$ — acide azotique — acide sulfurique — $\overline{Zn}$. L'électrolyte est la solution d'acide sulfurique et le dépolarisant est l'acide azotique. Une cloison poreuse est disposée entre les deux liquides pour gêner leur diffusion. La f. é. m. est de 1,8 V. Cette pile a l'inconvénient de dégager des vapeurs nitreuses quand elle débite.

δ) *La Pile Féry* dont l'électrode positive est constituée par un gros cylindre de charbon poreux émergeant notablement en dehors de l'électrolyte qui est une solution de NH_4Cl. C'est l'oxygène de l'air imprégnant le charbon qui sert de dépolarisant. L'électrode négative est en zinc.

Toutes ces piles présentent le même défaut : c'est que l'action chimique du dépolarisant n'est pas instantanée et quand la pile débite d'une façon continue, elle se polarise peu à peu.

3° PILES IMPOLARISABLES. — Ce sont des piles dont la nature des contacts n'est pas modifiée par le passage du courant. Elles sont constituées par deux électrodes, chacune plongeant dans une solution d'un sel de son métal.

Prenons par exemple la *pile Daniell* (fig. 158-III) qui est formée par la chaîne $\overset{+}{Cu} — SO_4Cu — SO_4Zn — \overset{-}{Zn}$. Le contact des deux solutions de SO_4Cu et SO_4Zn se fait à l'intérieur d'une cloison poreuse séparant les deux liquides. Lorsqu'on ferme le circuit de cette pile par un fil conducteur, le courant passe, et va, à l'intérieur de la pile, du zinc au cuivre. L'électrolyse du sulfate de zinc amène sur la lame de zinc des ions SO_4^{--} qui régénèrent une quantité de sulfate de zinc égale à celle que le courant a détruite ; cette même électrolyse amène des ions Zn^{++} à la surface de contact des deux liquides. L'électrolyse du sulfate de cuivre amène à cette même surface de contact, des ions SO_4^{--} qui s'unissent aux ions Zn^{++} en donnant une quantité supplémentaire de sulfate de zinc ; cette même électrolyse amène des ions Cu^{++} sur la lame de cuivre.

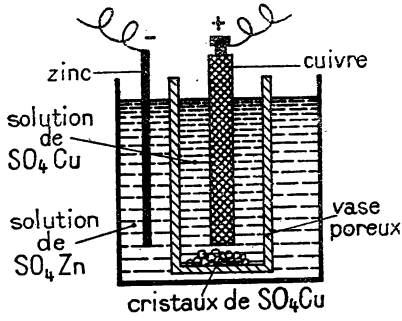


FIG. 158-III. — Pile Daniell.

En définitive, la nature des substances en contact à la surface des électrodes n'est pas modifiée par le passage du courant : la cause principale de la polarisation des piles, étudiée dans les paragraphes précédents, n'existe pas ici. Seules les concentrations des solutions salines tendent à varier, celle de la solution de sulfate de zinc tendant à croître et celle de la solution de sulfate de cuivre tendant à décroître. On peut éviter même ces variations. D'une part, on prend saturée au début la solution de sulfate de zinc. D'autre part on dispose, à la partie supérieure de la solution de sulfate de cuivre, des cristaux de ce sel contenus dans une corbeille en fil de cuivre. Pour des courants ne dépassant pas l'ordre du centième d'ampère, la vitesse de destruction du sulfate de cuivre par le courant ne dépasse généralement pas la vitesse de dissolution des cristaux, la solution reste saturée.

Dans ces conditions, la pile Daniell garde une f. é. m. remarquablement constante, qui dépend un peu de la pureté des métaux constituant les électrodes, et qui est voisine de 1,1 V.

Il est normal que l'on ait songé à prendre une pile impolarisable comme

étalon de f. é. m. L'élément Weston décrit au paragraphe 163 répond bien aux conditions ci-dessus et, de plus, il a l'avantage d'avoir une f. é. m. qui varie peu avec la température.

Comme tout générateur, une pile possède une *résistance* intérieure ; c'est celle du liquide traversé par le courant ; elle est d'autant plus faible que l'épaisseur de liquide est plus petite et la section plus grande. Elle n'est donc pas la même pour toutes les piles d'un même type ; elle peut atteindre et dépasser quelques ohms.

167. — ***Accumulateurs.*** — Ce sont des voltamètres à eau acidulée et à *électrodes de plomb*. Les lames de plomb sont susceptibles d'absorber beaucoup plus d'oxygène et d'hydrogène que les lames de platine ; elles exigent, pour se polariser complètement, le passage d'une quantité d'électricité beaucoup plus grande, et par suite elles fournissent une quantité d'électricité beaucoup plus grande aussi pendant leur dépolarisation. Un accumulateur au plomb permet, en somme, d'emmagasiner et de retrouver ensuite des quantités d'électricité beaucoup plus grandes qu'un voltamètre à électrodes de platine.

Pendant la *charge* d'un accumulateur, on polarise ses électrodes en le faisant traverser par un courant fourni par un générateur. Pendant la *décharge*, l'accumulateur joue à son tour le rôle de générateur et se dépolarise partiellement en produisant lui-même un courant dans un circuit extérieur.

On appelle généralement **capacité** d'un accumulateur, la quantité d'électricité qu'il peut emmagasiner par kilogramme de plomb ; on l'évalue en *ampères-heures*. Elle varie de 10 à 20 A*h* par kilogramme de plaque.

On peut accroître la capacité d'un accumulateur ou, comme on dit, le *former*, en le chargeant et le déchargeant alternativement un certain nombre de fois. Les électrodes deviennent ainsi poreuses, et par suite aptes à entrer en réaction, jusqu'à une profondeur plus grande. Il est avantageux aussi de rendre les deux électrodes également poreuses en intervertissant leurs rôles, c'est-à-dire en faisant passer le courant de charge tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre.

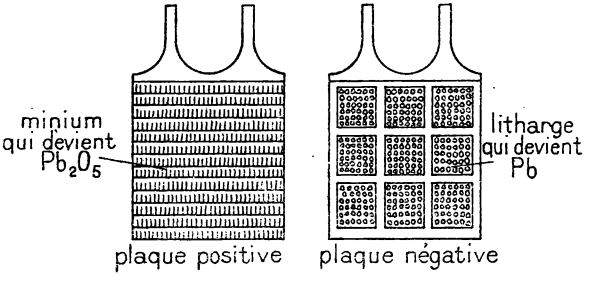


FIG. 159. — Plaques d'accumulateurs.

Ce procédé de *formation* présente l'inconvénient d'exiger un temps relativement long. Il était le seul connu autrefois.

Actuellement on utilise une formation dite *artificielle*. Les électrodes sont des grilles de plomb (fig. 159) jouant simplement le rôle de support, dont les alvéoles sont remplis d'oxydes, minium Pb_3O_4 à l'anode, litharge PbO à la cathode, constituant les matières actives. Pendant la première charge, l'anode reçoit de l'oxygène qui transforme le minium en un peroxyde conducteur

(Pb_2O_7 ou Pb_2O_5), la cathode reçoit de l'hydrogène qui réduit la litharge à l'état de plomb très poreux. Une seule charge suffit pour former l'accumulateur.

Le liquide est une solution aqueuse d'acide sulfurique à 22° Baumé.

La plaque qui sert d'anode pendant la charge c'est-à-dire celle qui communique avec le pôle *positif* du générateur du courant, joue le rôle de pôle *positif* pendant la décharge ; on l'appelle *plaque positive.* L'autre plaque communique pendant la charge avec le pôle *négatif* du générateur ; elle joue pendant la décharge le rôle de pôle *négatif*; c'est la *plaque négative.*

Les réactions chimiques dont ces plaques sont le siège, soit pendant la charge, soit pendant la décharge, ne sont pas connues d'une façon certaine. D'après certains auteurs ces réactions seraient les suivantes :

Pendant la *décharge* la plaque positive reçoit de l'hydrogène qui réduirait le peroxyde à l'état d'oxyde puce PbO_2 :

$$Pb_2O_5 + H_2 = 2PbO_2 + H_2O,$$

la plaque négative reçoit SO_4 qui transformerait le plomb en sulfate plombeux SO_4Pb_2 :

$$SO_4 + 2Pb = SO_4Pb_2.$$

Pendant la charge suivante, la plaque positive reçoit SO_4 qui donnerait la réaction :

$$2PbO_2 + SO_4 + H_2O = SO_4H_2 + Pb_2O_5,$$

la plaque négative reçoit de l'hydrogène qui réduirait le sulfate plombeux à l'état de plomb :

$$SO_4Pb_2 + H_2 = SO_4H_2 + 2Pb.$$

Le liquide s'appauvrit en acide sulfurique pendant la décharge, et s'enrichit en acide sulfurique pendant la charge ; c'est à la fin de la charge que

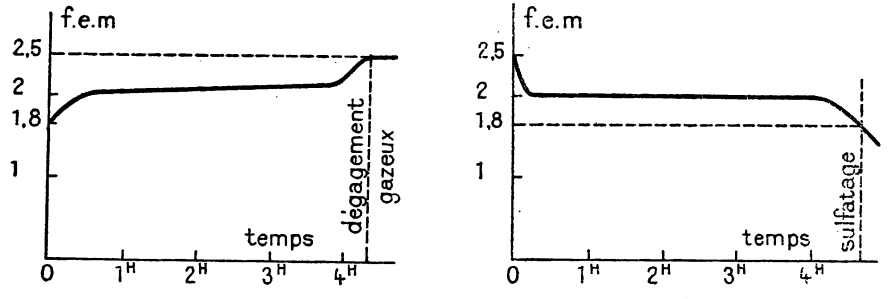


FIG. 160. — Variation de la f. é. m. d'un accumulateur pendant la charge (I) et pendant la décharge (II).

la solution doit marquer 22° Baumé. On doit ajouter de temps en temps un peu d'eau pour remplacer celle qui disparaît par évaporation, et vérifier le titre dans les conditions qui viennent d'être indiquées.

Pendant la charge, la f. c. é. m. E_0 de l'accumulateur croît d'abord rapidement jusqu'à 2,1 V (fig. 160-I), puis très lentement jusqu'à 2,2 V, et, en fin

de charge, très rapidement jusqu'à 2,5 V environ. La fin de la charge est marquée par un fort dégagement gazeux, l'hydrogène et l'oxygène n'étant plus alors absorbés par les électrodes.

Pendant la décharge, la f. é. m. tombe très vite de 2,5 à 2 volts (fig. 160-II), puis reste constante pendant un temps très long, et baisse à la fin.

On ne doit pas laisser tomber la f. é. m. au-dessous de 1,8 V, ni la laisser longtemps à cette valeur, sous peine de *sulfater* les plaques. Normalement la plaque positive est rouge et la plaque négative est d'un gris-bleu. On dit qu'elles se sulfatent lorsqu'elles se recouvrent d'un enduit blanc de sulfate plombique SO_4Pb. On se débarrasse difficilement de ce sulfate ; on peut y arriver, lorsqu'il est peu abondant, par des charges prolongées à faible régime.

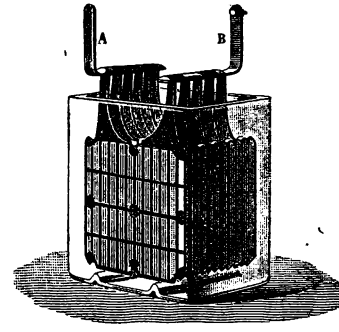


FIG. 161

La f. é. m. d'un accumulateur varie très peu avec la température : 3 /10000 de volt par degré, environ.

La résistance intérieure est pratiquement négligeable parce que les électrodes ont une large surface et que leur distance est faible ; elle est de l'ordre de 0,01 ohm pour les petits accumulateurs et de 0,001 ohm pour les gros. Pour éviter l'encombrement, chaque électrode est constituée par plusieurs lames disposées dans des plans parallèles et reliées métalliquement (fig. 161). Les plaques formant l'électrode positive sont intercalées entre celles qui constituent l'électrode négative.

On utilise aussi des ACCUMULATEURS ALCALINS dans lesquels l'électrolyte est une solution de potasse à 20 p. cent, l'anode est formée d'un peroxyde de nickel et la cathode est en fer ou en cadmium. La f. é. m. est 1,5 volt. Ils sont moins fragiles que les précédents, mais leur f. é. m. reste moins constante. Ils sont utilisés pour la traction électrique.

Si l'on met en court-circuit un accumulateur de f. é. m. 2 volts et de résistance intérieure 0,005 ohm en reliant ses bornes par une résistance négligeable, l'intensité du courant est :

$$I = \frac{2}{0{,}005} = 400 \text{ A.}$$

Un tel courant détériore le générateur. Donc un *accumulateur ne devra jamais être mis en court-circuit.*

168. — Piles thermo-électriques. — L'expérience montre qu'un circuit métallique fermé, hétérogène, dont la température n'est pas uniforme est, en général, parcouru par un courant. C'est le cas, par exemple, du circuit formé par deux conducteurs métalliques soudés aux deux extrémités et dont les soudures sont à des températures différentes θ_1 et θ_2. Un tel système est appelé un *couple thermo-électrique* et la f. é. m. qui produit le courant est appelée *f. é. m. thermo-électrique.*

Les mesures de la f. é. m. thermo-électrique d'un couple déterminé, pour diverses températures des soudures, conduisent à la loi suivante :

Loi des températures successives. — **Pour un couple déterminé, la f. é. m. thermoélectrique $E_{\theta_0}^{\theta_1}$, lorsque les températures des soudures sont θ^0 et θ_1, est égale à la somme des forces électromotrices $E_{\theta_0}^{\theta_2}$ et $E_{\theta_2}^{\theta_1}$ du même couple lorsque les températures des soudures sont θ_0 et θ_2 d'une part, et θ_2 et θ_1 d'autre part.**

$$E_{\theta_0}^{\theta_1} = E_{\theta_0}^{\theta_2} + E_{\theta_2}^{\theta_1}$$

Pour étudier les variations de la f. é. m. d'un couple en fonction de la température des soudures, il suffit de maintenir fixe la température θ_0 d'une soudure et de faire varier la température θ de l'autre. Soit E la f. é. m. correspondant à la température θ. La courbe représentative des variations de E en fonction de θ a une forme qui varie avec la nature des métaux du couple. Elle est parfois presque rectiligne, parfois compliquée. Souvent, elle peut être assimilée à une parabole dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe des θ (fig. 162). Dans ce dernier cas, lorsqu'on fait croître θ à partir de la valeur θ_0, la f. é. m. E part de zéro, croît et passe par un maximum E_m pour une certaine valeur θ_m de θ. Puis, si θ continue à croître, la f. é. m. diminue et s'annule pour la température $\theta_i = \theta_0 + 2(\theta_m - \theta_0)$. La valeur θ_i est la *température d'inversion*, elle varie avec θ_0 alors que la valeur θ_m est *indépendante* de θ_0 et est déterminée pour un couple donné. Quand on passe par la température θ_i, la f. é. m. du couple s'annule et change de sens.

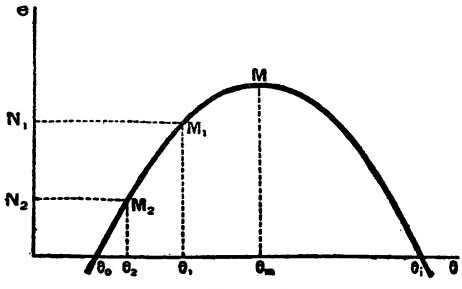


Fig. 162

Pour un couple fer-cuivre dont l'une des soudures est à la température ordinaire, la température d'inversion est de l'ordre de 500°. Pour les températures inférieures à 500°, le courant va du cuivre au fer à travers la soudure chaude ; pour les températures supérieures à 500°, il est de sens opposé.

D'après la loi des températures successives, la valeur de la f. é. m. $E_{\theta_1}^{\theta_2}$ du couple entre les températures θ_1 et θ_2 est représentée par le segment N_1N_2 (fig. 162).

Les couples thermoélectriques sont utilisés pour la mesure des températures des fours et pour l'étude du rayonnement. Chaque couple doit être étalonné directement en utilisant les repères thermométriques, car la f. é. m. d'un couple varie beaucoup avec le degré de pureté des métaux utilisés.

169. — Effet Peltier et Effet Thomson. — L'existence d'une dissymétrie dans la constitution d'une chaîne conductrice à température uniforme entraîne l'existence d'une différence de potentiel entre ses extrémités. Si nous cherchons l'origine de cette différence de potentiel en étudiant les variations du potentiel le long de la chaîne, nous trouvons qu'il y a de brusques variations du potentiel quand nous passons d'un conducteur au suivant.

Deux conducteurs de natures différentes A et B en contact présentent entre eux une différence de potentiel lorsqu'ils sont en équilibre électrique. Tous les points du conducteur A sont au même potentiel V_A, tous les points de B sont au même potentiel V_B, mais V_A et V_B sont différents. La différence $V = V_A - V_B$ s'appelle la *différence de potentiel de contact* entre les deux conducteurs A et B. Dans une chaîne formée de plusieurs conducteurs en contact et à température uniforme, la différence de potentiel entre les extrémités est la somme des différences de potentiel de contact des différentes soudures. Quand la chaîne est symétrique, cette somme est nulle.

Faisons passer dans l'ensemble de deux conducteurs A et B en contact un courant d'intensité i (fig. 163). La différence de potentiel entre deux points M et N infiniment voisins, situés l'un dans A, l'autre dans B, est égale à la différence de potentiel de contact v. Le passage du courant fait apparaître entre M et N une puissance $W = vi$. L'expérience montre que cette énergie est de l'énergie calorifique. Le passage du courant i dans un sens, par exemple de M vers N libère de la chaleur, tandis que le passage du courant en sens inverse, de N vers M, absorbe de la chaleur. Cette libération ou cette absorption de chaleur par le passage d'un courant à travers la surface de contact de deux conducteurs constitue **l'effet Peltier.** C'est un phénomène *réversible* auquel vient toujours s'ajouter l'effet Joule qui est irréversible. Cet effet Joule parasite complique les mesures.

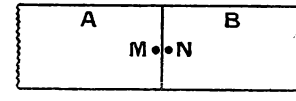


FIG. 163

Prenons maintenant une seule barre métallique mais dont les extrémités sont à des températures différentes. Cette barre présente entre ses extrémités une différence de potentiel électrostatique v'. Faisons passer un courant i dans cette barre. La puissance libérée par le passage du courant comprend l'effet Joule et la puissance $W' = v'i$ qui est absorbée ou libérée, suivant le sens du courant. L'expérience montre que W' se retrouve sous forme d'énergie calorifique. C'est cette libération ou cette absorption de chaleur par le passage du courant dans un conducteur à température *non uniforme* qui constitue **l'effet Thomson.** C'est un phénomène réversible auquel vient toujours s'ajouter l'effet Joule qui est irréversible.

Exercices.

45. Une pile à vase poreux contient à l'intérieur de celui-ci une solution de sulfate de cuivre dans laquelle plonge une électrode de cuivre ; dans le vase extérieur se trouve une électrode de zinc plongeant dans une solution de sulfate de zinc. Indiquer les réactions

qui ont lieu dans la pile et montrer pourquoi elle est pratiquement impolarisable. — Sachant que sa f. é. m. est égale à 1,14 volt, calculer la chaleur qu'y dégage par équivalent-gramme, l'ensemble des réactions qu'y détermine le courant en admettant que cette chaleur se transforme complètement par effet Joule.

(Saint-Cyr, 1935, 1°.)

46. Un couple thermoélectrique dont une des soudures est à 0° et l'autre à t°, a une force électromotrice e qui, exprimée en microvolts, est donnée par la formule :

$$e = 53\,t - 0{,}02t^2.$$

Calculer la température d'inversion. — Calculer la f. é. m. du couple pour t = 1000°. Quelle est la variation de la f. é. m. au voisinage de 1000° quand la température varie de 1° ?

Réponse : $t_i = 2650°$; $e_{1000} = 0{,}033$ volt ; $\Delta e = 13$ μvolts.

QUATRIÈME PARTIE

MAGNÉTISME

CHAPITRE XX

PHÉNOMÈNES FONDAMENTAUX DU MAGNÉTISME

170. — ***Aimants.*** — Il existe dans la nature des substances qui ont la propriété d'attirer la limaille de fer. On les appelle des *aimants naturels* et on donne le nom de *magnétisme* à la cause de cette propriété. Certains échantillons d'oxyde salin de fer Fe_3O_4 sont des aimants naturels. Plongés dans la limaille, ils s'en recouvrent d'une manière non uniforme. L'attraction se manifeste seulement dans quelques régions qu'on appelle des *pôles* et dont les limites sont assez vagues. Le nombre des pôles est variable d'un échantillon à l'autre, mais on observe qu'*il est toujours au moins égal à deux.*

Il est facile de réaliser des substances ayant les mêmes propriétés que les aimants naturels. Si nous frottons une petite barre de fer avec un aimant naturel, la barre acquiert la propriété d'attirer la limaille. Nous avons fabriqué un nouvel aimant. D'ailleurs on constate qu'il n'est pas nécessaire de frotter la barre contre l'aimant naturel, mais qu'il suffit de la placer au voisinage de l'aimant pour qu'elle devienne un aimant. De même si nous plaçons une aiguille d'acier à l'intérieur d'une bobine parcourue par un courant, nous observons que l'aiguille est devenue un aimant. On dit qu'elle s'est aimantée.

L'expérience montre que les corps susceptibles de s'aimanter ne sont pas très nombreux. Le fer et l'acier s'aimantent facilement et ont des propriétés magnétiques bien marquées. En outre quelques métaux de la famille du fer (nickel, cobalt) et leurs alliages possèdent les mêmes propriétés mais à un degré moindre.

Le fer, le nickel, le cobalt sont des substances magnétiques. Les autres substances n'ont *pratiquement* aucune propriété magnétique.

L'étude des aimants est simple dans le cas où l'aimant a la forme d'un barreau allongé dont la longueur est très grande par rapport aux autres dimensions. Dans la suite, il s'agira toujours, sauf avis contraire, d'un aimant de ce genre. On les obtient toujours en prenant un barreau d'acier

que l'on place suivant l'axe d'une bobine de fil régulièrement enroulé dans lequel on fait passer un courant électrique. L'aimantation est immédiate.

171. — ***Propriétés qualitatives des aimants.*** — Il est facile de vérifier expérimentalement que tous les aimants en forme de barreau allongé ont les propriétés suivantes :

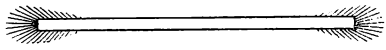


FIG. 164

1° Plongés dans la limaille de fer, ils l'attirent (fig. 164), mais cette propriété ne se manifeste presque uniquement qu'aux deux extrémités qu'on appelle les *pôles* de l'aimant.

2° *Leurs deux pôles ne sont pas identiques.* Si nous suspendons un aimant par son centre de gravité, loin de tout autre aimant, une des extrémités se dirige sensiblement vers le Nord, l'autre vers le Sud. Si nous écartons l'aimant de sa position d'équilibre, si même nous le retournons bout pour bout, il revient toujours dans la même position d'équilibre, la même extrémité étant dirigée vers le Nord. Cette extrémité s'appelle le *pôle nord* N, l'autre extrémité s'appelle le *pôle sud* S.

3° Suspendons un aimant long NS (fig. 165) de manière qu'il puisse tourner librement et approchons-en un autre barreau allongé aimanté N'S'. Nous observons que le barreau NS se déplace et que si nous avons approché N' de N, le pôle N est repoussé. Dans cette expérience, les quatre pôles N, N', S et S' interviennent, mais les barreaux aimantés étant longs par rapport à la distance NN', l'action due aux pôles S et S' est négligeable et la force exercée par N' sur N intervient presque seule. Si nous retournons bout pour bout le barreau N'S', nous constatons que le pôle N est attiré par S'. D'où la propriété suivante :

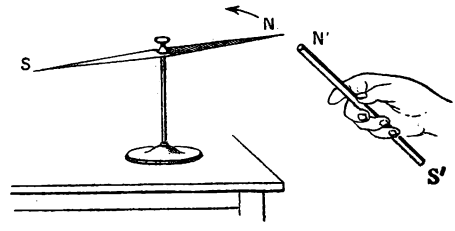


FIG. 165

Deux pôles magnétiques de même nom se repoussent ; deux pôles magnétiques de noms contraires s'attirent.

Cette propriété permet de déterminer les pôles d'un aimant sans suspendre celui-ci. Il suffit de posséder une aiguille aimantée horizontale, mobile autour d'un axe vertical passant par son centre de gravité, et dont les pôles sont identifiés. Une telle aiguille constitue une *boussole.* Approchons du pôle nord de cette aiguille un pôle d'aimant de nature inconnue. S'il y a répulsion, c'est qu'il s'agit d'un pôle nord ; s'il y a attraction, c'est qu'il s'agit d'un pôle sud.

172. — ***Etude quantitative des aimants.*** — Approchons d'un pôle nord N d'une aiguille aimantée, un pôle d'aimant N', nous constatons que la force de répulsion à laquelle est soumis le pôle N croît quand le pôle N'

se rapproche. D'autre part, si nous plaçons *à la même distance* du pôle N différents pôles nord N', N'', N''', nous constatons que la force de répulsion varie d'un pôle à l'autre. Par suite, les forces qui s'exercent entre deux pôles magnétiques dépendent de la distance de ces pôles et de leur constitution.

1° Influence de la distance. — Le rôle de la distance a été étudié par Coulomb avec un appareil appelé *Balance de torsion* ou *Balance de Coulomb*. Cette balance est analogue à celle qui a été utilisée pour l'étude des forces entre deux masses électriques (§ 38). L'aiguille en gomme laque qui porte la boule mobile est remplacée par un barreau aimanté horizontal et à la place de la boule fixe est placé le pôle inférieur d'un barreau aimanté vertical. Si les pôles sont de même nom, il y a répulsion et la force magnétique est équilibrée par le couple de torsion du fil de suspension.

Les mesures faites par Coulomb sont assez grossières mais lui ont permis d'énoncer la loi des attractions et répulsions magnétiques qui porte son nom et qui a été vérifiée *ultérieurement* avec précision sur ses conséquences.

Loi de Coulomb. — **Deux pôles d'aimant exercent l'un sur l'autre deux forces égales et opposées, dirigées suivant la droite qui les joint et inversement proportionnelles au carré de la distance *d* qui les sépare.**

La force *f* qui s'exerce entre deux pôles d'aimants placés à la distance *d* est donc de la forme :

$$f = \frac{K}{d^2},$$

K étant une constante qui dépend des pôles en présence et des unités.

2° Influence de la constitution des pôles. — Prenons une aiguille aimantée montée sur un pivot vertical et approchons *à une même distance* de son pôle nord, différents pôles d'aimants. Les grandeurs des forces exercées sont différentes. Nous dirons que le pôle d'aimant qui exerce la plus grande force contient plus de magnétisme que les autres. D'une manière plus précise, si deux pôles placés à la même distance d'un troisième quelconque, exercent la même force sur lui, nous dirons que ces deux pôles contiennent la même quantité de magnétisme ; si la force est double, la quantité de magnétisme sera dite double. Donc, par définition, *le rapport de deux quantités de magnétisme est égal au rapport des intensités des forces qu'elles exercent dans les mêmes circonstances.*

Une unité étant choisie, nous pourrons mesurer les masses magnétiques *m* et *m'* de deux pôles. Ces deux pôles placés à la distance *d* exerceront l'un sur l'autre une force qui, d'après la loi de Coulomb et la définition des masses magnétiques, sera donnée par la formule :

$$f = \frac{1}{\mu}\frac{mm'}{d^2},$$

μ étant une constante qui dépend des unités et de la nature du milieu dans lequel sont placées les masses magnétiques.

173. — ***Unité de quantité de magnétisme.*** — Dans le système électrostatique C. G. S., l'unité de quantité de magnétisme se déduit des unités électriques. C'est donc une unité dérivée et par suite le coefficient μ est déterminé pour un milieu donné.

Inversement, on peut prendre l'unité de quantité de magnétisme comme unité de base et en déduire les unités électriques. Dans les systèmes dits *électromagnétiques*, on définit l'unité de masse magnétique, à partir de la formule de Coulomb $f = \frac{1}{\mu}\frac{mm'}{d^2}$ dans laquelle on a choisi $\mu = 1$ dans le vide. Les deux systèmes électromagnétiques utilisés sont : le système électromagnétique C. G. S. et le système pratique d'unités électriques (§ 23).

Dans le système électromagnétique C. G. S., l'unité de quantité de magnétisme est la quantité de magnétisme qui, agissant dans le vide sur une quantité de magnétisme égale située à 1 *cm, la repousse avec une force d'une dyne.*

Dans ce système, l'équation de dimension d'une quantité de magnétisme est :

$$m = L^{\frac{3}{2}} M^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$$

174. — ***Constitution des aimants.*** — Plongeons un barreau aimanté dans de la limaille de fer, nous constatons que les deux pôles attirent *également* la limaille. Comparons d'une façon plus précise les quantités de magnétisme contenues dans les pôles nord et sud d'un aimant en observant leurs actions à une même distance sur un troisième pôle. Nous constatons qu'elles sont égales et de sens contraires. Convenons d'affecter du signe + les quantités de magnétisme nord et du signe — les quantités de magnétisme sud. Nous pouvons dire que *la somme algébrique des quantités de magnétisme contenues dans les deux pôles d'un aimant est nulle.* Cette propriété est générale même pour les aimants non en forme de barreau et pouvant posséder plus de deux pôles : la somme algébrique des quantités de magnétisme des pôles est nulle.

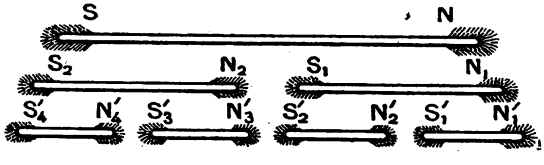


FIG. 166. — Expérience de l'aimant brisé.

Dans un aimant allongé, le magnétisme n'apparaît qu'aux extrémités et l'on pourrait penser qu'en coupant l'aimant en son milieu, on séparerait ainsi les deux pôles. Coupons donc un barreau aimanté NS vers son milieu (fig. 166), nous constatons en plongeant les morceaux dans la limaille de fer que chaque moitié est un aimant complet possédant deux pôles. Deux pôles nouveaux nord et sud sont apparus de part et d'autre de la coupure.

Rapprochons les deux morceaux au contact de façon à reconstituer l'aspect du barreau primitif, nous trouvons qu'il reprend ses propriétés initiales. Ce résultat nous conduit à admettre que les pôles intermédiaires que nous

avons fait apparaître, existaient déjà dans le barreau avant la fragmentation.

Nous pouvons répéter autant de fois que nous voulons la même expérience sur les fragments du barreau, chaque fragment est un aimant complet qui, par sectionnement, donne deux aimants complets ayant chacun deux pôles de noms contraires (fig. 166). Telle est l'*expérience de l'aimant brisé.*

Nous admettrons que cette propriété persiste jusqu'à l'extrême division de la matière, c'est-à-dire jusqu'aux molécules. Chaque molécule d'une substance aimantée est un petit aimant que nous appellerons un *doublet* et qui peut être considéré comme deux masses magnétiques ponctuelles voisines possédant des quantités de magnétisme égales et de noms contraires.

Un corps non aimanté est une substance dont les doublets occupent des positions quelconques les uns par rapport aux autres, si bien que, pour un volume quelconque de substance, l'action *moyenne* de ces petits aimants est nulle. Dans un corps aimanté, au contraire, les doublets ont subi une orientation et leur action moyenne n'est plus nulle, le magnétisme apparaît.

L'aimantation du doublet provient de la constitution même de la matière. Les électrons des atomes, en se déplaçant sur leurs trajectoires, forment de véritables courants électriques qui, comme nous le verrons plus loin (§ 228), créent des champs magnétiques.

CHAPITRE XXI

CHAMPS MAGNÉTIQUES

I. — PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES CHAMPS MAGNÉTIQUES

175. — ***Définitions.*** — On dit qu'en un point A existe un *champ magnétique* si une aiguille aimantée placée en ce point y subit une action directrice. Une masse magnétique ponctuelle placée en ce point y est soumise à une force. Cette masse magnétique doit être considérée comme *passive*, c'est-à-dire obéissant aux forces exercées par les masses extérieures et non comme *active*, c'est-à-dire exerçant des forces sur les autres masses.

On appelle *vecteur champ magnétique* en un point A ou plus simplement *champ magnétique* en A le vecteur représentant la force qui s'exerce sur la masse magnétique nord passive UNITÉ placée en A. La *direction* et le *sens* du champ magnétique sont la direction et le sens de cette force ; l'*intensité* du champ est l'intensité de la force.

Il en résulte qu'une masse magnétique de valeur algébrique m placée en A où existe un champ magnétique $\vec{H}$, y sera soumise à une force $\vec{f}$ ayant pour expression :

$$\vec{f} = m \times \vec{H}.$$

S'il s'agit d'une masse magnétique nord, m est positif et la force a le sens du champ. Dans le cas d'une masse magnétique sud, m est négatif et la force est dirigée en sens contraire du champ.

176. — ***Unité d'intensité de champ magnétique.*** — La formule $\vec{f} = m\vec{H}$ permet de définir l'unité d'intensité de champ magnétique.

Dans le système électromagnétique C. G. S., l'unité d'intensité de champ magnétique, appelée ***gauss*** (voir § 274, Remarque), *est l'intensité d'un champ magnétique qui exerce une force d'une dyne sur une masse magnétique égale à l'unité électromagnétique C. G. S.*

Il résulte aussi de la formule de Coulomb $f = \frac{mm'}{d^2}$ que le champ créé par une masse ponctuelle m à la distance d a pour intensité $H = \frac{m}{d^2}$. Cette formule nous montre que *le gauss est l'intensité du champ que crée à 1 cm de distance une masse magnétique égale à l'unité C. G. S.*

L'équation aux dimensions d'un champ magnétique est :

$$H = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

Citons les valeurs de quelques champs magnétiques : la composante horizontale du champ magnétique terrestre vaut 0,2 gauss ; entre les pôles d'un aimant en fer à cheval on peut avoir un champ de l'ordre de 100 gauss ; avec un électro-aimant, on réalise facilement des champs magnétiques de 25 000 gauss.

177. — ***Propriétés des champs magnétiques.*** — La loi des attractions magnétiques étant la loi de Coulomb, le champ magnétique est, comme le champ électrique, un champ newtonien. Les propriétés établies en électrostatique et qui résultaient uniquement de la loi de Coulomb vont donc se retrouver en magnétisme. Les propriétés géométriques et algébriques (mais non physiques) des champs magnétiques seront les mêmes que celles des champs électriques. Leurs démonstrations sont identiques (voir chapitre VI). Dans tout ce chapitre, nous ne considérerons que des masses magnétiques placées dans un milieu non ferro-magnétique pour lequel $\mu = 1$. Par suite :

1° Nous pouvons représenter un champ magnétique par des *lignes de force* et des *surfaces de niveau* définies comme au paragraphe 46 et considérer, comme au paragraphe 48, le *flux de force* à travers une surface.

2° Le THÉORÈME DE GAUSS est encore vrai.

Le flux de force ou flux magnétique Φ qui sort d'une surface fermée placée dans le vide est égal au produit par 4π de la somme algébrique Σm_i des masses magnétiques intérieures augmenté du produit par 2π de la somme algébrique Σm_s des masses magnétiques superficielles. Il est indépendant des masses magnétiques extérieures à la surface.

$$\Phi = 4\pi \Sigma m_l + 2\pi \Sigma m_s .$$

3° Il y a conservation du flux à l'intérieur d'un tube de force, c'est-à-dire que le flux magnétique qui traverse dans le même sens toutes les sections d'un tube de force est constant.

4° *Le champ magnétique dérive d'un potentiel* qui n'est déterminé en chaque point qu'à une constante additive près. Nous conviendrons de prendre la valeur du potentiel de façon qu'elle soit nulle à l'infini. Nous pouvons démontrer comme au paragraphe 52 que, pour un ensemble de masses magnétiques, la fonction potentiel est $V = \Sigma_a \frac{m}{r}$.

5° Les relations entre le champ magnétique $\vec{H}$ et le potentiel V sont les mêmes qu'au paragraphe 55. Nous avons donc :

$$H_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad H_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad H_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Le champ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants et la composante du champ suivant une direction MM′ de longueur ds est $H_s = -\frac{dV}{ds}$, dV étant la variation du potentiel quand on passe de M au point voisin M′.

6° Le potentiel magnétique V en un point A est égal au travail qu'il faut fournir contre le champ magnétique pour amener la masse magnétique nord unité de l'infini jusqu'au point A.

Bien entendu, l'identité entre les champs magnétiques et les champs électriques est limitée à leurs propriétés d'ordre mathématique ; leurs propriétés d'ordre physique sont totalement différentes.

178. — ***Unité de flux magnétique.*** — Dans un champ uniforme d'intensité H, le flux de force qui traverse une surface plane d'aire S a pour expression

$$\Phi = HS \cos \alpha.$$

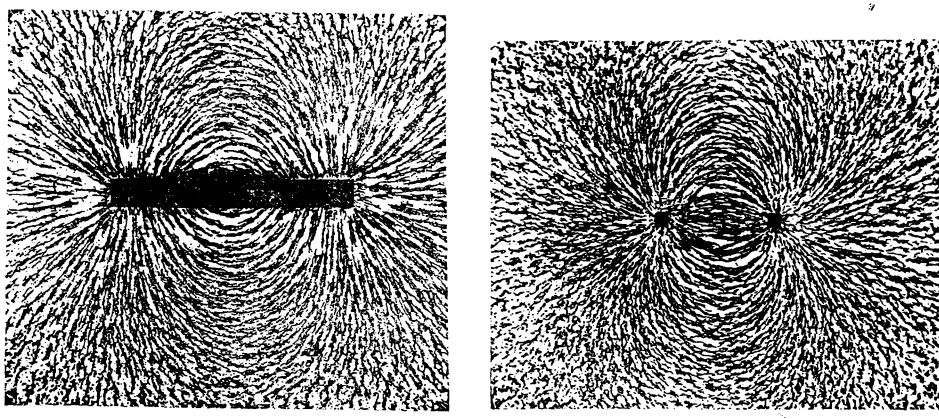
Faisons $H = 1$, $S = 1$, $\cos \alpha = 1$, nous avons $\Phi = 1$

L'unité électromagnétique C. G. S. de flux de force magnétique est le flux qui traverse une portion de surface plane ayant une aire d'un centimètre carré, placée normalement aux lignes de force dans un champ magnétique uniforme d'un gauss. Cette unité s'appelle le ***Maxwell.***

L'équation aux dimensions d'un flux dans un système électromagnétique est :

$$\Phi = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

179. — ***Spectres magnétiques.*** — Posons sur une table un ou plusieurs barreaux aimantés et disposons par-dessus le tout une lame plane



I. *Barreau rectiligne.* II. *Barreau en fer à cheval.*

FIG. 167. — Spectres magnétiques.

horizontale, de verre ou de carton. A l'aide d'un tamis saupoudrons cette lame d'une couche faible et régulière de limaille de fer, et imprimons à la lame de petites secousses afin de donner de la mobilité aux grains de limaille. Nous voyons ceux-ci se disposer de manière à dessiner des lignes relativement nettes dont l'ensemble constitue ce qu'on appelle un *spectre magnétique.*

La figure 167, I représente le spectre d'un barreau rectiligne sur une lame parallèle au barreau. La figure 167, II représente le spectre d'un barreau en fer à cheval sur une lame perpendiculaire aux branches du barreau, c'est-à-dire le spectre de deux masses magnétiques de noms contraires. Enfin le spectre de la figure 167, III est celui du champ produit par deux pôles de même nom.

Pendant que la lame de verre ou de carton est placée sur les aimants producteurs du champ, promenons dans les diverses régions du spectre une petite aiguille aimantée, libre de s'orienter dans le plan de la lame sous l'action du champ, par exemple suspendue à un fil de cocon ; elle se place, en chaque point, tangentiellement à la ligne de limaille en ce point. Or nous verrons (§ 181) que la direction d'équilibre de cette aiguille est la direction même du champ (ou plus exactement la direction de la projection du vecteur champ sur le plan du spectre). Les lignes de limaille sont donc en quelque sorte la matérialisation des lignes de force dans le plan du spectre.

La formation du spectre s'explique de la manière suivante. Chaque grain de limaille s'aimante par influence et devient une sorte de petite aiguille aimantée qui s'oriente suivant la direction du champ au point où il se trouve. Les attractions entre pôles de noms contraires des grains successifs les disposent bout à bout, tous orientés dans un même sens, sur une même ligne de force.

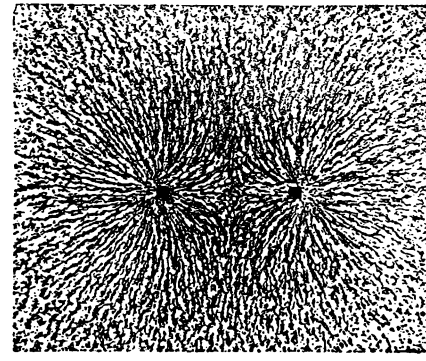


FIG. 167-III. *Spectre de deux pôles de même nom.*

On comprend l'intérêt que présente cette possibilité de réaliser des spectres magnétiques : on voit *simultanément* la *direction* du champ en tous ses points, ainsi que son *intensité* en valeur relative.

Nous pouvons remarquer, à titre de vérification, que les figures 166 et 167 relatives l'une à deux pôles de noms contraires, l'autre à deux pôles de même nom, sont comparables aux figures 27 et 28 relatives l'une à deux masses électriques de noms contraires, l'autre à deux masses électriques de même nom.

180. — ***Champ magnétique uniforme.*** — Considérons un champ magnétique dans lequel les lignes de force sont des droites parallèles. L'intensité du champ a la même valeur en tous les points : c'est un *champ uniforme.*

De même que pour les champs électriques, une portion d'un champ magnétique quelconque peut être considérée comme uniforme pourvu que ses dimensions soient assez petites vis-à-vis de sa distance aux masses productrices de champ les plus proches.

Nous verrons, en utilisant un spectre de limaille, que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur d'une bobine cylindrique parcourue par un courant, pourvu que sa longueur soit grande par rapport à ses dimensions transversales.

II. — ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME SUR UN AIMANT

Quand on place un barreau d'acier dans un champ magnétique, il s'aimante par influence. Nous supposerons dans tout ce chapitre que ce phénomène est négligeable. Si on place un barreau *aimanté* dans un champ magnétique, l'aimantation par influence qui se superpose à l'aimantation initiale est négligeable, c'est-à-dire que l'aimantation du barreau n'est pas modifiée. C'est ce que nous exprimons en disant que l'aimantation de ce barreau est supposée *rigide*.

181. — Action d'un champ uniforme sur un aimant. — Supposons un aimant constitué par deux pôles N et S portant les charges ponctuelles $+m$ et $-m$ et placé dans un champ magnétique uniforme H (fig. 168).

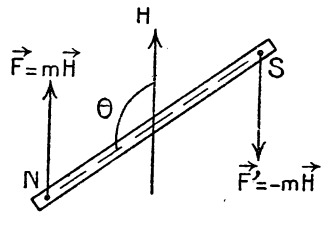


FIG. 168

L'action du champ sur le pôle nord N est une force $\vec{F}$ parallèle au champ, de même sens et égale à mH. L'action sur le pôle sud S est une force F', parallèle au champ, de sens contraire et égale à mH. Ces deux forces constituent un *couple* dont le moment est :

$$\mathcal{M} = F \times l \sin \theta = mH\, l \sin \theta,$$

l étant la distance des pôles et θ l'angle de la ligne des pôles SN avec le champ.

L'aimant soumis à un couple tendra à tourner et, s'il est libre, viendra se placer de façon que le moment du couple agissant soit nul. Pour cela il faut que $\sin \theta = 0$. Il y a donc deux positions d'équilibre correspondant à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. On voit facilement que la position d'équilibre *stable* est celle pour laquelle la ligne SN est parallèle au champ et *de même sens*. L'autre position est instable (fig. 169).

Nous avons supposé l'aimant réduit à deux pôles. En réalité les masses magnétiques ne sont pas groupées en deux points mais réparties dans les deux extrémités de façon que leur somme algébrique soit nulle. Dans la moitié de l'aimant OA (fig. 170), les masses positives sont toutes soumises à des forces parallèles au champ et de même sens. Ces forces admettent une résultante unique F égale à leur somme et appliquée en un certain point N de l'aimant. De même dans la moitié OB, les masses magnétiques négatives

sont toutes soumises à des forces parallèles à H et de sens contraires. Ces forces admettent une résultante unique F′ égale à leur somme et appliquée en un certain point S. Les forces F et F′ sont égales en grandeur puisque dans un aimant les quantités de magnétisme nord et sud sont égales. Donc l'*aimant est soumis à un couple.* Nous sommes d'ailleurs ramenés au cas précédent en supposant les pôles placés en N et S, la masse magnétique de

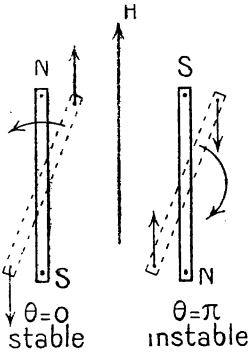


FIG. 169

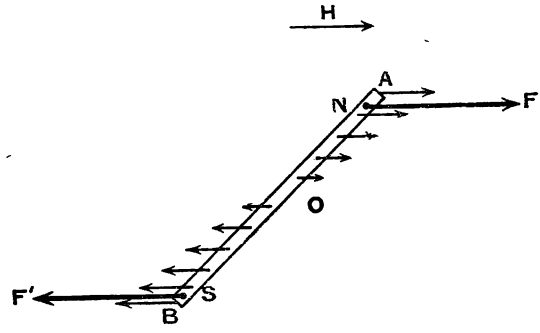


FIG. 170

chaque pôle étant la somme Σm des masses magnétiques de même nature de l'aimant.

Le problème de l'action d'un champ magnétique *uniforme* sur un aimant peut se résoudre si l'on connaît la position des points N et S et la quantité Σm, somme des masses magnétiques nord de l'aimant. Nous appellerons **pôles** de l'aimant les points N et S et **longueur de l'aimant** la distance l = NS entre ses pôles.

En résumé, un aimant quelconque placé dans un champ uniforme est soumis à un couple :

$$\mu = \Sigma m \times H \times l \sin \theta,$$

Σm étant la somme des masses magnétiques nord, H l'intensité du champ magnétique, l la longueur de l'aimant NS et θ l'angle de la droite SN et du champ.

De plus, si l'aimant est libre, il prend une position d'équilibre stable telle que la droite SN soit parallèle au champ et de même sens.

182. — ***Application au champ terrestre.*** — Suspendons une aiguille aimantée par son centre de gravité. Elle prend une position d'équilibre stable, ce qui prouve qu'elle est soumise à un champ magnétique ayant la direction de l'aiguille (fig. 171). Plaçons-la successivement en tous les points de la salle, nous constatons qu'elle prend des directions d'équilibre parallèles. Donc le champ magnétique terrestre est uniforme *dans la salle.*

Cette propriété permet de déterminer l'axe magnétique SN d'un aimant. Considérons par exemple une aiguille aimantée (fig. 172). Soit *xy* son axe

géométrique et NS son axe magnétique. Ces deux droites ne coïncident pas nécessairement.

Pour déterminer l'axe magnétique NS, disposons l'aiguille horizontalement dans le champ magnétique terrestre sur un pivot vertical situé au centre O d'un cercle gradué et lisons la division x du cercle située à l'une des extrémités de l'aiguille.

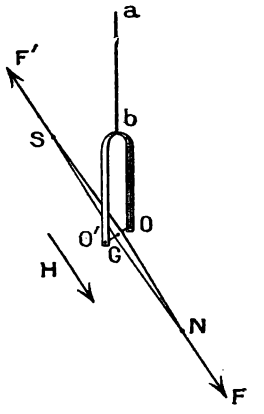


FIG. 171

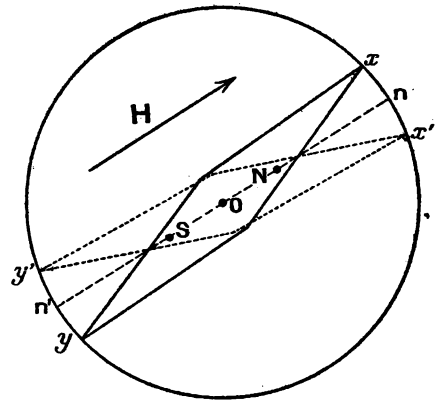


FIG. 172

Retournons ensuite l'aiguille face pour face. La droite NS reprend la même direction dans l'espace et l'axe géométrique prend une position $x'y'$ symétrique de xy par rapport à NS.

Lisons la nouvelle division x' située à l'extrémité de l'aiguille, puis calculons la demi-somme des deux lectures : $n = \frac{x + x'}{2}$. Le diamètre nn' du cercle gradué nous donne la direction de l'axe magnétique NS de l'aiguille et par suite aussi celle du champ uniforme H qui l'oriente.

183. — ***Moment magnétique d'un aimant.*** — Nous avons vu (§ 181) que tout aimant placé dans un champ uniforme est soumis à un couple dont le moment est :

$$\mu = \Sigma m \times l \times \mathrm{H} \sin \Theta.$$

Nous appellerons **moment magnétique** $\vec{\mathfrak{M}}$ de l'aimant le vecteur ayant même direction et même sens que le segment $\overline{\mathrm{SN}}$ et dont la grandeur $\mathfrak{M}$ est le produit de la longueur $\mathrm{SN} = l$ de l'aimant par la quantité Σm :

$$\mathfrak{M} = \Sigma m \times l.$$

Par suite, le moment du couple exercé par un champ uniforme H sur un aimant de moment magnétique $\mathfrak{M}$ sera $\mu = \Sigma m \times l \times \mathrm{H} \sin \Theta$,

$$= \mathfrak{M}\mathrm{H} \sin \Theta.$$

Or $\mathfrak{M}H \sin \Theta$ est la valeur du produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{\mathfrak{M}}$ et $\vec{H}$ que nous représenterons par $[\vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{H}]$. Le moment du couple étant un vecteur, nous avons la relation vectorielle :

$$\boxed{\vec{\mu} = [\vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{H}]}$$

Ces résultats nous permettent de tirer deux conclusions :

1° Si $\Theta = \frac{\pi}{2}$ et $H = 1$ nous avons $\mu = \mathfrak{M}$. Le moment magnétique d'un aimant a même grandeur que le moment du couple *maximum* auquel il est soumis dans un champ uniforme égal à l'unité. Le moment magnétique devient ainsi une grandeur mesurable par l'expérience.

2° D'après la loi de composition des couples et d'après les propriétés des produits vectoriels, nous en déduisons que *le moment magnétique d'un ensemble d'aimants rigidement liés est la somme* ***géométrique*** *des moments magnétiques des divers aimants.*

184. — ***Unité C. G. S. de moment magnétique.*** — D'après la formule $\mu = \mathfrak{M}H \sin \Theta$ nous voyons que $\mathfrak{M} = 1$, si $\mu = 1, H = 1$ et $\Theta = \frac{\pi}{2}$. Donc :

L'unité électro-magnétique C. G. S. de moment magnétique est le moment magnétique d'un aimant qui, placé dans un champ uniforme de 1 gauss, et perpendiculairement à la direction de ce champ, y est soumis à un couple égal à l'unité C. G. S.

L'équation aux dimensions d'un moment magnétique est :

$$\mathfrak{M} = L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

185. — ***Oscillations d'un aimant dans un champ uniforme.*** — Considérons un barreau aimanté soumis à la seule action d'un champ uniforme H. Il prend une position d'équilibre $S_o N_o$ parallèle au champ H (§ 181) (fig. 173).

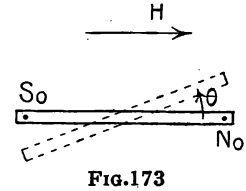


FIG. 173

Ecartons l'aimant d'un angle Θ_o de sa position d'équilibre et abandonnons-le à lui-même. Etudions son mouvement pendant le retour à la position d'équilibre.

Pour une position quelconque de l'aimant faisant avec le champ un angle Θ, l'aimant est soumis à un couple de rappel dont le moment est :

$$\mu = \mathfrak{M}H \sin \Theta,$$

$\mathfrak{M}$ étant le moment magnétique de l'aimant.

L'équation différentielle du mouvement est donc, en appelant I le moment d'inertie de l'aimant par rapport à son axe de rotation (§ 3),

$$I \frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\mathfrak{M}H \sin \Theta.$$

Si Θ_0 est petit, il en sera de même de Θ, et on peut à tout instant confondre le sinus de Θ avec l'angle Θ. L'équation différentielle du mouvement est donc :

$$I\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \mathfrak{M}H\,\Theta = 0.$$

L'intégrale générale est $\Theta = A \sin\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{M}H}{I}}\,t + \varphi\right)$. A et φ sont déterminés par les conditions initiales, à savoir qu'au temps $t = 0$, $\Theta = \Theta_0$ et la vitesse initiale $\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_0$ est nulle.

Θ est une fonction périodique du temps dont la période est :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\mathfrak{M}H}}}$$

Un barreau aimanté soumis à un champ uniforme et écarté de sa position d'équilibre d'un petit angle, effectue, autour de cette position, des oscillations de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\mathfrak{M}H}}$

Ce résultat va nous permettre de vérifier expérimentalement les conclusions obtenues à partir de l'hypothèse des masses magnétiques.

*186. — **Vérifications expérimentales des résultats théoriques.** —* En supposant qu'un aimant est constitué par des masses magnétiques libres nord et sud, nous avons obtenu certaines conclusions que nous allons rappeler et vérifier :

1° Un barreau aimanté libre placé dans un champ uniforme s'oriente dans la direction du champ. Ce résultat est facilement vérifiable.

2° Le mouvement oscillatoire d'un aimant autour de sa position d'équilibre dans un champ uniforme est un mouvement pendulaire. Il y a isochronisme des petites oscillations. L'expérience est facile à réaliser. On suspend un barreau aimanté dans un champ uniforme ; il prend une position d'équilibre. On l'écarte légèrement de cette position et on le laisse libre. On constate, avec une montre, qu'il effectue des oscillations isochrones.

3° La période du mouvement est $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\mathfrak{M}H}}$.

Donc :

a) Si on fait osciller le *même barreau* dans deux champs magnétiques uniformes différents H_1 et H_2, nous devons avoir des périodes T_1 et T_2 telles que :

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{H_2}{H_1}}.$$

Le rapport $\frac{T_1}{T_2}$ est indépendant du barreau utilisé. C'est ce que confirme l'expérience.

b) Faisons osciller dans un champ uniforme H deux barreaux aimantés de moments d'inertie I_1 et I_2 et ayant pour moments magnétiques $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$. Soit T_1 et T_2 les durées d'oscillation. Nous avons :

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2} \times \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}}.$$

Le rapport $\frac{T_1}{T_2}$ est indépendant du champ magnétique utilisé. C'est ce que vérifie l'expérience.

En définitive, l'expérience confirme bien toutes nos hypothèses relatives aux aimants.

187. — ***Energie d'un aimant dans un champ magnétique.*** On appelle *énergie* d'un aimant placé dans un champ magnétique, le travail que l'on peut obtenir en transportant l'aimant de sa position actuelle à l'infini.

Ce travail est égal à celui qu'il faut *fournir* pour amener l'aimant de l'infini à sa position actuelle.

Supposons l'aimant constitué par deux charges ponctuelles $+ m$ et $- m$ placées aux deux points A et B (fig. 174). Le travail nécessaire pour amener la masse $+ m$ de l'infini au point A sera mV_A, en appelant V_A le potentiel en A. Le travail nécessaire pour amener la masse $- m$ de l'infini au point B sera $- mV_B$, en appelant V_B le potentiel en B. Ceci résulte de la définition même du potentiel.

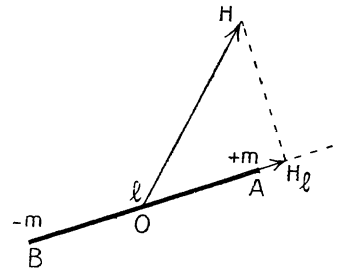


FIG. 174

Par suite, le travail total sera :

$$\mathcal{T} = m(V_A - V_B).$$

On peut dire que l'aimant placé en AB possède une énergie magnétique :

$$W = m\,(V_A - V_B).$$

D'après les propriétés du potentiel (§ 177), nous avons, comme la longueur AB de l'aimant est petite :

$$V_A - V_B = - H_l \times l,$$

H_l étant la composante du champ suivant la direction BA. D'où :

$$W = - m \times H_l \times l.$$
$$W = - ml \times H_l = - \mathfrak{M} \times H_l.$$

$\mathfrak{M}$ étant le moment magnétique de l'aimant qui, par définition, est égal à ml.

Le produit $\mathfrak{M} \times H_l$ représente le produit scalaire $\vec{\mathfrak{M}} \times \vec{H}$ des deux vecteurs $\vec{\mathfrak{M}}$ et $\vec{H}$. Finalement :

$$\boxed{W = - \vec{\mathfrak{M}} \times \vec{H}}$$

L'énergie magnétique d'un petit aimant placé dans un champ magnétique est égale, en valeur absolue, et de signe contraire au produit scalaire des deux vecteurs moment magnétique et champ magnétique.

III. — CHAMP CRÉÉ PAR UN PETIT AIMANT A GRANDE DISTANCE

*188. — **Potentiel créé par un petit aimant.*** — Calculons le potentiel en un point P du champ magnétique créé par un petit aimant NS assimilable à deux masses magnétiques ponctuelles $+ m$ et $- m$ placées en N et S. Un tel aimant s'appelle un *doublet* ou un *dipôle* (fig. 175). Nous supposerons le point P situé à une distance $OP = r$ du centre O de l'aimant telle que la longueur $NS = l$ de l'aimant soit négligeable devant r. Appelons r_1 et r_2 les distances NP et SP. Le potentiel créé par les deux masses $+ m$ et $- m$ en P est (§ 177) :

$$V = \Sigma \frac{m}{r}$$

$$V = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2} = m \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}. \qquad (1)$$

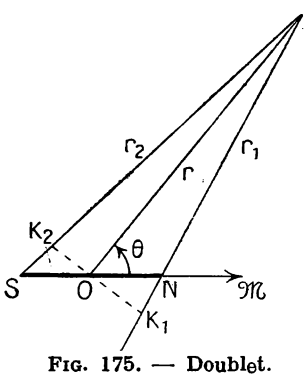


FIG. 175. — Doublet.

Menons de P un arc de cercle de rayon $PO = r$ qui coupe NP en K_1 et SP en K_2. Nous avons :

$$r_1 = r - NK_1 \qquad r_2 = r + SK_2.$$

Or r étant grand devant $SN = l$, nous pouvons considérer les triangles ONK_1 et OSK_2 comme des triangles rectangles en K_1 et K_2. Si nous appelons Θ l'angle des vecteurs $\vec{OP}$ et $\vec{SN}$, nous avons :

$$NK_1 = SK_2 = \frac{l}{2} \cos \Theta.$$

D'où : $r_2 - r_1 = SK_2 + NK_1 = l \cos \Theta$.

En portant cette valeur dans la formule (1) et en négligeant au dénominateur $\frac{l^2}{4} \cos^2 \Theta$ devant r^4 nous obtenons :

$$V = m \frac{l \cos \Theta}{r^2}.$$

Or ml est le moment magnétique $\mathfrak{M}$ de l'aimant. D'où :

$$\boxed{V = \frac{\mathfrak{M} \cos \Theta}{r^2}}$$

Remarquons que l'aimant n'intervient que par son moment magnétique.

Donc, au point de vue du champ magnétique qu'il crée, un doublet est caractérisé par son moment magnétique et non par les valeurs particulières des masses magnétiques des pôles et de leur distance.

189. — ***Champ créé par un petit aimant.*** — De l'expression du potentiel en un point P éloigné d'un petit aimant, nous pouvons en déduire la valeur du champ magnétique en ce point (§ 177). D'abord, par raison de symétrie, le vecteur champ $\vec{H}$ en P est situé dans le plan NSP que nous prendrons comme plan de figure (fig. 176). Décomposons le champ $\vec{H}$ en deux composantes rectangulaires : l'une radiale H_r dirigée suivant OP, l'autre tangentielle H_t dirigée perpendiculairement à OP. Calculons les valeurs de ces deux composantes.

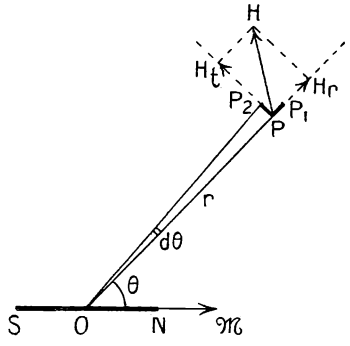


FIG. 176. — Champ d'un doublet.

1° Calculons le travail du champ dans un petit déplacement PP_1 suivant le rayon vecteur. Le travail de la composante H_t est nul puisqu'elle est normale au déplacement. Le travail de la composante radiale H_r est : $d\mathcal{C} = H_r \times PP_1 = H_r\, dr$. Ce travail est égal à la variation du potentiel changée de signe quand on passe de P en P_1.

$$d\mathcal{C} = -\,dV.$$

D'où :
$$H_r\, dr = -\,dV,$$
$$H_r = -\,\frac{dV}{dr}.$$

dV est la variation de potentiel pour un déplacement dr, Θ *restant constant.* $\frac{dV}{dr}$ est donc la dérivée partielle de V par rapport à r, Θ étant constant. Nous la représenterons par la notation habituelle $\frac{\partial V}{\partial r}$.

La composante radiale H_r est donc donnée par la formule :

$$\boxed{H_r = -\,\frac{\partial V}{\partial r}}$$

Pour un petit aimant, nous avons vu (§ 188) que : $V = \frac{\mathcal{M} \cos\Theta}{r^2}$.

Donc :
$$H = -\,\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\,\mathcal{M} \cos\Theta}{r^3}.$$

2° Calculons le travail élémentaire du champ dans un petit déplacement PP_2 normal au rayon vecteur. Le travail de H_r est nul. Le travail de H_t est $d\mathcal{C} = H_t \times PP_2$. Or PP_2 est assimilable à un arc de cercle de rayon r et d'angle au centre $d\Theta$.

$$PP_2 = r\,d\Theta \quad \text{et} \quad d\mathcal{C} = H_t \times r\,d\Theta.$$

Soit dV la variation de potentiel quand on passe de P à P_1.

$$d\mathcal{C} = -dV = H_t \times r\, d\Theta,$$

d'où :
$$H_t = -\frac{1}{r}\frac{dV}{d\Theta}.$$

dV est la variation de potentiel pour un déplacement $rd\Theta$, *r restant constant.* $\frac{dV}{d\Theta}$ est donc la dérivée partielle de V par rapport à Θ, r étant constant. Nous la représenterons par la notation habituelle $\frac{\partial V}{\partial \Theta}$.

La composante tangentielle H_t est donc donnée par la formule :

$$\boxed{H_t = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \Theta}}$$

Pour un petit aimant $V = \frac{\mathfrak{M}\cos\Theta}{r^2}$, d'où :

$$H_t = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \Theta} = \frac{\mathfrak{M}\sin\Theta}{r^3}.$$

En définitive, les composantes H_r et H_t du champ magnétique produit par un petit aimant en un point éloigné sont données par les formules :

$$H_r = \frac{2\,\mathfrak{M}\cos\Theta}{r^3} \qquad H_t = \frac{\mathfrak{M}\sin\Theta}{r^3}$$

190. — ***Positions principales de Gauss.*** — L'expression du champ se simplifie si le point P est situé soit sur la droite SN, soit sur une perpendiculaire à cette droite passant par O. On dit alors que le point P occupe une *position principale de Gauss.*

1° Première position de Gauss. — Le point P se trouve sur l'axe magnétique de l'aimant :

a) Si le point se trouve en P_1 sur le prolongement de SN (fig. 177), $\Theta = 0$ et les formules générales deviennent :

$$H_r = \frac{2\,\mathfrak{M}}{r^3} \qquad H_t = 0.$$

Le champ H se réduit à sa composante radiale. Il est dirigé suivant l'axe magnétique de l'aimant, *dans le sens SN*, et a pour intensité $H = \frac{2\,\mathfrak{M}}{r^3}$.

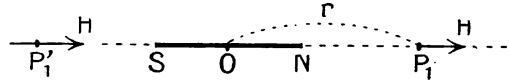


Fig. 177. — Première position de Gauss.

b) Si le point se trouve en P'_1 sur le prolongement de NS (fig. 177), $\Theta = \pi$ et les formules générales deviennent :

$$H_r = -\frac{2\,\mathfrak{M}}{r^3} \qquad H_t = 0$$

Le champ H se réduit à sa composante radiale H_r. Il est dirigé suivant l'axe magnétique de l'aimant, *dans le sens SN*, et a pour intensité $H = \frac{2\mathfrak{M}}{r^3}$.

Donc *quand le point P occupe la première position principale de Gauss et est situé à une distance* r *du centre de l'aimant, grande par rapport à la longueur de l'aimant, le champ H créé par l'aimant en P est dirigé suivant l'axe magnétique de l'aimant, dans le sens SN, et a pour intensité*

$$\boxed{H = \frac{2\mathfrak{M}}{r^3}}$$

REMARQUE. — La formule précédente n'est valable que si P est éloigné. Voyons, en établissant la formule rigoureuse, quelle approximation elle permet d'obtenir quand on s'approche de l'aimant.

Appelons $2a$ la longueur de l'aimant et r la distance OP (fig. 178). D'après la loi de Coulomb, le champ créé en P est égal à :

$$H = \frac{m}{\overline{NP}^2} - \frac{m}{\overline{SP}^2}$$

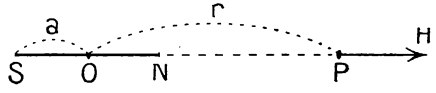


FIG. 178

$$H = \frac{m}{(r-a)^2} - \frac{m}{(r+a)^2} = \frac{4arm}{(r^2-a^2)^2}.$$

Or $2a \times m$ représente le moment magnétique $\mathfrak{M}$ de l'aimant.

D'où $$H = \frac{2\mathfrak{M}r}{(r^2-a^2)^2}$$

Si a est négligeable devant r, nous avons bien $H = \frac{2\mathfrak{M}}{r^3}$. Dans le cas général,

$$H = \frac{2\mathfrak{M}}{r^3} \times \frac{1}{\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)^2}.$$

En négligeant le second facteur, nous commettons une erreur relative : $\frac{\Delta H}{H} = \frac{2a^2}{r^2}$. Elle est de l'ordre de $\frac{1}{200}$ lorsque $r^2 = 400\,a^2$, c'est-à-dire $r = 20\,a = 10 \times 2\,a$. Ceci correspond à un point P situé à une distance égale à 10 longueurs d'aimant.

2° DEUXIÈME POSITION DE GAUSS. — Le point P se trouve sur une perpendiculaire à SN en son milieu O.

Si P est en P_2 (fig. 179), $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $H_r = 0$, $H_t = \frac{\mathfrak{M}}{r^3}$

si P est en P'_2, $\Theta = \frac{3\pi}{2}$, $H_r = 0$ et $H_t = -\frac{\mathfrak{M}}{r^3}$.

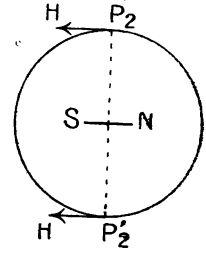


FIG. 179

Dans les deux cas, le champ se réduit à sa composante tangentielle. *Il est donc parallèle à l'axe magnétique de l'aimant, dirigé dans les deux cas en sens inverse de SN, et a pour intensité* :

$$\boxed{H = \frac{\mathfrak{M}}{r^2}}$$

REMARQUE. — La formule précédente n'est valable que si le point P est éloigné. Voyons encore quelle approximation elle permet d'obtenir quand on s'approche de l'aimant. Appelons $2a$ la longueur de l'aimant. La masse $+m$ placée au pôle Nord N produit un champ $\vec{H}'_2$ ayant comme direction et sens NP_2 et comme intensité $H'_2 = \frac{m}{a^2 + r^2}$.

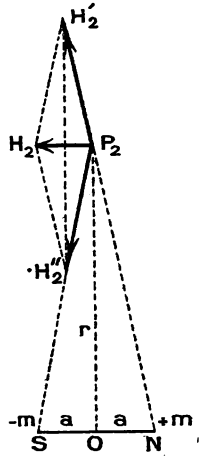


FIG. 180

Au même point P_2, la masse $-m$ placée en S produit un champ $\vec{H}''_2$ ayant pour direction et sens P_2S et pour intensité $H''_2 = \frac{m}{a^2 + r^2} = H'_2$ (fig. 180).

Composons ces deux champs. Le parallélogramme des vecteurs est un losange. Le champ résultant $\vec{H}_2$ est parallèle à l'aimant et a pour sens $\vec{NS}$. Calculons sa valeur. Les triangles semblables $H'_2H_2P_2$ et P_2SN donnent :

$$\frac{H_2}{2a} = \frac{H'_2}{\sqrt{r^2 + a^2}} = \frac{m}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

d'où :

$$H_2 = \frac{2am}{(r^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mathfrak{M}}{(r^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Si a est négligeable devant r, nous avons bien $H_2 = \frac{\mathfrak{M}}{r^2}$.

Dans le cas général, la formule peut s'écrire :

$$H_2 = \frac{\mathfrak{M}}{r^2} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^{3/2}}$$

En négligeant le second facteur, nous commettons une erreur relative :

$$\frac{\Delta H_2}{H_2} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^{3/2}} = \frac{3}{2}\frac{a^2}{r^2}.$$

Elle est de l'ordre de $\frac{1}{200}$ lorsque $\frac{3}{2}\frac{a^2}{r^2} = \frac{1}{200}$, $r^2 = 300a^2$ d'où $r = 17{,}3\ a$, soit $r = 8{,}6 \times 2\ a$. Ceci correspond à un point P situé à une distance égale à environ 9 longueurs d'aimant.

En résumé, le champ dans les positions de Gauss est donné par les formules :

$$H = 2\frac{\mathfrak{M}}{r^3} \text{ pour la première position.}$$

$$H = \frac{\mathfrak{M}}{r^3} \text{ pour la seconde position.}$$

Ces formules nous donnent le champ avec une erreur inférieure à $\frac{1}{200}$ si le point est à une distance de l'aimant supérieure à 10 longueurs d'aimant.

191. — Vérification expérimentale de la loi de l'inverse carré de la distance. — L'expression $V = \Sigma \frac{m}{r}$, déduite de la loi de l'inverse carré de la distance, et appliquée à un petit aimant, nous a conduit finalement à une conséquence importante : étant donné deux points P_1 et P_2

situés l'un sur l'axe NS d'un aimant rectiligne, l'autre dans le plan perpendiculaire à NS en son milieu, à une même distance r du centre, supposée très grande par rapport à la longueur $2a$ de l'aimant, le champ créé par l'aimant a une intensité *deux fois* plus grande en P_1 qu'en P_2.

Réciproquement, si l'intensité du champ est deux fois plus grande en P_1 qu'en P_2, le champ d'une masse magnétique ponctuelle varie *nécessairement* en raison inverse du carré de la distance.

Il suffit, pour le démontrer, de partir d'une loi quelconque pour ce dernier champ et de refaire les calculs des paragraphes 188 et suivants.

Soit donc :

$$H = mf(r)$$

une loi quelconque pour la variation du champ d'une masse ponctuelle m avec la distance r. La formule : $H = -\frac{dV}{dr}$ donne la loi de variation du potentiel avec la distance :

$$V = -m\int f(r)dr = -m\varphi(r).$$

en posant :

$$\varphi(r) = \int f(r)dr.$$

Reprenons le calcul du paragraphe 188 relatif au potentiel V créé par le doublet au point P. Nous avons, avec les notations de ce paragraphe :

$$V = -m[\varphi(r_1) - \varphi(r_2)] = m[\varphi(r_2) - \varphi(r_1)].$$

Or, si nous supposons que $r_1 - r_2$ est très petit vis-à-vis de la distance $r = OP$, nous pouvons écrire d'après le théorème des accroissements finis :

$$\frac{\varphi(r_2) - \varphi(r_1)}{r_2 - r_1} = \varphi'(r) = f(r),$$

en appelant r une valeur moyenne entre r_1 et r_2.

Donc : $$\varphi(r_2) - \varphi(r_1) = (r_2 - r_1) f(r)$$

et $$V = m(r_2 - r_1)f(r),$$

ou encore comme : $$r_2 - r_1 = 2a\cos\Theta$$

$$V = 2amf(r)\cos\Theta = \mathfrak{M}f(r)\cos\Theta.$$

Les formules du paragraphe 189 qui donnaient les composantes du champ au point P, suivant OP et suivant la direction perpendiculaire, deviennent alors :

$$H_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\mathfrak{M}f'(r)\cos\Theta,$$

$$H_t = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\Theta} = \mathfrak{M}\frac{f(r)}{r}\sin\Theta.$$

et par suite, les valeurs du champ pour les deux positions de Gauss P_1 et P_2 du paragraphe 190 sont :

$$H_1 = -\mathfrak{M}f'(r),$$

$$H_2 = \mathfrak{M}\frac{f(r)}{r}.$$

Donc la condition : $H_1 = 2H_2$, entraîne :

$$-f'(r) = \frac{2f(r)}{r}$$

ou :

$$\frac{f'(r)dr}{f(r)} = -\frac{2dr}{r}$$

et en intégrant :

$$\text{Log } f(r) = -2 \text{ Log } r + \text{Log C}$$

ou :

$$f(r) = \frac{C}{r^2}.$$

Or, nous étudierons au paragraphe 205 des méthodes de mesure du rapport $\frac{H_1}{H_2}$ des intensités de deux champs magnétiques. Ces méthodes appliquées à la détermination du rapport des intensités en P_1 et P_2, montrent que $\frac{H_1}{H_2} = 2$; donc *la loi de variation du champ d'une masse magnétique ponctuelle avec la distance est bien la loi de l'inverse carré.*

Gauss a ainsi vérifié la loi de Coulomb avec une précision de 1/1000 bien meilleure que celle des expériences directes de Coulomb lui-même.

Exercices.

47. Un aimant horizontal est suspendu par son centre de gravité à un fil de torsion de constante C = 50 C. G. S. L'ensemble est placé dans un champ magnétique horizontal H = 0,2 gauss. On s'arrange pour que, le fil étant sans torsion, l'aimant ait la direction du champ. On fait subir à la partie supérieure du fil une torsion $\beta = 225°$. L'aimant prend une direction d'équilibre faisant un angle α avec le champ. Calculer α et discuter la stabilité.

Moment magnétique de l'aimant : $\mathcal{M} = 1000$ C. G. S.

48. Un aimant NS est fixé horizontalement dans un champ magnétique uniforme H = 0,2 gauss. On déplace une petite boussole le long de la ligne NS prolongée, en s'éloignant de l'aimant. On constate que l'aiguille de la boussole se retourne brusquement lorsqu'elle passe à 60 cm du milieu de l'aimant. Calculer le moment magnétique de l'aimant. — L'aimant a pour longueur 8 cm ; est-il légitime de faire le calcul précédent en assimilant l'aimant NS à un aimant infiniment court ? Le champ H est connu à 1 ou 2 pour cent près.

Réponse : $\mathcal{M} = 21\,600$ C. G. S. (*Normale Supérieure*, 1913-1°)

49. Un aimant de moment magnétique $\mathcal{M}$, mobile autour d'un axe vertical Δ, tourne autour de cet axe avec une vitesse angulaire constante ω. Cet aimant est situé dans un champ magnétique horizontal constant H dont la direction tourne autour de Δ avec une vitesse angulaire constante ω_0. A l'instant zéro, l'aimant et le champ H sont perpendiculaires. Calculer le moment du couple qui s'exerce sur l'aimant à un instant quelconque t. Pour quelle valeur de ω la moyenne de ce couple est-elle différente de zéro ?

Réponse : $\mu = \mathcal{M}\, H \cos(\omega_0 - \omega)\, t$; $\omega = \omega_0$.

50. Deux aimants A_1 et A_2 fixés parallèlement sont suspendus horizontalement à un fil sans torsion. Placés dans un champ magnétique horizontal H = 0,8 gauss, la durée d'oscillation du système est 1,5 s. On retourne A_2 bout pour bout, la durée d'oscillation devient 2,5 secondes. Enfin, on croise A_1 et A_2 à angle droit. Position d'équilibre du système ? Quelle est sa nouvelle durée d'oscillation ?

CHAPITRE XXII

MAGNÉTISME TERRESTRE

*192. — **Déclinaison et inclinaison magnétiques.*** — Une aiguille aimantée placée au voisinage de la terre subit une action directrice ; elle s'oriente d'une façon déterminée. Elle est donc soumise à un champ magnétique que l'on appelle le *champ magnétique terrestre.*

En chaque point de l'espace, le champ magnétique terrestre est représenté par un vecteur. Ce vecteur est complètement défini si l'on se fixe trois paramètres : par exemple les coordonnées x y z de son extrémité ou bien sa grandeur et les deux paramètres u et v de sa direction. Les trois grandeurs adoptées pour déterminer le champ terrestre sont :

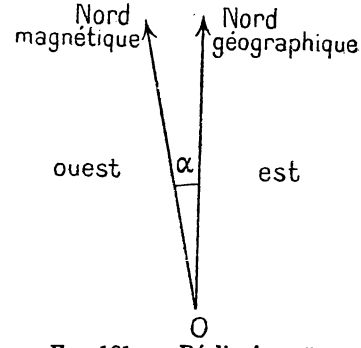


FIG. 181. — Déclinaison α

1° L'angle du plan vertical contenant le vecteur champ avec un plan vertical origine. On a pris comme plan vertical origine celui qui passe par le Nord géographique, c'est-à-dire par la ligne des pôles. Ce plan s'appelle le *plan du méridien géographique* du lieu. L'autre plan vertical qui contient le champ s'appelle *plan du méridien magnétique.* L'angle α de ces deux plans verticaux s'appelle la **déclinaison magnétique** au point considéré (fig. 181).

La déclinaison est dite orientale ou occidentale suivant que le pôle nord de l'aiguille aimantée est à l'est ou à l'ouest du méridien géographique passant par le centre de gravité de l'aiguille.

Actuellement, à Paris, le pôle nord magnétique et le pôle nord géographique ont la disposition indiquée sur la figure 181. La déclinaison est donc occidentale, elle vaut environ 9°.

2° L'angle du vecteur champ avec le plan horizontal du lieu. Cet angle I s'appelle l'**inclinaison magnétique** au point considéré. Il est positif lorsque l'extrémité nord de l'aiguille aimantée pointe vers la terre, il est négatif dans le cas contraire. Actuellement, à Paris, l'inclinaison est positive et vaut environ 60°.

3° La valeur de la projection H_0 du vecteur champ H sur le plan horizontal du lieu. C'est la **composante horizontale du champ terrestre.**

En résumé, le champ terrestre est complètement défini en un point si

l'on connaît la déclinaison α, l'inclinaison I et la composante horizontale du champ terrestre H_0.

*193. — **Equilibre, sous l'action du champ magnétique terrestre, d'une aiguille aimantée assujettie à certaines liaisons mécaniques.*** — Dans les appareils de mesure de la déclinaison et de l'inclinaison, nous emploierons une aiguille aimantée qui sera, tantôt suspendue par un de ses points, tantôt mobile autour d'un axe horizontal passant par son centre de gravité. Nous allons établir des relations concernant l'équilibre d'une telle aiguille, relations qui seront utilisées dans les paragraphes suivants :

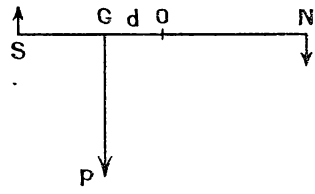


FIG. 182

1° AIGUILLE AIMANTÉE SUSPENDUE PAR UN DE SES POINTS. — Considérons une aiguille aimantée NS (fig. 182) de moment magnétique $\mathfrak{M}$ soumise au champ magnétique terrestre et au champ de pesanteur. Supposons-la homogène et de forme géométrique régulière. Le centre de figure O est alors confondu avec le centre de gravité. Si nous suspendons l'aiguille par ce point, elle s'oriente sous la seule action du champ magnétique, donc dans le plan du méridien magnétique. Mais si nous surchargeons convenablement une de ses extrémités, nous pouvons lui faire prendre une position d'équilibre *horizontale*. Cherchons quelle doit être la distance d du nouveau centre de gravité G au point de suspension O pour qu'il en soit ainsi.

Pour plus de généralité, supposons l'aiguille dans un azimut quelconque faisant l'angle α avec le méridien magnétique du lieu.

Le champ de pesanteur exerce sur l'aiguille une force p appliquée au point G, et dont le moment par rapport à l'axe O, perpendiculaire au plan de la figure, a pour expression pd. La composante verticale Z du champ magnétique terrestre, *seule efficace*, exerce un couple dont le moment est $\mathfrak{M}Z$. Les conditions d'équilibre de l'aiguille dans cette position sont telles que : 1° son poids p et le couple magnétique tendent à la faire tourner autour de O dans des sens opposés; 2° les moments pd et $\mathfrak{M}Z$ soient égaux :

$$pd = \mathfrak{M}Z.$$

Telle est la relation qui détermine d ; nous voyons qu'elle est indépendante de α. Donc si le centre de gravité est réglé de manière que l'aiguille soit horizontale dans un certain azimut, elle reste horizontale dans tous les autres azimuts.

On réalise ainsi ce qu'on appelle une *aiguille de déclinaison*.

2° AIGUILLE MOBILE AUTOUR D'UN AXE HORIZONTAL PASSANT PAR SON CENTRE DE GRAVITÉ. — Prenons trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz (fig. 183) tels que Oz soit vertical et que Oy soit l'axe de rotation de l'aiguille ; celle-ci est alors assujettie à rester dans le plan xOz.

Soit OT le vecteur champ magnétique terrestre, X, Y, Z ses projections sur les trois axes de coordonnées, H_0 sa projection sur le plan horizontal xOy. L'angle TOH_0 est, par définition, l'inclinaison magnétique I du lieu, et le plan H_0Oz est le méridien magnétique qui fait avec le plan xOz un angle α.

L'aiguille se met en équilibre sous les seules actions des composantes X et Z, à l'exclusion de la composante Y qui ne pourrait que sortir l'aiguille du plan xOz. Elle se dispose donc suivant OA qui fait avec Ox un angle I′ appelé *inclinaison apparente.*

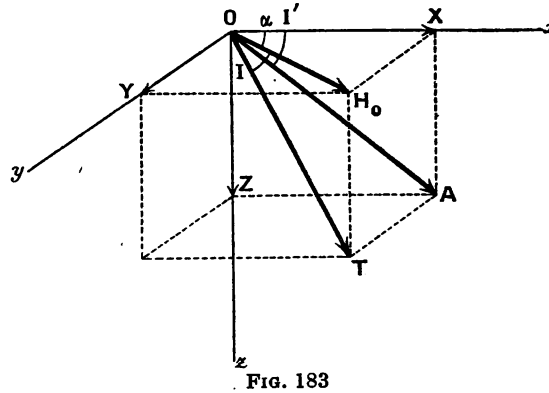


FIG. 183

Etablissons une relation entre les angles I, I′ et α.

On voit sans peine sur la figure que :

$$\text{cotg } I = \frac{H_0}{Z} \qquad \text{et} \qquad \text{cotg } I' = \frac{X}{Z}.$$

Or : $X = H_0 \cos \alpha$. Donc :

$$\text{cotg } I' = \text{cotg } I. \cos \alpha.$$

Nous verrons au paragraphe 196 des applications de cette formule (*formule des cotangentes*) à la mesure de l'inclinaison.

194. — ***Boussole de déclinaison.*** — Pour les mesures de la déclinaison et de l'inclinaison magnétiques d'un lieu, nous donnerons seulement une description schématique des appareils et le principe des méthodes de mesure, sans insister sur les corrections que nécessiteraient des déterminations précises.

La boussole de déclinaison est un appareil destiné à la mesure de la déclinaison magnétique d'un lieu. La figure 184 représente un des meilleurs dispositifs qui aient été construits ; la figure 185 en est une reproduction schématique.

Toute boussole de déclinaison se compose essentiellement de deux parties, dont l'une permet de déterminer le méridien géographique et l'autre le méridien magnétique.

1° DÉTERMINATION DU MÉRIDIEN GÉOGRAPHIQUE. — La partie qui est destinée à la détermination du méridien géographique est un *théodolite.*

Rappelons qu'il comprend ;

α) un cercle horizontal gradué A (*cercle azimutal*) ;

β) un cercle gradué vertical D porté par un support mobile autour d'un axe vertical xy passant au centre du cercle A ;

γ) Une lunette FF′ qui peut tourner autour d'un axe $x'y'$ perpendiculaire au plan du cercle D en son centre ; l'axe optique de la lunette peut ainsi décrire un plan parallèle à celui du cercle.

La graduation du cercle A sert à la mesure de l'angle de rotation du cercle D, et la graduation de celui-ci sert à la mesure de l'angle de rotation de la lunette.

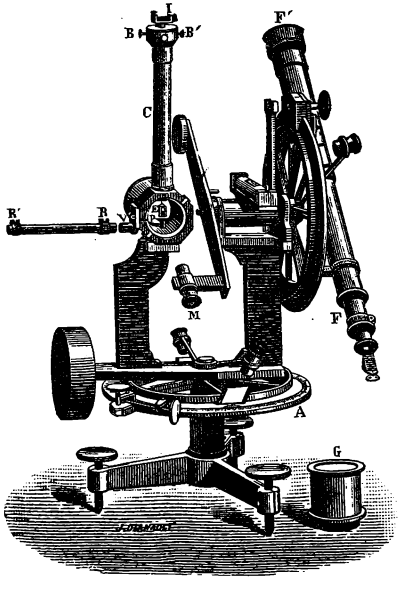


FIG. 184. — Boussole de déclinaison.

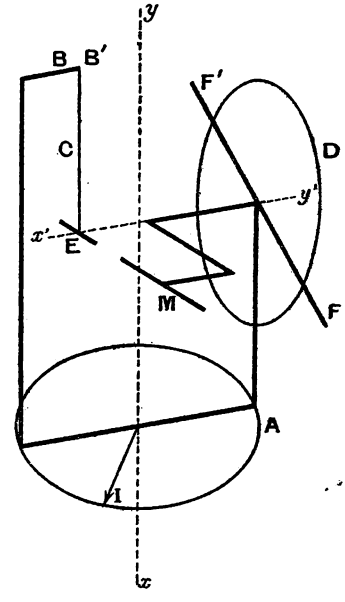


FIG. 185

Des vis calantes et un niveau à bulle permettent de régler l'horizontalité du cercle A.

Pour déterminer le méridien géographique, ou, ce qui revient au même, le méridien astronomique, on peut utiliser diverses méthodes. Rappelons par exemple la suivante : elle est basée sur le fait que, dans deux positions symétriques par rapport au plan du méridien géographique, une étoile est à la même hauteur au-dessus de l'horizon.

On vise donc une étoile avec la lunette une première fois avant son passage au méridien et on repère sur le cercle A la division n située en regard d'un index I lié au support de la lunette. Puis, *sans changer l'inclinaison de la lunette*, on vise une seconde fois la même étoile après son passage au méridien, par simple rotation du support de la lunette autour de l'axe vertical xy. On lit la nouvelle division n' située en regard de l'index I. En amenant ensuite cet index sur la division : $N = \frac{n + n'}{2}$, on place l'axe de la lunette dans le plan du méridien astronomique.

Lorsqu'on opère dans un observatoire fixe, on peut faire cette détermination une fois pour toutes et établir *à grande distance* une mire portant un fil fin vertical *f* qui se trouve dans le plan de visée de la lunette lorsque l'axe de celle-ci est dans le méridien astronomique. Dans toute mesure ultérieure de la déclinaison, même si la boussole a été déplacée, il suffit alors, pour repérer le méridien astronomique, de lire sur le cercle A la position de l'index I lorsque la lunette vise le fil *f*.

2° Détermination du méridien magnétique. — A l'intérieur d'un logement cylindrique horizontal fermé à ses deux bouts par des lames de verre, est suspendu, par son centre, un barreau aimanté parallélépipédique E, surchargé à une extrémité de manière à rester horizontal (§ 193, 1°), et dont nous supposons l'axe magnétique confondu avec l'axe géométrique. Ce barreau est suspendu à un fil vertical passant dans le tube C et fixé au petit treuil BB'. Le support de tout cet ensemble est solidaire de la partie mobile du théodolite, et la suspension du barreau est réglée de manière que le centre de celui-ci soit sur l'axe $x'y'$.

D'autre part, un viseur M porté par le théodolite est mobile, comme la lunette, autour de l'axe $x'y'$. L'axe optique de ce viseur peut ainsi décrire un plan parallèle à l'axe optique de la lunette, sans cesser de passer par le centre du barreau aimanté.

Lorsqu'on fait tourner tout le système mobile autour de l'axe vertical xy, on trouve une position pour laquelle l'axe du barreau aimanté est dans le même plan vertical que l'axe du viseur M. On reconnaît qu'il en est ainsi à ce qu'on peut alors viser successivement, par rotation de M autour de $x'y'$, deux traits très fins t et t' (fig. 186) tracés chacun sur un des bouts du barreau dans le plan vertical de son axe.

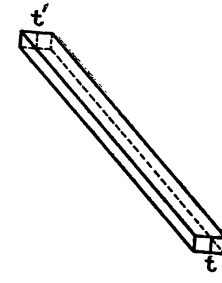


Fig. 186

L'appareil est réglé de manière que, dans cette position du barreau, son fil de suspension ait une torsion nulle et par suite son axe magnétique soit dans le plan du méridien magnétique. On vérifie que cette condition est satisfaite en remplaçant le barreau aimanté par un barreau de cuivre de mêmes dimensions portant aussi un trait sur chaque face terminale, et s'assurant à l'aide du viseur que la position d'équilibre est restée la même.

Dans ces conditions, l'axe du viseur, et par suite aussi l'axe de la lunette qui est dans un plan vertical parallèle, se trouve dans le plan du méridien magnétique. L'index I se trouve alors sur la division N' du cercle A.

La différence des lectures N et N' mesure la déclinaison.

195. — ***Boussole d'inclinaison.*** — La boussole d'inclinaison destinée, comme son nom l'indique, à la mesure de l'inclinaison magnétique d'un lieu, se compose essentiellement d'une aiguille aimantée mobile autour d'un axe horizontal passant par son centre de gravité. L'aiguille peut ainsi dé-

crire un plan vertical parallèle à celui d'un limbe gradué *ll'* (fig. 187) solidaire du support de cette aiguille.

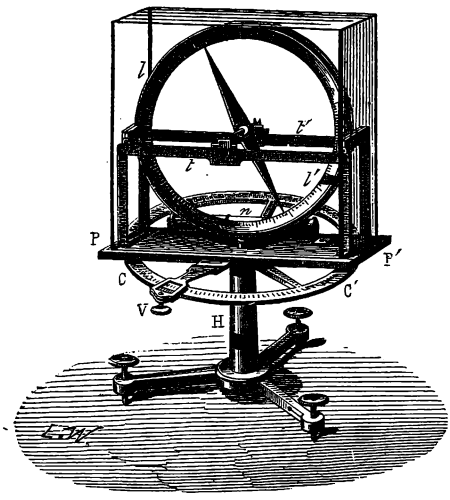


FIG. 187. — Boussole d'inclinaison.

Tout l'ensemble est mobile autour d'un axe vertical passant au centre d'un cercle horizontal gradué CC', et entraîne une alidade munie d'un vernier V qui permet de mesurer l'angle de rotation.

196. — ***Principes des méthodes de mesure de l'inclinaison.*** — Nous indiquerons (§ 254) une méthode de mesure de l'inclinaison I basée sur les lois de l'induction. Les principes d'un certain nombre d'autres méthodes, les seules que nous étudierons dans le présent paragraphe, se déduisent de la *formule des cotangentes* établie au paragraphe 193.

PREMIÈRE MÉTHODE. — Dans la formule : cotg I' = cotg I. cos α, faisons $\alpha = 0$; cos α est alors maximum et égal à 1 ; par suite cotg I' est aussi maximum, et l'inclinaison apparente I' est alors minimum et égale à l'inclinaison I cherchée.

D'où la méthode suivante : nous faisons tourner l'équipage mobile de la boussole d'inclinaison autour de son axe vertical jusqu'à ce que l'aiguille fasse le plus petit angle avec le diamètre horizontal du limbe *ll'* ; cet angle est l'inclinaison I.

SECONDE MÉTHODE. — Faisons, dans la formule des cotangentes, $\alpha = \frac{\pi}{2}$; nous avons : cos $\alpha = 0$, donc cotg I' = 0 et $I' = \frac{\pi}{2}$. Ainsi lorsque le limbe *ll'* de la boussole d'inclinaison est orienté dans un azimut perpendiculaire au méridien magnétique, l'aiguille aimantée se tient verticale.

Ce résultat nous suggère une seconde méthode de mesure de I. Nous plaçons l'équipage mobile de la boussole d'inclinaison dans l'azimut pour lequel l'aiguille prend une position d'équilibre verticale et nous lisons la position correspondante du zéro du vernier V sur la graduation du cercle horizontal. Nous faisons ensuite tourner le système mobile d'un angle égal à $\frac{\pi}{2}$ évalué d'après le déplacement du vernier. Le limbe est alors dans le méridien magnétique et l'inclinaison de l'aiguille est égale à I.

TROISIÈME MÉTHODE. — Après avoir lu l'inclinaison I' de l'aiguille pour une première orientation du limbe faisant avec le méridien magnétique un angle quelconque α, faisons tourner l'équipage mobile de la boussole d'un angle $\frac{\pi}{2}$ (repéré à l'aide du vernier V) et lisons la nouvelle inclinaison I'' de

l'aiguille ; le limbe fait alors avec le méridien magnétique un angle égal à $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ et par suite nous avons :

$$\text{cotg } I' = \text{cotg } I \cos \alpha,$$

et :

$$\text{cotg } I'' = \pm \text{cotg } I \sin \alpha,$$

d'où nous déduisons :

$$\boxed{\text{cotg}^2 I' + \text{cotg}^2 I'' = \text{cotg}^2 I}$$

relation qui permet de calculer I si nous avons mesuré I' et I''.

C'est la méthode la plus employée.

197. — ***Composante horizontale du champ magnétique terrestre.*** — Elle se détermine par les méthodes habituelles de mesure des champs magnétiques qui seront indiquées au chapitre XXIII et qui permettent d'obtenir H_o avec une précision de l'ordre de $\frac{1}{10000}$. A Paris, la composante horizontale H_o vaut environ 0,2 gauss.

La connaissance de I et H_o permet de calculer l'intensité H du champ terrestre. Nous avons :

$$H = \frac{H_o}{\cos I}.$$

198. — ***Résultats.*** — La déclinaison α, l'inclinaison I et la composante horizontale H_o varient avec le temps et avec le lieu.

1° VARIATIONS DE LA DÉCLINAISON. — La déclinaison *en un lieu donné* n'est pas constante. Elle varie d'un moment à l'autre. Ces variations avec le temps sont de trois sortes :

a) Les *variations diurnes*, c'est-à-dire les variations subies par la déclinaison au cours d'une journée. En 24 heures la déclinaison présente deux maxima et deux minima comme les marées. L'amplitude des variations de part et d'autre de la valeur moyenne peut atteindre 15 ou 20 minutes, mais dépasse rarement 10 minutes. Cette amplitude est maximum en juin où elle atteint 8 minutes et minimum en janvier où elle est de 3 minutes environ. La figure 188 donne les variations de la déclinaison pour un jour de juin et de janvier 1938. La valeur moyenne de la déclinaison est prise aux environs de 10 h et de 18 h.

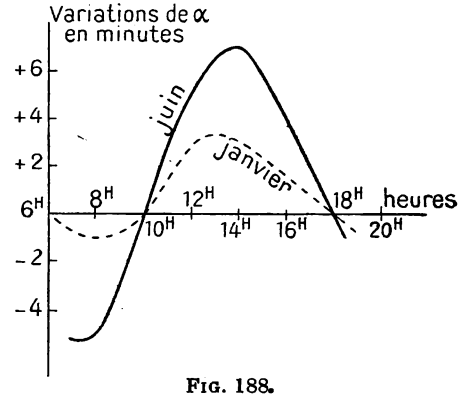


FIG. 188.
Variations diurnes de la déclinaison.

b) Les *variations annuelles*, c'est-à-dire les variations subies par la moyenne journalière au cours d'une année.

En Europe, l'aiguille de déclinaison marche vers l'est de l'équinoxe de printemps au solstice d'été puis rétrograde lentement.

c) *Les variations séculaires*, c'est-à-dire les variations subies par la déclinaison, par exemple au 1er janvier, au cours d'un siècle. Ces variations sont sensiblement périodiques, la période étant de 730 ans. En 1600 la déclinaison à Paris était orientale, elle devenait nulle en 1666. En 1800 elle était occidentale et atteignait son maximum en 1814. Sa valeur était alors de 22°34'. Depuis cette époque elle décroît et au 1er janvier 1938 elle valait à Paris 9°21'. Actuellement elle diminue de 9 à 10 minutes par an.

En plus des variations régulières que nous venons de citer, il se produit parfois des variations brusques qui affectent des espaces immenses. On dit qu'il se produit un *orage magnétique*. Souvent l'orage magnétique accompagne une aurore polaire.

La déclinaison *à un instant donné* varie d'un endroit à l'autre. Le 1er janvier 1938 elle valait 6°50' à Nice et 12°25' à Brest. Pour représenter ces variations avec le lieu, on trace sur une carte les lignes réunissant tous les points d'égale déclinaison. Ces lignes appelées **isogones** passent par deux points pour lesquels l'inclinaison vaut 90° et la déclinaison est indéterminée. Ces deux points s'appellent les *pôles magnétiques*. Les isogones au 1er janvier 1938, pour la France, sont représentés en tirets sur la figure 189. Elles ont approximativement la direction générale Sud, Sud-Ouest au Nord, Nord-Est. Elles présentent une anomalie dans la région située entre Bourges et Auxerre.

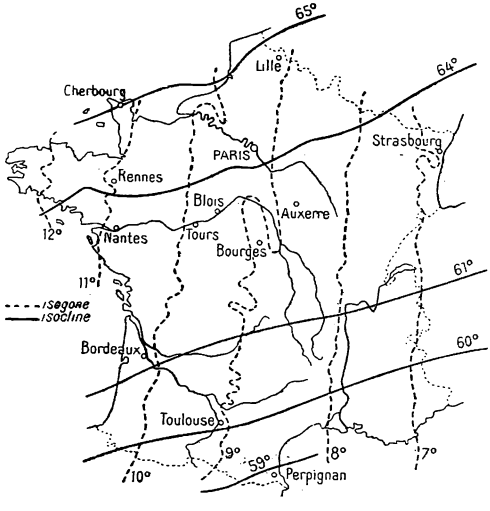


FIG. 189. Carte magnétique au 1er janvier 1938.

2° VARIATIONS DE L'INCLINAISON. — Comme la déclinaison, l'inclinaison varie avec le temps et avec le lieu.

Avec le temps, en un lieu donné, l'inclinaison subit des variations régulières de trois sortes : diurnes, annuelles et séculaires. En 1666, elle valait 75° à Paris. Depuis cette époque, elle diminue d'environ 2' par an. Elle vaut actuellement à Paris un peu plus de 64°.

L'inclinaison, à un instant donné, varie avec le lieu. Le 1er janvier 1938, elle valait environ 59° à Perpignan et environ 65° à Dunkerque. Pour représenter ces variations, on trace sur une carte les lignes réunissant tous les points d'égale inclinaison. Ces lignes s'appellent des **isoclines**. Celle qui correspond à une inclinaison nulle est l'équateur magnétique qui s'éloigne assez peu de l'équateur géographique. L'allure générale des isoclines pour la France est représentée en traits pleins sur la figure 189.

3° VARIATIONS DE LA COMPOSANTE HORIZONTALE H_0. La composante horizontale H_0 du champ terrestre varie aussi avec le temps et avec le lieu. Actuellement H_0 varie peu avec le temps, elle diminue de 9.10^{-5} gauss par an. Les variations avec le lieu se traduisent sur la carte par des *lignes d'égale composante horizontale* qui sont sensiblement parallèles aux isoclines. H_0 varie en France de 0,225 gauss à Perpignan à 0,190 gauss à Lille.

Exercices.

51. Un aimant permanent, mobile autour d'un axe horizontal dont la direction fait l'angle φ avec le plan du méridien magnétique, est soumis à l'action du champ magnétique terrestre d'intensité F et d'inclinaison I. En même temps, il est soumis à l'action de son poids P. Le centre de gravité est à une distance a de l'axe de suspension dans une direction faisant l'angle α avec le plan passant par cet axe et par la direction du moment magnétique $\mathfrak{M}$ de l'aimant.

En désignant par i l'angle que fait ce dernier plan avec l'horizon et par μ la projection du moment magnétique de l'aimant sur un plan perpendiculaire à l'axe de suspension, écrire l'équation d'équilibre de l'aimant et en déduire la valeur de tg i qui correspond à l'équilibre. A quelle condition l'angle d'équilibre i est-il invariable quand on fait varier φ ?

Réponse : $\operatorname{tg} i = \dfrac{\mu\ F \sin I + Pa \cos \alpha}{Pa \sin \alpha + \mu\ F \cos I \sin \varphi}$

i est indépendant de φ si $I = \dfrac{\pi}{2}$ ou si le barreau est horizontal ($i = 0$).

(*Ecole Navale*, 1921.)

52. Une aiguille aimantée, mobile autour d'un axe horizontal passant par son centre de gravité, est rendue horizontale grâce à une surcharge de 6 milligrammes appliquée au pôle Sud. Calculer la masse magnétique de chaque pôle. La composante horizontale du champ terrestre est égale à 0,2 gauss et l'inclinaison $I = 60°$.

53. La mesure de l'inclinaison apparente dans deux plans rectangulaires a donné les résultats suivants : $I_1 = 76°5$, $I_2 = 67°5$. Calculer l'inclinaison vraie I en ce lieu. Les inclinaisons apparentes étant mesurées à 0°5 près, calculer l'incertitude sur I.

CHAPITRE XXIII

MESURES MAGNÉTIQUES

*199. — **Principe des méthodes de mesure.*** — Nous étudierons dans ce chapitre les mesures des moments magnétiques $\mathfrak{M}$ des aimants et des intensités H des champs magnétiques. Ces deux mesures sont basées sur la même méthode qui se ramène à la détermination du produit $\mathfrak{M}H$ et du quotient $\frac{\mathfrak{M}}{H}$.

Si nous déterminons les quantités $A = \mathfrak{M}H$ et $B = \frac{\mathfrak{M}}{H}$ nous voyons que :

1° Nous pouvons en déduire immédiatement $\mathfrak{M}$ et H car :

$$\mathfrak{M} = \sqrt{A \times B}, \qquad H = \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

2° Nous pouvons faire des mesures relatives, soit de deux moments magnétiques car :

$$\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_2} = \frac{\mathfrak{M}_1 H}{\mathfrak{M}_2 H} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_2} = \frac{\mathfrak{M}_1}{H} : \frac{\mathfrak{M}_2}{H},$$

soit de deux champs magnétiques, car nous avons de même :

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\mathfrak{M}H_1}{\mathfrak{M}H_2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{H_1}{H_2} = \frac{\mathfrak{M}}{H_2} : \frac{\mathfrak{M}}{H_1}.$$

*200. — **Mesure de** $\mathfrak{M}H$.* — La mesure de $\mathfrak{M}H$ se fait par deux méthodes principales : une méthode statique appelée *méthode de torsion* et une méthode dynamique appelée *méthode des oscillations.*

1° MÉTHODE DE TORSION. — Suspendons l'aimant de moment magnétique $\mathfrak{M}$ horizontalement dans le champ magnétique horizontal H. Le fil de suspension est un fil de torsion ayant pour constante de torsion C, c'est-à-dire que, pour une torsion Θ du fil, le couple de rappel a pour moment $C\Theta$. Ce fil est muni à sa partie supérieure d'un micromètre de torsion analogue à celui de la balance de Coulomb (§ 38).

Tournons ce micromètre de façon que l'aimant soit en équilibre dans la direction du champ pour une torsion nulle. Nous reconnaissons qu'il en est ainsi à ce que, en remplaçant l'aimant par un barreau de cuivre, la position d'équilibre est inchangée.

L'aimant étant remis en place, tordons le fil à sa partie supérieure d'un angle β tel que l'aimant, dans sa position d'équilibre, soit perpendiculaire au champ H (fig. 190). La torsion du fil est alors $\beta - \frac{\pi}{2}$. Le couple magnétique agissant sur l'aimant a pour moment $\mathfrak{M}H$ et le moment du couple de torsion est $C\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)$. Comme il y a équilibre, ces moments sont égaux.

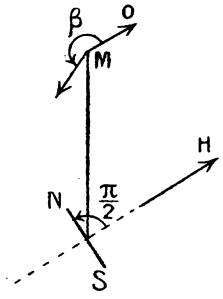


FIG. 190

$$\mathfrak{M}\,H = C\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Cette formule permet de calculer $\mathfrak{M}H$ si la constante de torsion C a été déterminée préalablement.

2° MÉTHODE DES OSCILLATIONS. — Suspendons le barreau de moment magnétique $\mathfrak{M}$ par un fil *sans torsion* de façon qu'il se tienne horizontalement dans le champ horizontal H. Le barreau s'oriente dans la direction du champ. Ecartons légèrement le barreau de sa position d'équilibre et lâchons-le. Il revient à sa position d'équilibre en effectuant des oscillations dont la période est donnée par la formule (§ 185) :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\mathfrak{M}H}} \qquad (1)$$

I étant le moment d'inertie du barreau par rapport à l'axe d'oscillation.

D'où : $$\mathfrak{M}H = \frac{4\pi^2 I}{T^2}.$$

La mesure de $\mathfrak{M}H$ se ramène donc à la détermination de la période T et du moment d'inertie I.

Pour mesurer T avec précision, il faut compter un assez grand nombre d'oscillations. Pour cela, à cause de l'amortissement inévitable des oscillations, il faut partir d'un angle d'écart Θ_0 avec la position d'équilibre qui est trop grand pour que la formule (1) des *petites* oscillations soit applicable. Pratiquement, nous partirons d'un angle Θ_0 assez grand et nous mesurerons l'amplitude *moyenne* Θ_1 des oscillations ainsi que leur période T_1. Nous déduirons la période T des petites oscillations en appliquant la formule du pendule :

$$T = T_1\left(1 - \frac{\Theta_1^2}{16}\right).$$

Pour déterminer I nous ne pouvons pas, même si le barreau a une forme géométrique simple, songer à le calculer, car nous ne sommes pas sûr de l'homogénéité du barreau. C'est pourquoi il est préférable d'éliminer I.

Fixons sur le barreau aimanté, près des extrémités, à une même distance d du fil de suspension, deux petits cylindres de cuivre (métal non magnétique) de masse m et de rayon r (fig. 191). Le nouveau moment d'inertie du système oscillant est (§ 2) :

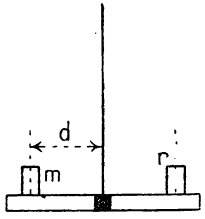


FIG. 191

$$I' = I + 2\,md^2 + 2 \times \frac{1}{2}\,mr^2.$$

Mais puisque r est faible devant d, nous pouvons écrire :

$$I' = I + 2\,md^2.$$

Mesurons les périodes d'oscillation T et T' du barreau seul et avec ses deux cylindres de cuivre. Nous avons :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\mathfrak{M}H}} \qquad T' = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{\mathfrak{M}H}} = 2\pi\sqrt{\frac{I + 2\,md^2}{\mathfrak{M}H}}.$$

D'où, en éliminant I entre ces deux relations :

$$\boxed{\mathfrak{M}H = \frac{8\,\pi^2\,md^2}{T'^2 - T^2}}$$

Le second membre ne contient que des grandeurs facilement mesurables.

201. — ***Mesure de*** $\frac{\mathfrak{M}}{H}$. — On mesure la valeur de $\frac{\mathfrak{M}}{H}$ en faisant agir le champ magnétique créé par l'aimant NS de moment magnétique $\mathfrak{M}$, sur une aiguille aimantée *ns* orientée préalablement par le champ H.

PRINCIPE. — L'aimant est disposé de manière que son axe magnétique soit perpendiculaire au champ H et l'aiguille aimantée *ns*, orientée par le champ H, est placée de façon que son centre A occupe une position de Gauss pour l'aimant NS. Il y a donc deux positions possibles, indiquées sur la figure 192, et dans chaque cas le champ H' produit par l'aimant est perpendiculaire à H. Le champ H' est de la forme $H' = \mathfrak{M}\,f(r)$, r étant la distance OA. L'aiguille aimantée *ns* est, avant l'introduction de l'aimant NS, orientée suivant le champ H. Quand on place l'aimant, elle s'oriente suivant la résultante des champs H et H'. Elle tourne d'un angle α tel que :

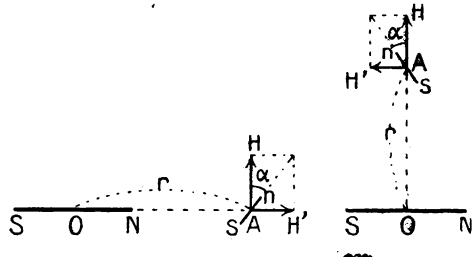


FIG. 192. — Mesure de $\frac{\mathfrak{M}}{H}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H'}{H} = \frac{\mathfrak{M}}{H}\,f(r).$$

D'où :

$$\frac{\mathfrak{M}}{H} = \frac{\text{tg}\alpha}{f(r)}.$$

La fonction $f(r)$ est simple dans le cas des positions de Gauss et la mesure de $\frac{\mathfrak{M}}{H}$ se ramène à celle de la déviation α et de la distance r.

APPAREIL. — L'appareil utilisé, dont la partie essentielle est l'aiguille aimantée *ns*, s'appelle un **magnétomètre** (fig. 193). Il comprend une aiguille aimantée *ns* de faible longueur, de l'ordre du centimètre. Le champ peut être considéré comme uniforme dans la petite étendue où elle se déplace. Le fil de suspension est un fil de cocon, c'est-à-dire sans torsion, afin que l'orientation de l'aiguille soit réglée uniquement par les champs magnétiques. Un miroir léger M fixé à l'aiguille sert à la mesure de la déviation par la méthode très sensible de Poggendorff. Un amortisseur B, soit à air, soit à liquide, est aussi fixé à l'aiguille ; il supprime à peu près complètement les oscillations et accroît ainsi la rapidité des mesures.

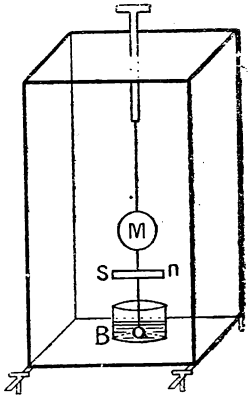


FIG. 193.—Magnétomètre.

Tout l'ensemble est placé dans une cage fermée qui soustrait l'aiguille à l'action des courants d'air ; une face au moins de cette cage est vitrée pour permettre le passage des rayons lumineux qui interviennent dans la mesure optique de la déviation.

Enfin, comme tous ceux qui servent aux mesures magnétiques, cet appareil ne doit contenir aucune trace de fer.

MESURES. — Nous avons le choix entre les deux positions de Gauss, mais remarquons que la première position est préférable puisque, à distance égale, l'intensité du champ H', et par suite tg α, possède une valeur sensiblement deux fois plus grande que dans la seconde position (§ 190).

Plaçons donc l'aimant NS perpendiculairement au champ H et plaçons le magnétomètre de façon que le centre A de l'aiguille aimantée *ns* soit sur l'axe magnétique de NS (fig. 194). Appelons r la distance OA et $2a$ la longueur de l'aimant NS. L'aiguille aimantée qui, en l'absence de l'aimant NS, prend la direction du champ H, tourne d'un angle α tel que :

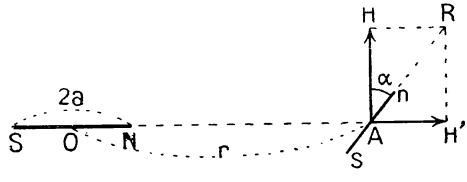


FIG. 194

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{H'}{H}$$

Or nous avons vu au paragraphe 190 que, dans la première position de Gauss,

$$H' = \frac{2\mathfrak{M}}{r^3} \times \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{-2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\mathfrak{M}}{Hr^3} \times \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{-2}$$

d'où :

$$\frac{\mathfrak{M}}{H} = \frac{r^3 \operatorname{tg}\alpha}{2} \times \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^2.$$

Cette formule est générale. Mais comme le plus souvent la demi-longueur de l'aimant a est petite devant r, on peut :

1° Si r est assez grand devant a, négliger $\frac{a^2}{r^2}$ devant 1. Nous avons alors $\frac{\mathfrak{M}}{H} = \frac{r^3 \operatorname{tg}\alpha}{2}$ et la mesure de α et de r permet de déterminer $\frac{\mathfrak{M}}{H}$.

2° Si r est seulement égal à quatre ou cinq fois a, nous pourrons négliger les termes en $\frac{a^4}{r^4}$ et utiliser la formule approchée :

$$\frac{\mathfrak{M}}{H} = \frac{r^3 \operatorname{tg}\alpha}{2}\left(1 - 2\frac{a^2}{r^2}\right). \qquad (1)$$

Cette formule nécessiterait la connaissance de a. Comme nous n'avons aucun moyen de déterminer la position exacte des pôles, nous allons éliminer a à l'aide d'une seconde mesure.

Nous répétons une expérience analogue à la précédente pour une autre distance r' entre l'aiguille ns et l'aimant NS. Nous observons une déviation α' et nous avons :

$$\frac{\mathfrak{M}}{H} = \frac{r'^3 \operatorname{tg}\alpha'}{2}\left(1 - 2\frac{a^2}{r'^2}\right). \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) peuvent s'écrire :

$$r^3 \operatorname{tg}\alpha = 2\frac{\mathfrak{M}}{H}\left(1 + 2\frac{a^2}{r^2}\right) \qquad r'^3 \operatorname{tg}\alpha' = 2\frac{\mathfrak{M}}{H}\left(1 + 2\frac{a^2}{r'^2}\right)$$

d'où :

$$\frac{\mathfrak{M}}{H} = \frac{r^5 \operatorname{tg}\alpha - r'^5 \operatorname{tg}\alpha'}{2(r^2 - r'^2)}.$$

I. — MESURES DES MOMENTS MAGNÉTIQUES

*202. — **Mesures absolues.*** — Pour mesurer le moment magnétique $\mathfrak{M}$ d'un aimant en valeur absolue, on détermine en général les quantités $\mathfrak{M}H$ et $\frac{\mathfrak{M}}{H}$ (§ 199), H étant un champ magnétique auxiliaire qui est souvent le champ magnétique terrestre.

Les mesures s'effectuent par les méthodes indiquées précédemment. Dans toutes les mesures, l'aimant est placé horizontalement et la composante active du champ terrestre est sa composante horizontale H_o.

En définitive, on mesure les quantités $A = \mathfrak{M}H_0$ et $B = \frac{\mathfrak{M}}{H_0}$ d'où l'on déduit le moment magnétique $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M} = \sqrt{AB}.$$

203. — ***Mesures relatives.*** — Les méthodes de mesure de $\mathfrak{M}H$ ou de $\frac{\mathfrak{M}}{H}$ pourront être utilisées pour comparer entre eux les moments magnétiques de deux barreaux et par suite effectuer des mesures relatives. Le champ auxiliaire utilisé est en général le champ terrestre.

1° MÉTHODE DE TORSION. — Un premier aimant de moment magnétique *connu* $\mathfrak{M}_0$ est suspendu horizontalement à un fil de torsion de façon que cet aimant soit orienté dans le sens du champ auxiliaire H pour une torsion nulle. Amenons cet aimant à être perpendiculaire au champ H en tordant l'extrémité supérieure du fil d'un angle β_0. La torsion du fil est $\beta_0 - \frac{\pi}{2}$ et à l'équilibre nous avons (§ 200) :

$$\mathfrak{M}_0 H = C\left(\beta_0 - \frac{\pi}{2}\right).$$

Revenons à la position initiale et remplaçons le premier aimant par un second aimant de moment magnétique inconnu $\mathfrak{M}$. Recommençons les mêmes opérations et soit β l'angle dont nous devons faire tourner la partie supérieure du fil. A l'équilibre nous avons :

$$\mathfrak{M}H = C\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)$$

D'où :

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0} = \frac{\beta - \frac{\pi}{2}}{\beta_0 - \frac{\pi}{2}}.$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de connaître la constante de torsion du fil pour effectuer cette mesure relative.

2° MÉTHODE DES OSCILLATIONS. — Nous opérerons comme il a été dit au paragraphe 200.

Faisons osciller le premier aimant de moment magnétique $\mathfrak{M}_0$ dans un champ auxiliaire H. Soit T_0 la période des oscillations. Surchargeons-le avec deux petits cylindres de cuivre de masse m_0 et placés à la distance d_0 du fil. Soit T'_0 la nouvelle période des oscillations. Nous avons vu que (§ 200) :

$$\mathfrak{M}_0 H = \frac{8\pi^2 m_0 d_0^2}{T'^2_0 - T_0^2}.$$

Répétons les mêmes expériences avec le deuxième aimant de moment magnétique $\mathfrak{M}$, les *mêmes* surcharges placées à la *même* distance du fil. Soit T et T′ les deux périodes mesurées. Nous avons :

$$\mathfrak{M} H = \frac{8\pi^2 m_0 d_0^2}{T'^2 - T^2}.$$

D'où :

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0} = \frac{T'^2_0 - T^2_0}{T'^2 - T^2}.$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de connaître les quantités m_0 et d_0 relatives aux cylindres de cuivre employés comme surcharges.

3° Méthode du magnétomètre. — La méthode dérive de la mesure de $\frac{\mathfrak{M}}{H}$ exposée au paragraphe 201. Comme dans les mesures relatives on se contente d'une précision moindre que celle des mesures absolues, nous utiliserons la formule simple :

$$\frac{\mathfrak{M}}{H} = \frac{r^3}{2} \operatorname{tg}\alpha.$$

1er Procédé. — Faisons, pour les deux aimants de moments magnétiques $\mathfrak{M}_0$ et $\mathfrak{M}$, les mesures de déviation indiquées au § 201. Soit α_0 et α les déviations mesurées. Nous avons, la distance r étant la même pour les deux aimants :

$$\frac{\mathfrak{M}_0}{H} = \frac{r^3}{2} \operatorname{tg}\alpha_0 \qquad \frac{\mathfrak{M}}{H} = \frac{r^3}{2} \operatorname{tg}\alpha$$

d'où :

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha_0}.$$

2e Procédé. — Plaçons les deux aimants de part et d'autre de l'aiguille du magnétomètre (fig. 195), de manière que leurs axes coïncident et passent par le centre A du magnétomètre. Le premier aimant de moment magnétique $\mathfrak{M}_0$ étant fixé à la distance r_0, on règle la distance r du second, de moment magnétique $\mathfrak{M}$, pour que le magnétomètre revienne au zéro, c'est-à-

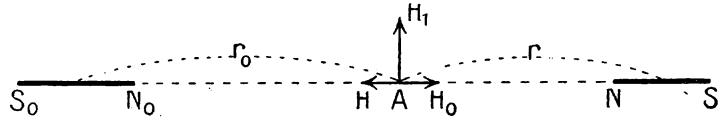


Fig. 195

dire dans le sens du champ auxiliaire H_1. Les champs créés par les deux aimants en A sont alors égaux. D'où :

$$2\frac{\mathfrak{M}_0}{r_0^3} = \frac{2\mathfrak{M}}{r^3}$$

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0} = \frac{r^3}{r_0^3}.$$

II. — MESURES DES CHAMPS MAGNÉTIQUES

204. — Mesures absolues. — La mesure absolue d'un champ magnétique H s'effectue en utilisant la méthode indiquée au paragraphe 199.

Prenons un barreau aimanté auxiliaire de moment magnétique $\mathfrak{M}$ et déterminons par les méthodes précédentes les quantités $A = \mathfrak{M}H$ et $B = \frac{\mathfrak{M}}{H}$. Nous en déduisons :

$$H = \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

Mais il faut remarquer qu'en chaque point existe le champ magnétique terrestre dont il faudra tenir compte si H n'est pas très grand. Nous nous arrangerons pour que le champ magnétique à mesurer H soit horizontal et de mêmes direction et sens que la composante horizontale du champ terrestre H_0. Nous mesurerons les quantités A et B : d'une part dans le champ terrestre agissant seul, ce qui nous donne H_0 ; d'autre part dans le champ total $H + H_0$, ce qui nous donne $H + H_0$. Par différence nous obtiendrons la valeur de H.

Signalons qu'il existe une autre méthode de mesure absolue des champs magnétiques basée sur les lois de l'électromagnétisme (§ 244).

205. — ***Mesures relatives.*** — Le champ magnétique terrestre interviendra en général dans les mesures. Nous nous arrangerons pour que les champs à comparer H_1 et H_2 soient horizontaux et de même sens que la composante horizontale H_0 du champ terrestre.

1° MÉTHODE DE TORSION. — Prenons un barreau aimanté auxiliaire de moment magnétique $\mathfrak{M}$. Déterminons par la méthode de torsion (§ 200) les valeurs du produit $\mathfrak{M}H$ successivement dans les champs H_0, $H_1 + H_0$ et $H_2 + H_0$. Soient β_0, β_1 et β_2 les angles dont il faut tourner la partie supérieure du fil pour amener l'aimant perpendiculaire au champ. Nous avons :

$$\mathfrak{M}H_0 = C\left(\beta_0 - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\mathfrak{M}(H_1 + H_0) = C\left(\beta_1 - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathfrak{M}(H_2 + H_0) = C\left(\beta_2 - \frac{\pi}{2}\right)$$

D'où l'on tire :

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{\beta_2 - \beta_0}{\beta_1 - \beta_0}$$

2° MÉTHODE DES OSCILLATIONS. — On opère de la même façon que dans la méthode précédente, mais le produit $\mathfrak{M}H$ est déterminé par la méthode des oscillations. Appelons $\mathfrak{M}$ le moment magnétique du barreau et I son moment d'inertie. Soit T_0, T_1 et T_2 les périodes des petites oscillations dans les champs H_0, $H_1 + H_0$ et $H_2 + H_0$. Nous avons :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\mathfrak{M}H_0}}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\mathfrak{M}(H_1 + H_0)}}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\mathfrak{M}(H_2 + H_0)}}$$

D'où :

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{\frac{1}{T_2^2} - \frac{1}{T_0^2}}{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_0^2}}.$$

La comparaison des deux champs H_2 et H_1 se ramène à des mesures de fréquences.

3° Méthode du magnétomètre. — Nous nous arrangerons pour que les champs H_1 et H_2 à comparer soient horizontaux et *perpendiculaires* au champ terrestre H_0.

L'aiguille aimantée d'un magnétomètre sous l'action du champ terrestre H_0 s'oriente dans la direction de ce champ. Faisons agir le champ H_1 perpendiculaire à H_0, l'aiguille sous l'action des deux champs s'oriente suivant leur résultante et tourne d'un angle α_1, tel que :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{H_1}{H_0}$$

Substituons ensuite le champ H_2 au champ H_1. La déviation observée est α_2 et nous avons :

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{H_2}{H_0}$$

D'où :

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1}.$$

Signalons qu'il existe d'autres méthodes de comparaison des champs magnétiques basées sur les lois de l'électromagnétisme (§ 244) et sur les phénomènes d'induction (§ 254).

206. — Application des méthodes précédentes. — Vérification de la loi de l'inverse carré de la distance. — Rappelons seulement en deux mots ce qui a été établi au paragraphe 191. Soit deux points P_1 et P_2 pris à des distances égales du centre d'un barreau aimanté, l'un sur l'axe du barreau, l'autre dans le plan perpendiculaire à son axe en son milieu. Si les champs H_1 et H_2 créés par le barreau en ces deux points satisfont à la relation $\frac{H_1}{H_2} = 2$, le champ d'une masse magnétique ponctuelle varie *nécessairement* en raison inverse du carré de la distance.

L'une quelconque des méthodes indiquées dans les paragraphes précédents permet de mesurer le rapport $\frac{H_1}{H_2}$; on trouve qu'il est bien égal à 2.

Comme nous l'avons dit (§ 191), cette méthode a été employée par Gauss ; elle fournit la vérification la plus précise de la loi de Coulomb.

Exercices.

54. Un aimant A est suspendu à un fil de torsion de constante C. La torsion du fil est nulle quand l'aimant A est parallèle au champ terrestre. Calculer le moment magnétique de l'aimant et la constante de torsion C sachant que l'on a trouvé pour la durée des

petites oscillations : $T_0 = 2$ s dans le cas d'une suspension par fil de cocon de constante de torsion nulle et $T_1 = 1{,}7$ s avec le fil de constante C.

Moment d'inertie de A : 1 C. G. S.

Composante horizontale du champ terrestre : $H_0 = 0{,}2$ gauss.

Réponse : $\mathfrak{M} = 20$ C. G. S. ; C = 3,84 C. G. S.

55. Pour mesurer le moment magnétique $\mathfrak{M}$ d'un barreau et l'intensité H d'un champ magnétique, on détermine $\mathfrak{M}$H et $\frac{\mathfrak{M}}{H}$.

Dans la mesure de $\mathfrak{M}$H par la méthode des oscillations, on a trouvé une durée d'oscillation T = 2 s puis une durée d'oscillation T' = 2,23 s, quand on a mis les deux cylindres de cuivre de masse $m = 12$ g et placés à 4 cm de l'axe de suspension du barreau.

Dans la mesure de $\frac{\mathfrak{M}}{H}$, on a trouvé une déviation du magnétomètre $\alpha = 33°$ à la distance r = 50 cm du barreau. On a utilisé la première position de Gauss.

Calculer $\mathfrak{M}$ et H. Calculer avec quelle précision $\mathfrak{M}$ et H sont déterminés sachant que les périodes sont évaluées à $\frac{1}{100}$ de seconde près, les longueurs sont mesurées avec une erreur relative inférieure au $\frac{1}{200}$ et les angles sont mesurés à 6 minutes près.

CHAPITRE XXIV

AIMANTATION [1]

207. — Vecteur aimantation en un point d'un barreau aimanté. — L'expérience de l'aimant brisé (§ 174) a conduit à admettre que, dans une substance magnétique comme le fer, l'aimantation est un phénomène moléculaire. Chaque molécule de la substance magnétique se comporte comme un petit aimant (*doublet*). Cette hypothèse a trouvé une confirmation dans les expériences décrites au paragraphe 186.

En général, l'orientation des doublets d'un aimant n'est pas uniforme, elle varie progressivement lorsqu'on se déplace dans l'aimant. Mais si nous ne considérons, autour d'un point A situé à l'intérieur de l'aimant, qu'un volume infiniment petit dv, les doublets qu'il renferme peuvent être considérés comme ayant tous même orientation. Désignons par $d\vec{\mathfrak{M}}$ le vecteur moment magnétique de la portion de l'aimant occupant ce volume dv. La relation :

$$\frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dv} = \vec{\mathfrak{I}} .$$

définit alors un vecteur $\vec{\mathfrak{I}}$ qu'on appelle *aimantation au point* A : la *direction* et le *sens* du *vecteur aimantation* sont la direction et le sens du vecteur $d\vec{\mathfrak{M}}$; **l'intensité d'aimantation** est :

$$\mathfrak{I} = \frac{d\mathfrak{M}}{dv}.$$

La constitution d'un aimant est connue lorsqu'on connaît le vecteur $\vec{\mathfrak{I}}$ en chacun de ses points.

Un aimant dans lequel le vecteur aimantation aurait même direction, même sens et même intensité en tous les points serait dit *à aimantation uniforme.* En appelant $\mathfrak{M}$ le moment magnétique d'un tel aimant et v son volume, on aurait :

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{M}}{v}.$$

Dans un milieu pratiquement non magnétique, le vecteur $\vec{\mathfrak{I}}$ est pratiquement nul en chaque point.

(1) Les questions traitées dans ce chapitre ne sont pas explicitement au programme de la classe de Mathématiques Spéciales.

UNITÉ ÉLECTROMAGNÉTIQUE C. G. S. D'INTENSITÉ D'AIMANTATION. — Il résulte de la relation : $\mathcal{I} = \frac{\mathfrak{M}}{v}$, qu'on a : $\mathcal{I} = 1$, si l'on a en même temps $\mathfrak{M} = 1$ et $v = 1$. Donc :

L'unité électromagnétique C. G. S. d'intensité d'aimantation est l'intensité d'aimantation d'un aimant à aimantation uniforme qui posséderait, par centimètre cube, un moment magnétique égal à l'unité électromagnétique C. G. S.

D'après le paragraphe 184, l'équation de dimension de cette unité est :

$$\mathcal{I} = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1},$$

elle est identique à celle de l'unité d'intensité de champ magnétique (§ 176).

*208. — **Cas particuliers d'aimantation.*** — Nous signalerons deux cas particuliers importants :

1° AIMANTATION UNIFORME. — L'aimantation est constante en grandeur et en direction. Les lignes d'aimantation, c'est-à-dire les lignes tangentes en chacun de leurs points au vecteur $\vec{\mathcal{I}}$ correspondant, sont des droites parallèles.

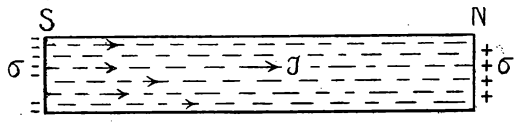


FIG. 196. — Aimantation uniforme.

Prenons le cas d'un aimant cylindrique dont l'aimantation est uniforme et parallèle aux génératrices du cylindre (fig. 196). Les masses magnétiques apparaissent uniquement sur les surfaces terminales que nous supposerons perpendiculaires à l'axe du cylindre. Soit $+\sigma$ et $-\sigma$ les densités superficielles de magnétisme sur ces deux faces. La masse magnétique répartie sur chaque surface terminale est σ S et, en appelant l la longueur NS de l'aimant, le moment magnétique $\mathfrak{M}$ du barreau est, par définition,

$$\mathfrak{M} = \sigma S \times l.$$

Le volume de l'aimant est $v = S \times l$. L'intensité d'aimantation $\mathcal{I}$ est par suite :

$$\mathcal{I} = \frac{\mathfrak{M}}{v} = \sigma.$$

Dans un aimant cylindrique à aimantation uniforme satisfaisant aux conditions précédentes, la densité superficielle de magnétisme sur chaque face terminale est numériquement égale à l'intensité d'aimantation.

$$\boxed{\sigma = \mathcal{I}}$$

2° CIRCUIT MAGNÉTIQUE FERMÉ. — Considérons un aimant dont les lignes d'aimantation se ferment sur elles-mêmes dans la masse de l'aimant (fig. 197). Un tel barreau, quoique aimanté, n'a pas de magnétisme libre. Il n'a pas de pôle et ne crée aucun champ magnétique extérieur. Il constitue un circuit magnétique fermé.

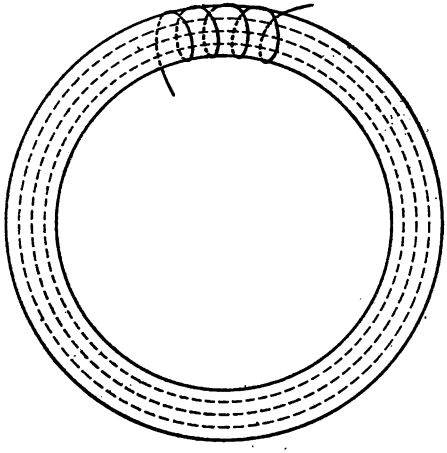


FIG. 197. — Circuit magnétique fermé.

On réalise un tel aimant en enroulant, autour d'un anneau d'acier en forme de tore, non aimanté à l'avance, les spires d'une bobine et en faisant passer quelques instants un courant dans la bobine.

Pour constater l'aimantation du métal, il suffit de casser l'aimant. Chacun des morceaux est alors, le plus souvent, un aimant à deux pôles.

209. — ***Champ magnétique à l'intérieur d'un aimant.*** — Le champ magnétique en un point est égal à la force qui s'exerce sur la masse magnétique + 1 placée en ce point. Pour placer la masse + 1 en un point M intérieur à un aimant, *il faut faire une cavité.* Nous pourrions appeler champ H au point M la limite du champ H′ dans une cavité entourant le point M lorsque le volume de cette cavité tend vers zéro. Pour qu'une telle définition ait un sens, il faut que la limite du champ H′ reste la même *quelle que soit la manière dont le volume de la cavité tend vers zéro.* Nous allons montrer que, dans un aimant, il n'en est pas ainsi.

Creusons d'abord autour du point M une cavité ayant la forme d'un cylindre long et étroit dont les génératrices sont *parallèles* à l'aimantation $\vec{\mathcal{J}}$ au point M (fig. 198). Le champ en M est dû, d'une part aux masses magnétiques apparentes de l'aimant, d'autre part aux masses magnétiques qui apparaissent sur les parois de la cavité. D'après la forme même de la

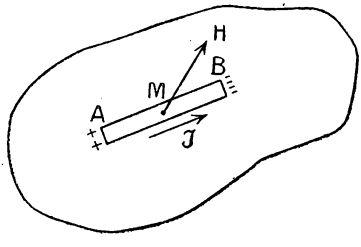


FIG. 198

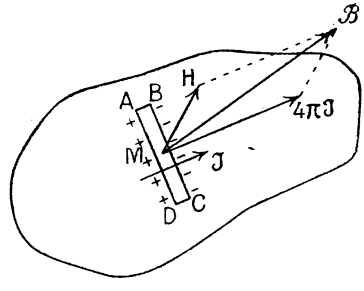


FIG. 199

cavité, les masses magnétiques n'apparaissent qu'aux extrémités A et B. Leur action en M est faible et tend vers zéro lorsque les surfaces terminales A et B tendent vers zéro. Par suite, le champ $\vec{H}$ au point M est dû uniquement aux masses magnétiques apparentes du barreau. Il se calculera donc comme pour un point extérieur au barreau et aura les mêmes propriétés.

Creusons maintenant autour du point M une cavité ayant la forme d'un cylindre aplati dont les bases sont *perpendiculaires* à l'aimantation $\vec{\mathcal{I}}$ au point M (fig. 199). Le champ en M se compose du champ $\vec{H}$ qui vient d'être défini et du champ créé par les masses magnétiques apparues sur AD et BC. Dans les conditions actuelles, la densité superficielle σ sur chaque face AD et BC est égale à l'intensité d'aimantation $\mathcal{I}$, car nous sommes dans les conditions du § 208. Chaque couche crée au point M très voisin un champ égal à $2\pi\vec{\mathcal{I}}$ (§ 44). Le champ total dû aux masses magnétiques situées sur AD et BC est égal à $4\pi\vec{\mathcal{I}}$. Par suite le champ en M sera :

$$\vec{\mathcal{B}} = \vec{H} + 4\pi\vec{\mathcal{I}}$$

Il est différent du précédent.

On ne peut donc pas définir ainsi le champ en un point M intérieur à un aimant. Pourtant les deux valeurs particulières du champ trouvées précédemment présentent un certain intérêt. On attache en effet à chaque point M intérieur à un aimant deux vecteurs importants qui sont :

1° Le vecteur $\vec{H}$ que l'on appelle **champ magnétique** au point M. C'est le champ produit en M par les masses magnétiques apparentes de l'aimant.

2° Le vecteur $\vec{\mathcal{B}}$ qu'on appelle **induction magnétique** au point M et qui se déduit du vecteur champ $\vec{H}$ et du vecteur aimantation $\vec{\mathcal{I}}$ par la relation *vectorielle.*

$$\boxed{\vec{\mathcal{B}} = \vec{H} + 4\pi\vec{\mathcal{I}}}$$

L'intérêt de ces deux vecteurs résulte de leurs propriétés que nous allons examiner.

210. — ***Propriétés du vecteur champ magnétique et du vecteur induction.*** — Les définitions des vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{\mathcal{B}}$ sont valables en tous les points de l'espace, qu'ils soient extérieurs ou intérieurs à la matière aimantée. Mais, à l'extérieur d'un aimant, l'aimantation est nulle : $\mathcal{I} = 0$ et $\vec{\mathcal{B}} = \vec{H}$. *A l'extérieur d'un aimant, le champ et l'induction sont confondus.*

Pour un champ magnétique quelconque, nous avons défini précédemment les lignes de force, les tubes de force et le flux de force à travers une surface. Pour le vecteur induction $\vec{\mathcal{B}}$, nous définirions d'une manière analogue les *lignes d'induction*, les *tubes d'induction* et le *flux d'induction* à travers une surface.

1° PROPRIÉTÉS DU CHAMP MAGNÉTIQUE $\vec{H}$.

a) La définition même du champ $\vec{H}$ en fait un champ newtonien. Il possède les propriétés des champs newtoniens et, en particulier, *il dérive d'un potentiel.* Le travail du champ magnétique le long d'une courbe fermée est nul, même si la courbe pénètre dans la matière aimantée.

b) *Le champ magnétique $\vec{H}$ subit une discontinuité lorsqu'on pénètre à l'intérieur d'un aimant.* Montrons-le dans le cas particulier d'un aimant cylindrique à aimantation uniforme parallèle aux génératrices. Prenons deux points A et B (fig. 200), de part et d'autre de la surface terminale NN′ et infiniment voisins. Les masses magnétiques situées sur la face SS′ produisent le même champ h en A et B puisque ces deux points sont infiniment voisins et loin de SS′. Les masses magnétiques situées sur NN′ ont une densité superficielle $\sigma = \mathcal{J}$ (§ 208) et produisent en A et B deux champs normaux à NN′, égaux à $2\pi\mathcal{J}$ et de sens contraires. Par suite les champs en A et B sont :

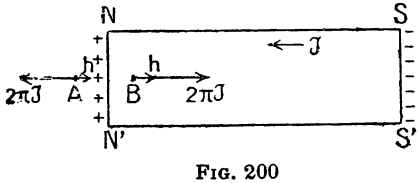


FIG. 200

$$\vec{H}_A = \vec{h} + 2\pi\vec{\mathcal{J}} \qquad \vec{H}_B = \vec{h} - 2\pi\vec{\mathcal{J}}$$

Quand on passe de A à B, le champ subit une brusque variation de $4\pi\mathcal{J}$.

Ce résultat est général : Quand on pénètre à l'intérieur d'un aimant, la composante normale du champ subit une discontinuité de $4\pi\mathcal{J}$.

c) *Le champ magnétique n'est pas un vecteur à flux conservatif.* — Ceci résulte de la discontinuité de $\vec{H}$. On voit sur la figure 201 que le flux qui sort d'une surface fermée entourant un pôle n'est pas nul.

En résumé l'intérêt principal du vecteur $\vec{H}$, c'est qu'il dérive d'un potentiel.

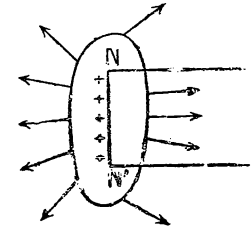


FIG. 201

2° PROPRIÉTÉS DE L'INDUCTION $\vec{\mathcal{B}}$.

a) Le vecteur induction $\vec{\mathcal{B}}$ se confond avec le champ $\vec{H}$ en tout point extérieur à un aimant. A l'intérieur d'un aimant les deux vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{\mathcal{B}}$ sont en général différents, même au point de vue direction.

b) Le vecteur $\vec{\mathcal{B}}$ ne dérive pas, en général, d'un potentiel car le vecteur aimantation $\vec{\mathcal{J}}$ n'a aucune raison de dériver d'un potentiel.

c) Dans le cas d'un aimant cylindrique à aimantation uniforme parallèle aux génératrices, *le vecteur B est continu* lorsqu'on pénètre dans la matière aimantée par une surface terminale.

Prenons le cas de la figure 200. Le point A étant extérieur à l'aimant $\mathcal{B}_A = H_A$. Le point B étant intérieur à l'aimant $\vec{\mathcal{B}}_B = \vec{H}_B + 4\pi\vec{\mathcal{I}}$

Or $\vec{H}_A = \vec{h} + 2\pi\vec{\mathcal{I}}$ $\vec{H}_B = \vec{h} - 2\pi\vec{\mathcal{I}}$

d'où : $\vec{\mathcal{B}}_A = \vec{H}_A = \vec{h} + 2\pi\vec{\mathcal{I}}$ $\vec{\mathcal{B}}_B = \vec{H}_B + 4\pi\vec{\mathcal{I}} = \vec{h} + 2\pi\vec{\mathcal{I}}$

$$\vec{\mathcal{B}}_A = \vec{\mathcal{B}}_B$$

Le vecteur induction est continu.

Ce résultat peut se généraliser. Quand on pénètre à l'intérieur d'un aimant, la composante *normale* du vecteur induction est continue.

d) *Le vecteur induction est à flux conservatif*, c'est-à-dire que le flux du vecteur $\mathcal{B}$ à travers une surface fermée est nul même si la surface coupe la matière aimantée. Nous l'admettrons sans le démontrer. L'intérêt du vecteur induction se manifeste en électro-magnétisme où il joue un rôle fondamental (§ 225).

FEUILLETS MAGNÉTIQUES

*211. — **Définitions.*** — On appelle *feuillet magnétique* une lame mince aimantée telle que l'aimantation $\mathcal{I}$ en chaque point soit normale à la surface et inversement proportionnelle à l'épaisseur e du feuillet en ce point (fig. 202).

En tous les points, le produit $\mathcal{I} \times e$ a la même valeur. Posons : $\mathcal{I} \times e = P$. Cette constante P s'appelle la **puissance** du feuillet.

Par suite de l'aimantation, il apparaît sur l'une des faces du feuillet des masses magnétiques nord. Cette face s'appelle la *face positive* ou face nord du feuillet. Sur l'autre face apparaissent des masses magnétiques sud. C'est la face *négative* ou face sud.

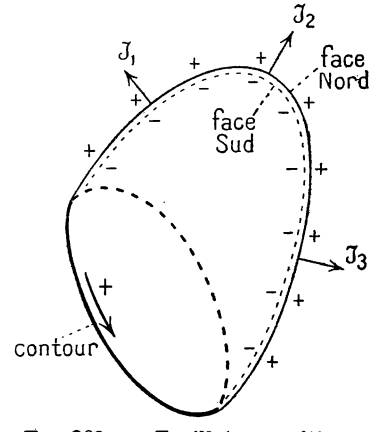


FIG. 202. — Feuillet magnétique.

La courbe qui limite la lame aimantée s'appelle le *contour* du feuillet. Nous orienterons cette ligne en choisissant sur elle un sens positif. *Nous prendrons comme sens positif, le sens qui va des pieds à la tête d'un observateur placé sur le contour, regardant à l'intérieur de la matière aimantée, et ayant la face nord à sa gauche* (fig. 202).

La notion de feuillet magnétique, purement théorique, fut imaginée par Ampère pour faciliter l'étude des relations entre les courants et les champs magnétiques. Les propriétés des feuillets nous serviront surtout en électromagnétisme.

REMARQUE. — Prenons un élément de feuillet de surface dS et d'épaisseur e. Les deux faces portent une densité superficielle de magnétisme $\sigma = \mathfrak{I}$ (§ 208). Cet élément constitue un petit aimant dont le moment magnétique est :

$$d\mathfrak{M} = \mathfrak{I}\, dS \times e = \mathfrak{I} e \times dS = P dS.$$

D'où $P = \frac{d\mathfrak{M}}{dS}$. *La puissance d'un feuillet est égale au moment magnétique par unité de surface.*

*212. — **Potentiel créé par un feuillet en un point.*** — Considérons un feuillet de puissance P de surface Σ limité par un contour C. Ce feuillet crée en chaque point A de l'espace un champ magnétique qui dérive d'un potentiel. Evaluons le potentiel en A.

1° PRENONS UN ÉLÉMENT DE FEUILLET (fig. 203) d'épaisseur e et de surface dS. Son moment magnétique est :

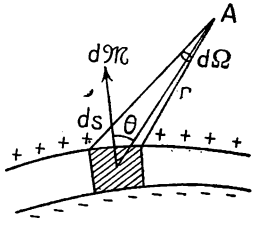


FIG. 203

$$d\mathfrak{M} = P dS$$

Cet élément est assimilable à un petit aimant. Il crée en A un potentiel (§ 188) :

$$dV = \frac{d\mathfrak{M} \cos \Theta}{r^2} = P \frac{dS \cos \Theta}{r^2}.$$

Or $\frac{dS \cos \Theta}{r^2}$ représente l'angle solide $d\Omega$ sous lequel de A on voit la face *positive* de l'élément de feuillet (§ 1).

Donc :

$$\boxed{dV = P\, d\Omega}$$

Si le point A se trouvait du côté de la face négative (fig. 204), l'angle Θ serait obtus. La quantité $\frac{dS \cos \Theta}{r^2}$ serait égale à $-d\Omega$, $d\Omega$ étant l'angle sous lequel on voit la face *négative* de l'élément.

D'où : $$dV = -P d\Omega.$$

D'une façon générale, on peut prendre la formule

$$dV = P d\Omega$$

dans tous les cas, à condition *de donner à $d\Omega$ le signe de la face du feuillet vue du point A.*

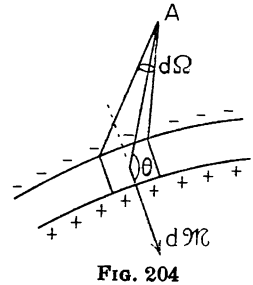


FIG. 204

2° Considérons maintenant le feuillet entier. L'ensemble des cônes élémentaires de sommet A sont de deux espèces : les uns traversent la surface un nombre pair de fois, les autres la traversent un nombre impair de fois (fig. 205).

Un cône de la première espèce est extérieur au cône de sommet A s'appuyant sur le contour C. Il découpe sur le feuillet deux éléments BD et B'D'. Ces deux éléments sont vus de A sous des angles solides égaux en valeur absolue mais de signes contraires d'après la convention précédente. L'ensemble donne donc au point A un potentiel nul.

Un cône de la deuxième espèce est intérieur au cône de sommet A s'appuyant sur le contour C. Il découpe sur le feuillet un élément B''D'' qui produit en A un potentiel $dV = P d\Omega$.

Le potentiel en A est la somme algébrique des potentiels fournis par les différents éléments. Donc :

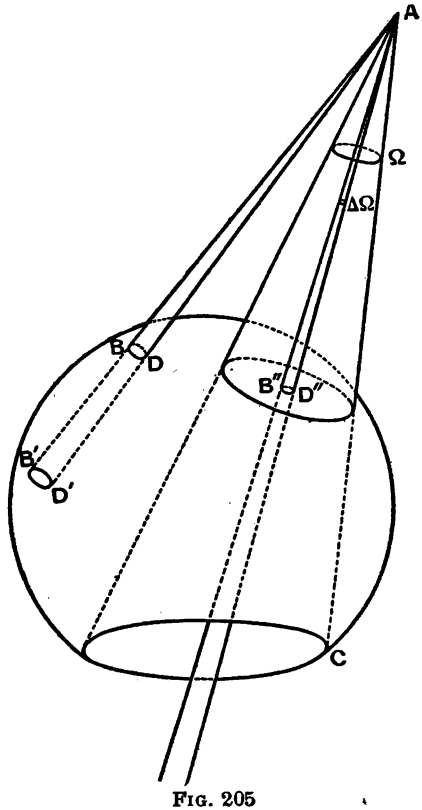


Fig. 205

$$V = P\,\Omega,$$

Ω étant la somme des angles solides des cônes de la deuxième espèce, c'est-à-dire l'angle solide du cône du sommet A et s'appuyant sur C.

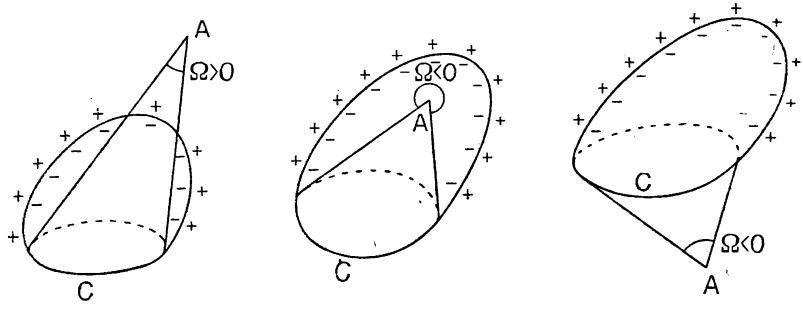


Fig. 206. — Signe de l'angle solide sous lequel on voit le contour d'un feuillet.

Il y a deux angles de sommet A dont la somme est 4 π. Il faut prendre pour Ω celui qui est du côté de la surface du feuillet, c'est-à-dire celui qui est la somme des angles élémentaires. Cet angle Ω est une grandeur algébrique

ayant le signe de la face qui est vue du point A. La figure 206 montre les valeurs de Ω dans plusieurs cas. Donc :

Le potentiel créé par un feuillet en un point A est donné par la formule $V = P\,\Omega$. *Il ne dépend que de la puissance et du contour du feuillet. Il ne dépend pas de la position de la surface du feuillet, pourvu que celle-ci reste toujours du même côté par rapport à A.*

213. — ***Champ magnétique créé par un feuillet.*** — La formule générale $H = -\frac{dV}{ds}$ (§ 177) permet de calculer le champ magnétique en chaque point A connaissant le potentiel V. Considérons tous les feuillets de puissance P, de contour C, qui tournent vers A leur face positive (fig. 207).

Nous avons $V = P\Omega$ et la composante H_x du champ suivant une direction $x'x$ est (§ 177) :

$$H_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -P\frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

Considérons maintenant tous les feuillets qui tournent vers A la face négative. Le potentiel en A est $V' = -P\,\Omega'$.

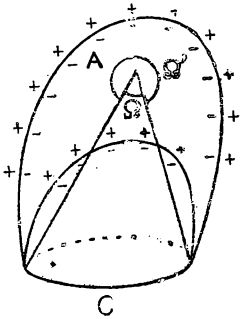


FIG. 207

Or $\Omega' = 4\pi - \Omega$ (fig. 207). D'où :

$$V' = -P(4\pi - \Omega) = P(\Omega - 4\pi).$$

La composante H'_x du champ suivant $x'x$ sera :

$$H'_x = -\frac{\partial V'}{\partial x} = -P\frac{\partial \Omega}{\partial x} = H_x.$$

Ainsi pour tous les feuillets de puissance P et de contour C, alors que le *potentiel* en A peut prendre les deux valeurs $V = P\,\Omega$ et $V' = P(\Omega - 4\pi)$ suivant le signe de la face tournée vers A, *le champ* au point A est le même dans tous les cas.

Le champ magnétique créé par un feuillet en un point A ne dépend que de la puissance et du contour du feuillet. Il est indépendant de la position de sa surface (A est supposé extérieur à la matière aimantée).

Il résulte de ceci que le champ créé en A doit pouvoir s'exprimer uniquement en fonction des données géométriques définissant le contour et des paramètres définissant le point A. On démontre en effet que le champ créé par un feuillet *peut être considéré* comme la résultante de champs créés par les éléments de longueur du contour.

Chaque élément de longueur ds *crée au point A situé à une distance* r *dans une direction faisant l'angle* Θ *avec cet élément, un champ élémentaire* dh, *perpendiculaire au plan défini par l'élément* ds *et le point A, dirigé vers la gauche d'un observateur placé sur l'élément dans le sens positif du contour* (§ 211) *et regardant le point A. La valeur de ce champ est donnée par la formule :*

$$\boxed{dh = \frac{P\,ds\sin\Theta}{r^2}}$$

Ce résultat ne doit être considéré que comme une équivalence mathématique, mais non physique. Il est évident que le champ n'est pas créé par le contour mais par la matière aimantée répartie sur la surface.

*214. — **Propriétés des feuillets magnétiques.*** — 1° Considérons deux points A et B infiniment voisins, mais situés de part et d'autre de la surface d'un feuillet (fig. 208).

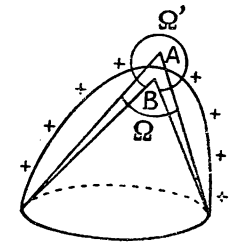


FIG. 208

A étant du côté de la face positive le potentiel en A est $V_A = P\ \Omega$. B étant du côté de la face négative, le potentiel en B est $V_B = -P\ \Omega'$. Or A et B étant infiniment voisins nous avons $\Omega' = 4\pi - \Omega$.

D'où : $V_B = P(\Omega - 4\pi)$

et $V_A - V_B = 4\pi P$

Entre deux points infiniment voisins, situés de part et d'autre de la surface d'un feuillet, il existe une différence de potentiel égale à $4\pi P$.

2° Calculons le travail du champ et de l'induction magnétique pendant le parcours d'un circuit fermé quelconque.

Le champ magnétique H dérive d'un potentiel (§ 210), donc le travail sera nul.

Il n'en sera pas de même pour l'induction $\vec{\mathcal{B}} = \vec{H} + 4\pi\vec{\mathcal{I}}$. En effet, le travail du vecteur $\vec{H}$ est nul. Quant au vecteur $4\pi\vec{\mathcal{I}}$, il n'existe que dans la matière aimantée et est normal à la surface du feuillet (§ 211). Par suite, chaque fois qu'on traverse le feuillet dans le sens de l'aimantation, il fournit un travail $\mathcal{C} = 4\pi\mathcal{I} \times e = 4\pi P$ car $P = \mathcal{I} \times e$. Si le déplacement a lieu en sens inverse, le travail est négatif et égal à $-4\pi P$. Donc :

Le travail $\mathcal{C}$ du vecteur induction pendant le parcours d'un circuit fermé, traversant m *fois le feuillet dans le sens de l'aimantation et* n *fois en sens inverse, est égal à :*

$$\boxed{\mathcal{C} = 4\pi(m-n)P}$$

*215. — **Energie potentielle d'un feuillet.*** — Par définition, on appelle énergie potentielle d'un feuillet placé dans un champ magnétique H_0, le travail qu'il faut *fournir* pour amener le feuillet de l'infini jusqu'à sa position actuelle.

Prenons un élément de feuillet de surface dS. C'est un petit aimant de moment magnétique $d\mathfrak{M} = P dS$. Nous pouvons même écrire la relation vectorielle $d\vec{\mathfrak{M}} = P d\vec{S}$ en considérant $d\vec{S}$ comme un vecteur de grandeur dS porté par la normale à la surface et dirigé dans le sens de l'aimantation.

L'énergie potentielle de ce petit aimant est (§ 187) :

$$dW = -(d\vec{\mathfrak{M}} \times \vec{H_0}) = -P(d\vec{S} \times \vec{H_0}).$$

Le produit scalaire $(d\vec{S} \times \vec{H_0})$ représente le flux du vecteur $\vec{H_0}$ sortant

par l'élément de surface positive dS. Soit $d\Phi$ ce flux élémentaire. Nous avons :

$$dW = -P d\Phi$$

Pour l'ensemble du feuillet, les énergies et les flux s'ajoutant algébriquement, nous avons :

$$\boxed{W = -P\Phi}$$

Φ étant le flux du champ $\vec{H}_0$ qui sort par la face ***positive*** *du feuillet.* Un flux sortant par la face négative est considéré comme négatif.

216. — ***Applications.*** — Nous allons tirer quelques conséquences importantes du résultat précédent.

1° Nous savons qu'un système quelconque est en équilibre stable lorsque son énergie potentielle est minimum. Pour un feuillet $W = -P\Phi$. Le minimum de W correspond au maximum de Φ.

Un feuillet libre dans un champ magnétique se placera de façon que le flux qui sort par sa face positive soit maximum.

2° Quand un système se déplace, le travail des forces agissantes est égal à la variation de l'énergie potentielle, d'après la définition même de celle-ci. Dans le cas d'un feuillet passant d'une position initiale, où le flux qui sort par sa face positive est Φ_1 et l'énergie $W_1 = -P\Phi_1$, à une position finale où ce flux est Φ_2 et l'énergie $W_2 = -P\Phi_2$, le travail des forces magnétiques est donc :

$$\mathcal{T} = W_1 - W_2 = P(\Phi_2 - \Phi_1).$$

$$\boxed{\mathcal{T} = P(\Phi_2 - \Phi_1)}$$

La question de signe a une importance telle que nous préciserons encore la convention adoptée : *Les flux sont considérés comme positifs lorsqu'ils sortent par la face positive.*

3° On démontre que le système de forces agissant sur un feuillet est équivalent à un système de forces appliquées aux divers éléments du contour.

Chaque élément ds *serait soumis à une force* df, *perpendiculaire au plan du champ $\vec{H}_0$ et de l'élément, et donnée par la formule $df = PH_0\, ds \sin\Theta$, P étant la puissance du feuillet et Θ l'angle du champ H_0 avec l'élément* ds. *Cette force est dirigée vers la gauche d'un observateur placé sur l'élément, dans le sens positif du contour* (§ 211), *et regardant dans le sens du champ.*

$$\boxed{df = PH_0\, ds \sin\Theta}$$

REMARQUE. — Si on considère l'élément ds comme un vecteur $\vec{ds}$ orienté dans le sens positif, le résultat précédent se traduit par la formule vectorielle :

$$\vec{df} = P[\vec{ds} \wedge \vec{H}_0],$$

la notation $[\vec{ds} \wedge \vec{H}_0]$ représentant le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{ds}$ et H_0.

217. — Unité électromagnétique C. G. S. de puissance de feuillet. — Dans la relation : $W = -P\Phi$, nous aurons $P = 1$, si nous avons en même temps $W = +1$ et $\Phi = -1$. Or, l'unité C. G. S. d'énergie est l'erg, et l'unité électromagnétique C. G. S. de flux est le maxwell. Nous pouvons donc donner la définition suivante :

L'unité électromagnétique C. G. S. de puissance de feuillet est la puissance d'un feuillet tel qu'il possède, dans un champ magnétique, une énergie potentielle d'un erg lorsque le flux qui sort par sa face négative ($\Phi = -1$) *est d'un maxwell.*

L'équation aux dimensions de cette unité est :

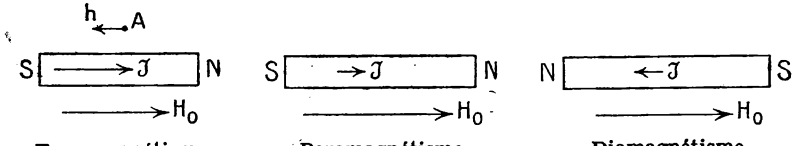
$$P = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

AIMANTATION PAR UN CHAMP MAGNÉTIQUE

218. — Etude qualitative. — Quand un corps quelconque est placé dans un champ magnétique $\vec{H}_0$, il s'aimante. Mais tandis qu'avec certains corps comme l'acier, l'aimantation est intense et se manifeste par l'attraction de la limaille de fer, avec la plupart des autres corps, l'aimantation est très faible et considérée pratiquement comme nulle. Les substances ont été classées, au point de vue de leur aimantation dans un champ magnétique, en trois groupes :

1° Les substances ferromagnétiques pour lesquelles l'aimantation acquise est grande et dirigée *dans le sens du champ* H_0. Un barreau placé dans un champ, parallèlement aux lignes de force, devient un aimant NS ayant ses pôles disposés comme l'indique la figure 209. Cet aimant crée, en un point A extérieur, un champ *h* dirigé en sens contraire du champ H_0. *h* s'appelle le *champ démagnétisant.*

Les substances ferromagnétiques sont le fer, le nickel, le cobalt, l'oxyde magnétique Fe_3O_4, la pyrrhotine de composition voisine de FeS, quelques combinaisons du manganèse — (qui n'est pas ferro-magnétique) — avec



Ferromagnétisme — Fig. 209 | Paramagnétisme — Fig. 210 | Diamagnétisme — Fig. 211

quelques métalloïdes comme l'azote, l'hydrogène. Enfin signalons les alliages des métaux ferromagnétiques et quelques alliages ternaires du manganèse comme l'alliage manganèse-cuivre-aluminium.

2° Les substances paramagnétiques pour lesquelles l'aimantation est

très faible et dirigée *dans le sens du champ*. C'est le cas de l'aluminium. Un barreau d'aluminium placé dans un champ parallèlement aux lignes de force devient un aimant NS *très faible* ayant ses pôles disposés comme l'indique la figure 210.

Les substances paramagnétiques sont l'oxygène, l'oxyde azotique, l'ozone, un grand nombre de métaux (platine, palladium, aluminium, chrome, manganèse) et enfin un grand nombre de sels comme $FeCl_3$.

3° Les SUBSTANCES DIAMAGNÉTIQUES pour lesquelles l'aimantation est très faible et dirigée en *sens contraire du champ*. C'est le cas du cuivre. Un barreau de cuivre placé dans un champ magnétique parallèlement aux lignes de force devient un aimant NS très faible ayant ses pôles disposés comme l'indique la figure 211.

Les substances diamagnétiques sont très nombreuses. Citons l'eau, tous les métalloïdes sauf l'oxygène, beaucoup de métaux (cuivre, argent, plomb, or) et la presque totalité des substances organiques. Signalons que l'étain gris est diamagnétique tandis que la variété courante est paramagnétique.

219. — ***Etude quantitative.*** — Le problème consiste dans l'établissement de la loi de variation de l'intensité d'aimantation $\mathcal{J}$ en fonction de l'intensité du champ H_0. Ce problème est très complexe dans le cas général.

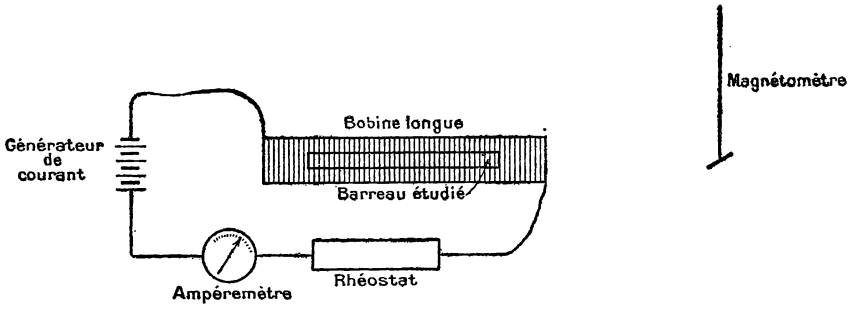


FIG. 212. — Mesure de l'aimantation.

Nous nous contenterons d'étudier l'aimantation du fer et des corps ferromagnétiques dans le cas très particulier suivant : *Le champ magnétique H^0 est uniforme, le barreau qui s'aimante est cylindrique. Sa longueur est très grande par rapport à ses dimensions latérales et l'axe du barreau est parallèle à H_0.*

Pour réaliser ces conditions, le barreau dont on veut étudier l'aimantation est placé suivant l'axe d'une bobine longue régulièrement enroulée (fig. 212) dans laquelle on peut faire passer un courant électrique variable à volonté. A une certaine distance est placé un magnétomètre destiné à la mesure relative (§ 203) du moment magnétique $\mathfrak{M}$ du barreau (1).

(1) Pour que le barreau seul ait une action sur le magnétomètre, il faut compenser l'action de la bobine par un *cadre compensateur* en série avec la bobine. L'ensemble cadre-bobine n'a aucune action sur le magnétomètre.

Si v est son volume, son intensité d'aimantation est $\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{M}}{v}$.

220. — ***Résultats. Saturation.*** — Il est commode, pour exprimer d'une manière précise les résultats, d'employer la représentation graphique (fig. 213). Nous portons en abscisses les valeurs de l'intensité du champ magnétique (en gauss), et en ordonnées les valeurs de l'intensité d'aimantation (en unités C. G. S.).

La loi de variation de l'aimantation du barreau avec l'intensité du champ magnétique est très complexe : elle dépend de l'état magnétique du barreau au début, et même de ses états antérieurs, et par suite aussi de la loi suivant laquelle on fait varier l'intensité du champ. Nous devons donc préciser tous ces points avant d'indiquer des résultats.

Pour que ces résultats soient suffisamment simples, nous supposons que le barreau n'est pas aimanté au début, et, en outre, qu'il se comporte comme s'il n'avait jamais été aimanté.

On réalise un tel état du barreau, même s'il a été aimanté antérieurement, en le chauffant vers 800°. Le fer perd, en effet, ses propriétés magnétiques à 775° ; à cette température et aux températures plus élevées, il n'est possible ni de l'aimanter, ni de l'attirer par un aimant, et il perd toute trace de magnétisme antérieur. En refroidissant à une température inférieure à 775°, il redevient susceptible de s'aimanter.

Enfin, nous supposons que l'intensité du champ magnétique qui produira l'aimantation part de zéro et va *constamment* en croissant.

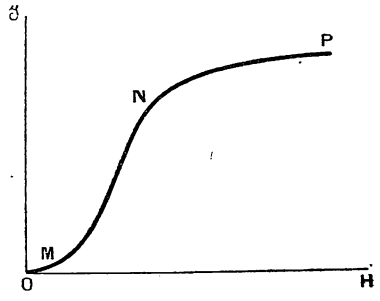


FIG. 213
Courbe de première aimantation.

Dans ces conditions la courbe représentative des résultats expérimentaux a la forme que représente la figure 213.

Nous y distinguons nettement trois régions OM, MN, NP, ayant des caractères différents.

1° Pour les *champs faibles* (ne dépassant pas quelques dixièmes de gauss), nous avons la partie OM, qui peut être confondue avec une droite passant par l'origine et ayant un coefficient angulaire relativement faible. Posons alors :

$$\mathfrak{I} = k\mathrm{H} \qquad (1)$$

Les lettres $\mathfrak{I}$ et H représentant des grandeurs de même nature, le coefficient k est un nombre abstrait, donc indépendant du système d'unités électromagnétique adopté, et constant dans les circonstances actuelles ; on l'appelle **susceptibilité magnétique** du métal. Sa valeur, variable avec la nature du métal, est de l'ordre de 100 pour les aciers doux industriels.

2° La partie MN du diagramme correspond à des champs dont l'intensité est comprise entre quelques dixièmes de gauss et quelques gauss. Elle monte beaucoup plus vite que la partie OM et, après une partie courbe, devient

sensiblement rectiligne sur une grande longueur. Nous pouvons encore appeler susceptibilité magnétique un coefficient k défini par la relation :

$$k = \frac{\mathcal{I}}{H},$$

mais comme $\mathcal{I}$ ne varie plus proportionnellement à H, la susceptibilité magnétique est alors variable avec l'intensité H du champ magnétique ; elle croît tout d'abord et peut atteindre une valeur (1) de l'ordre de 300 pour des champs de 4 à 5 gauss. L'intensité d'aimantation acquiert, dans ces conditions, des valeurs de l'ordre de 1200 à 1500.

3° Enfin, la partie NP du diagramme, qui correspond à des intensités de champ supérieures à quelques gauss, s'incurve d'abord rapidement, puis tend vers une asymptote horizontale. La susceptibilité magnétique tendrait vers zéro pour des intensités de champs magnétiques croissant indéfiniment.

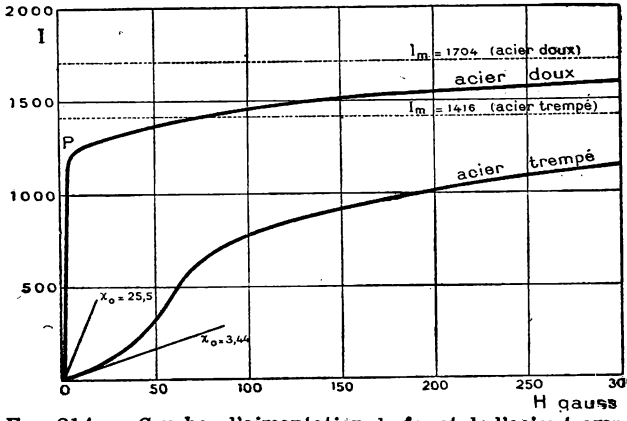


FIG. 214. — Courbes d'aimantation du fer et de l'acier trempé.

Il revient au même de dire que l'intensité d'aimantation métal ne peut pas dépasser une certaine valeur, quelque grande que devienne l'intensité du champ magnétique. Cette valeur limite $\mathcal{I}_m$ est de l'ordre de 1700 unités C. G. S. pour les aciers doux. Lorsque cette limite est près d'être atteinte, on dit que l'aimantation arrive à **saturation.**

Remarquons que ce phénomène de saturation est bien en accord avec l'hypothèse de l'existence de doublets (§ 174) dans le barreau avant son aimantation. Les doublets, dans ces dernières conditions, sont orientés également en tous sens, autrement dit leur répartition ne présente aucune direction privilégiée. Un champ magnétique de plus en plus intense oriente ensuite suivant sa direction un nombre de doublets croissant. L'intensité d'aimantation, croissante, ne peut évidemment dépasser la valeur qu'elle aurait si tous les doublets étaient orientés suivant la direction du champ.

La figure 214 représente les phénomènes à l'échelle indiquée, pour un échantillon d'acier doux et pour un échantillon d'acier trempé.

221. — ***Perméabilité magnétique.*** — Considérons le vecteur induction $\mathcal{B}$ en un point du barreau (§ 209). Dans les conditions particulières que nous étudions, le vecteur aimantation $\vec{\mathcal{I}}$ est en chaque point parallèle

(1) Les valeurs numériques sont exprimées en unités électromagnétiques C. G. S.

au vecteur champ magnétique H et de même sens que lui. L'induction $\vec{\mathfrak{B}}$ est alors égale à la somme : $H + 4\pi\mathfrak{I}$.

$$\mathfrak{B} = H + 4\pi\mathfrak{I},$$

ou, d'après la relation (1) du paragraphe précédent :

$$\mathfrak{B} = H(1 + 4\pi k),$$

Posons :

$$1 + 4\pi k = \mu, \qquad (2)$$

la relation devient :

$$\mathfrak{B} = \mu H.$$

Le facteur μ ainsi défini est la **perméabilité magnétique** du métal. La relation (2) montre que μ est, comme k, un nombre abstrait, donc indépendant du système d'unités électromagnétique choisi ; il dépend ou ne dépend pas de H dans les mêmes circonstances que k (§ 220).

Pour des valeurs suffisantes de k, on peut négliger 1 vis-à-vis de $4\pi k$, et μ devient alors sensiblement égal à 12,5 k : un acier pour lequel le maximum de k est de l'ordre de 400, possède un maximum de μ de l'ordre de 5000 U. E. M. C. G. S.

Enfin, pour les champs d'intensité infiniment grande, puisque k tend vers zéro, μ tend vers la limite 1.

*222. — **Hystérésis. Aimantation rémanente. Champ coercitif. Cycle d'aimantation.*** — Reprenons les déterminations du paragraphe 220 et, après avoir fait croître l'intensité du champ de zéro à une certaine valeur H_0, faisons-la décroître de H_0 à zéro.

Le point qui représente les résultats décrit dans ce dernier cas un diagramme PR (fig. 215) qui ne se superpose pas au premier. Pour une même valeur H de l'intensité du champ, l'intensité d'aimantation possède maintenant une valeur HK′ *plus grande* que sa valeur HK dans les premières expériences où le champ était croissant. Ce phénomène porte le nom d'**hystérésis** ; c'est un retard à la désaimantation.

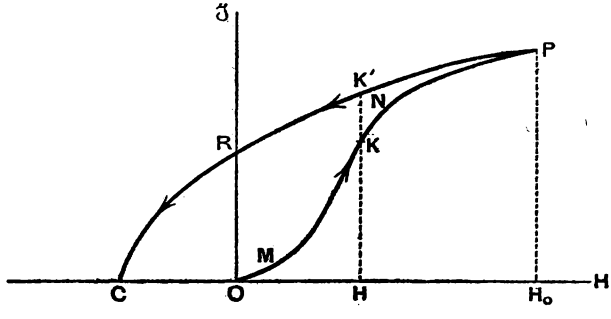


FIG. 215. — Hystérésis.

sensiblement rectiligne sur une grande longueur. Nous pouvons encore appeler susceptibilité magnétique un coefficient k défini par la relation :

$$k = \frac{\mathcal{J}}{H},$$

mais comme $\mathcal{J}$ ne varie plus proportionnellement à H, la susceptibilité magnétique est alors variable avec l'intensité H du champ magnétique ; elle croît tout d'abord et peut atteindre une valeur (1) de l'ordre de 300 pour des champs de 4 à 5 gauss. L'intensité d'aimantation acquiert, dans ces conditions, des valeurs de l'ordre de 1200 à 1500.

3° Enfin, la partie NP du diagramme, qui correspond à des intensités de champ supérieures à quelques gauss, s'incurve d'abord rapidement, puis tend vers une asymptote horizontale. La susceptibilité magnétique tendrait vers zéro pour des intensités de champs magnétiques croissant indéfiniment.

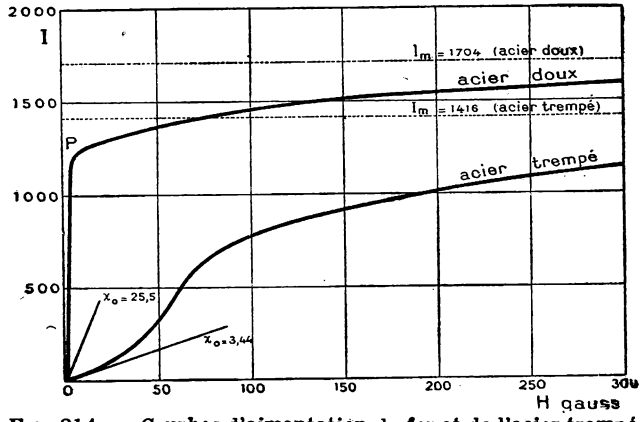


FIG. 214. — Courbes d'aimantation du fer et de l'acier trempé.

Il revient au même de dire que l'intensité d'aimantation métal ne peut pas dépasser une certaine valeur, quelque grande que devienne l'intensité du champ magnétique. Cette valeur limite $\mathcal{J}_m$ est de l'ordre de 1700 unités C. G. S. pour les aciers doux. Lorsque cette limite est près d'être atteinte, on dit que l'aimantation arrive à **saturation.**

Remarquons que ce phénomène de saturation est bien en accord avec l'hypothèse de l'existence de doublets (§ 174) dans le barreau avant son aimantation. Les doublets, dans ces dernières conditions, sont orientés également en tous sens, autrement dit leur répartition ne présente aucune direction privilégiée. Un champ magnétique de plus en plus intense oriente ensuite suivant sa direction un nombre de doublets croissant. L'intensité d'aimantation, croissante, ne peut évidemment dépasser la valeur qu'elle aurait si tous les doublets étaient orientés suivant la direction du champ.

La figure 214 représente les phénomènes à l'échelle indiquée, pour un échantillon d'acier doux et pour un échantillon d'acier trempé.

221. — ***Perméabilité magnétique.*** — Considérons le vecteur induction $\mathcal{B}$ en un point du barreau (§ 209). Dans les conditions particulières que nous étudions, le vecteur aimantation $\vec{\mathcal{J}}$ est en chaque point parallèle

(1) Les valeurs numériques sont exprimées en unités électromagnétiques C. G. S.

au vecteur champ magnétique H et de même sens que lui. L'induction $\vec{\mathfrak{B}}$ est alors égale à la somme : $H + 4\pi\mathfrak{I}$.

$$\mathfrak{B} = H + 4\pi\mathfrak{I},$$

ou, d'après la relation (1) du paragraphe précédent :

$$\mathfrak{B} = H(1 + 4\pi k),$$

Posons :

$$1 + 4\pi k = \mu, \qquad (2)$$

la relation devient :

$$\mathfrak{B} = \mu H.$$

Le facteur μ ainsi défini est la **perméabilité magnétique** du métal. La relation (2) montre que μ est, comme k, un nombre abstrait, donc indépendant du système d'unités électromagnétique choisi ; il dépend ou ne dépend pas de H dans les mêmes circonstances que k (§ 220).

Pour des valeurs suffisantes de k, on peut négliger 1 vis-à-vis de $4\pi k$, et μ devient alors sensiblement égal à 12,5 k : un acier pour lequel le maximum de k est de l'ordre de 400, possède un maximum de μ de l'ordre de 5000 U. E. M. C. G. S.

Enfin, pour les champs d'intensité infiniment grande, puisque k tend vers zéro, μ tend vers la limite 1.

*222. — **Hystérésis. Aimantation rémanente. Champ coercitif. Cycle d'aimantation.*** — Reprenons les déterminations du paragraphe 220 et, après avoir fait croître l'intensité du champ de zéro à une certaine valeur H_0, faisons-la décroître de H_0 à zéro.

Le point qui représente les résultats décrit dans ce dernier cas un diagramme PR (fig. 215) qui ne se superpose pas au premier. Pour une même valeur H de l'intensité du champ, l'intensité d'aimantation possède maintenant une valeur HK′ *plus grande* que sa valeur HK dans les premières expériences où le champ était croissant. Ce phénomène porte le nom d'**hystérésis** ; c'est un retard à la désaimantation.

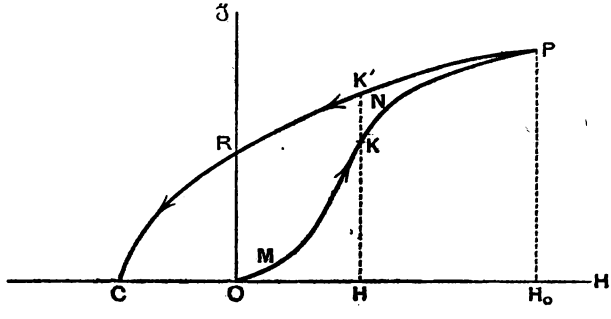


FIG. 215. — Hystérésis.

En particulier, lorsque l'intensité du champ redevient nulle, le point figuratif est en R : le barreau conserve une aimantation notable. On peut annuler ensuite cette intensité d'aimantation en plaçant le barreau dans un champ magnétique de sens contraire au premier, et dont l'intensité est représentée par OC.

L'hystérésis donne une très grande complexité au phénomène d'aimantation et, d'une manière générale, nous pouvons dire que l'aimantation prise

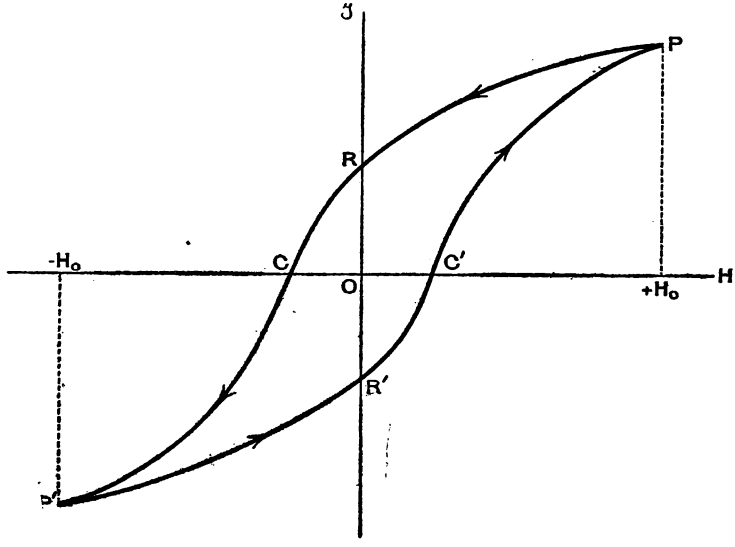


FIG. 216. — Cycle d'hystérésis.

par un barreau dans un champ dépend non seulement de celui-ci, mais de toute la série des champs dans lesquels il fut antérieurement placé.

On ne peut énoncer facilement les résultats que dans des cas très particuliers, où la variation de l'intensité du champ se fait suivant une loi simple.

Convenons, pour la commodité du langage, d'affecter l'intensité du champ d'un signe lié à son sens et supposons, par exemple, qu'on fasse varier cette intensité alternativement de $+ H_0$ à $- H_0$ et de $- H_0$ à $+ H_0$, puis qu'on répète ces opérations un certain nombre de fois. Les diagrammes représentatifs des résultats, *d'abord distincts*, finissent, après un certain nombre de cycles, par se superposer suivant une courbe fermée symétrique PRCP'R'C'P (fig. 216).

L'aimantation représentée par l'ordonnée OR, qui correspond à un champ nul, s'appelle **aimantation rémanente.** Le champ nécessaire pour annuler cette aimantation, représenté par l'abscisse OC, est appelé **champ coercitif.** L'ensemble des états successifs du barreau, représenté par la courbe fermée PRCP'R'C'P, constitue un *cycle d'aimantation* ou cycle d'hystérésis.

La trempe de l'acier augmente le champ coercitif et par suite écarte dans le sens horizontal les deux branches de la courbe fermée. En même temps

l'aimantation rémanente décroît en général. Par exemple prenons 200 gauss comme valeur extrême du champ dans chacun des deux sens. Nous trouvons, pour un acier trempé, une aimantation rémanente dont l'intensité est de l'ordre de 600 unités C. G. S. qui exige, pour disparaître, un champ de sens inverse de l'ordre de 50 gauss ; pour un acier doux, recuit plusieurs fois, le champ coercitif n'est plus que d'un gauss environ. C'est ce que représentent les diagrammes $P_1R_1C_1P'_1R'_1C'_1P_1$ et $P_2R_2C_2P'_2R'_2C'_2P_2$ de la figure 217.

Pendant le parcours d'un cycle d'aimantation une certaine quantité d'énergie électrique se transforme en énergie calorifique dans l'acier ; elle est

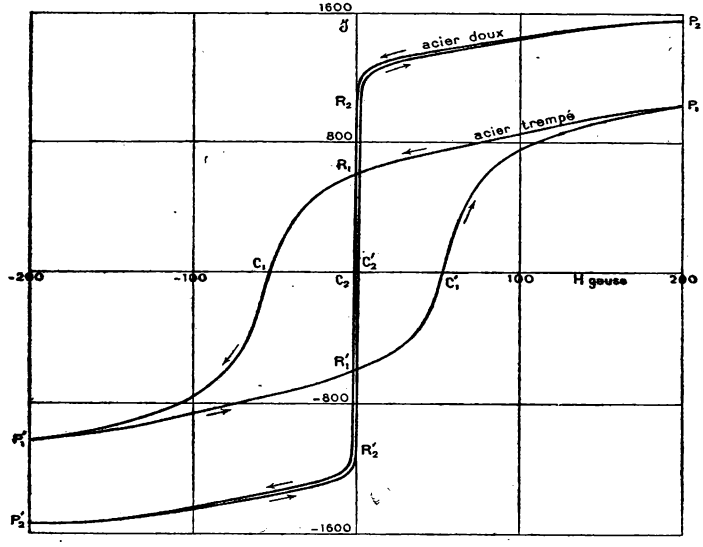


FIG. 217. — Cycles d'hystérésis de l'acier doux et de l'acier trempé.

représentée, en valeur relative, par l'aire comprise entre les deux branches PRCP' et P'R'C'P de la courbe fermée. Ce phénomène, à peine sensible pour les aciers très doux, est très accentué pour les aciers trempés.

Pratiquement, on calcule l'énergie W dépensée par hystérésis par unité de volume, par la formule empirique dite *formule de Steinmetz*

$$W = \eta \mathcal{B}^{1,6}$$

η étant un coefficient caractéristique de la substance. Pour l'acier trempé $\eta = 0{,}0337$ tandis que pour l'acier doux $\eta = 0{,}00054$ [1].

223. — ***Applications.*** — Les aciers des *électro-aimants* employés dans un grand nombre d'appareils industriels (dynamos, transformateurs), sont soumis à des champs magnétiques alternatifs. Pour éviter les pertes d'énergie électrique dues à l'hystérésis, on utilise alors des aciers très doux.

[1] Les valeurs numériques de η correspondent à W et $\mathcal{B}$ exprimés en unités C. G. S

Au contraire, les *aimants permanents* sont constitués par des aciers trempés. La qualité recherchée est alors un champ coercitif considérable plutôt qu'une forte aimantation rémanente. Il est essentiel en effet que cette aimantation ne puisse être détruite que par des champs inverses très intenses. Un champ démagnétisant peut être produit, en particulier, par les pôles mêmes de l'aimant ; aussi doit-on, pour la conservation des aimants permanents, les disposer de manière qu'ils forment un circuit magnétique fermé, c'est-à-dire dépourvu de pôles.

De tels aimants sont utilisés dans un certain nombre d'appareils de mesure (galvanomètres, ampèremètres et voltmètres, compteurs) et dans des appareils industriels tels que les magnétos d'allumage des moteurs à explosion. Des aciers au tungstène, trempés, peuvent avoir un champ coercitif de 70 gauss, avec une aimantation rémanente de l'ordre de 800 ; des aciers au cobalt peuvent avoir un champ coercitif de l'ordre de 200 gauss.

Exercices.

56. Un petit aimant est suspendu horizontalement au moyen d'un fil de cocon sans torsion. Sous l'influence du champ terrestre seul, il fait N = 100 oscillations complètes par minute. Cet aimant a 2 cm de longueur, une section carrée de 4 mm de côté et pèse 2,5 g. Quelle est l'intensité moyenne d'aimantation $\mathcal{J}$? Quelle quantité de magnétisme μ peut-on supposer concentrée aux extrémités tenant lieu de pôles ? Intensité du champ terrestre : $H_0 = 0{,}2$ gauss.

Réponse : $\mathcal{J} = 1500$; $\mu = 240$.

57. Un feuillet magnétique de puissance P = 10 C. G. S. est limité par un contour circulaire de centre O et de rayon R = 20 cm. Calculer le potentiel créé par ce feuillet en un point A situé sur la normale en O au plan du cercle et à la distance OA = 10 cm. En déduire le champ magnétique au point A.

CINQUIÈME PARTIE

ÉLECTROMAGNÉTISME

CHAPITRE XXV

LOIS FONDAMENTALES DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

224. — ***Phénomènes généraux.*** — On groupe sous le nom d'*électromagnétisme* l'ensemble des actions qui s'exercent entre les aimants et les circuits conducteurs. Cette étude comprendra trois parties :

1° Etude du champ magnétique produit par un circuit parcouru par un courant ;

2° Etude des forces agissant sur un circuit parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique ;

3° Etude des courants produits dans un circuit conducteur quand on fait varier le flux magnétique qui le traverse. Ce sont les phénomènes d'*induction électromagnétique.*

Ces études ne sont pas indépendantes. Prenons par exemple une masse magnétique placée au voisinage d'un circuit. Cette masse magnétique exerce, par son champ, une action sur le circuit. D'après le principe qu'il n'existe pas d'action sans une réaction en sens contraire, le circuit doit exercer sur la masse magnétique une force, ce qui revient à dire qu'il crée un champ magnétique.

225. — ***Lois fondamentales.*** — Les lois de l'électromagnétisme ont été suggérées par l'expérience, mais nous les admettrons comme lois fondamentales justifiées par le fait qu'elles conduisent à des résultats confirmés par l'expérience. En particulier, toutes les mesures effectuées avec les galvanomètres à aimant mobile ou à cadre mobile constituent des vérifications de ces lois.

1re Loi fondamentale d'Ampère. — Elle a été indiquée par Ampère qui a comparé les propriétés magnétiques des circuits et des feuillets magnétiques. Il a été amené à concevoir la possibilité de trouver un feuillet

magnétique équivalent à un circuit donné. La loi d'Ampère précise cette équivalence.

Le vecteur ***champ magnétique*** *créé en un point quelconque de l'espace par un circuit parcouru par un courant est identique au vecteur* ***induction magnétique*** *créé en ce point par un feuillet magnétique de forme quelconque satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° *Le feuillet a pour contour le circuit considéré ;*

2° *Le sens positif du contour* (§ 211) *est le sens du courant ;*

3° *La puissance P du feuillet est proportionnelle à l'intensité* i *du courant, le facteur de proportionnalité dépendant des unités choisies.*

Par suite nous avons $i = kP$, k dépendant des unités. Dans les systèmes électromagnétiques, on a choisi $k = 1$, ce qui définit l'unité d'intensité de courant.

L'unité électromagnétique C. G. S. d'intensité de courant est l'intensité d'un courant équivalent à un feuillet de même contour dont la puissance est égale à l'unité électromagnétique C. G. S. de puissance de feuillet.

Cette unité vaut très sensiblement 10 ampères. L'équation aux dimensions d'une intensité de courant dans un système électromagnétique est la même que celle d'une puissance de feuillet (§ 217) :

$$I = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

2e Loi fondamentale d'Ampère. — Elle est analogue à la précédente mais se rapporte aux actions entre les courants et les aimants.

Pour calculer les actions qui s'exercent entre un aimant et un circuit parcouru par un courant, on peut remplacer le circuit par un feuillet magnétique dont le contour est le circuit lui-même, dont le sens positif du contour (§ 211) *est le sens du courant et dont la puissance est numériquement égale à l'intensité du courant* (*exprimée en U. E. M.*)

Nous considérons encore cette loi comme fondamentale ; nous l'admettons sans démonstration, elle est justifiée par la vérification expérimentale de ses conséquences.

Ces deux lois fondamentales rattachent l'étude de l'électromagnétisme aux feuillets. D'ailleurs, la notion de feuillet a été imaginée par Ampère dans ce but. On appelle *face nord ou positive* d'un circuit, la face nord du feuillet équivalent.

226. — ***Lois élémentaires.*** — Nous pouvons déduire des résultats obtenus dans l'étude des feuillets, les deux lois fondamentales suivantes appelées lois de Laplace.

1re Loi de Laplace. — Nous avons vu (§ 213) que le champ créé par un feuillet pouvait être considéré comme la somme géométrique des champs

créés par les différents éléments du contour. Chaque élément *ds* créant à la distance *r* un champ $dh = \frac{P\,ds\,\sin\Theta}{r^2}$ (§ 213).

Considérons maintenant un circuit parcouru par un courant *i* U.E.M. D'après la loi d'Ampère, il est équivalent à un feuillet de même contour et de puissance P = *i*. Donc :

Le champ magnétique créé par un circuit parcouru par un courant i *en un point A* PEUT ÊTRE CONSIDÉRÉ *comme la résultante des champs créés par les éléments du circuit.*

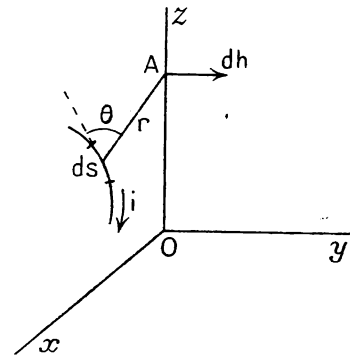


FIG. 218

Chaque élément de longueur ds *crée au point A* (fig. 218), *situé à la distance* r *dans une direction faisant l'angle* Θ *avec cet élément, un* ***champ élémentaire*** dh, ***perpendiculaire au plan défini par l'élément*** ds ***et le point A*** ; *dirigé vers la gauche d'un observateur, placé sur l'élément de façon que le courant lui entre par les pieds et lui sorte par la tête, et regardant le point A.* ***L'intensité de ce champ élémentaire est donnée par la formule*** :

$$dh = \frac{i\,ds\,\sin\Theta}{r^2}$$

l'intensité *i* étant exprimée en unités électromagnétiques.

2e LOI DE LAPLACE. — Elle se rapporte à l'action d'un champ magnétique H_0 sur un circuit parcouru par un courant. Nous avons vu (§ 216) l'action d'un champ magnétique sur un feuillet. Remplaçons le feuillet par le circuit équivalent, nous obtenons la 2e loi de Laplace.

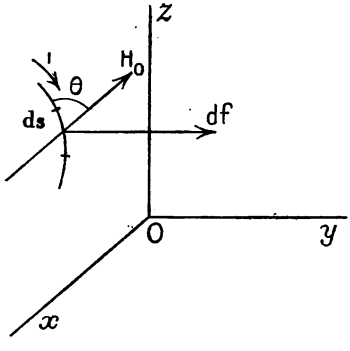


FIG. 219

Le système de forces agissant sur un circuit parcouru par un courant *i* U.E.M. et placé dans un champ magnétique H_0 est équivalent à un système de forces appliquées aux différents éléments du circuit.

Chaque élément ds ***est soumis à une force*** df, ***perpendiculaire au plan défini par l'élément et le champ*** (fig. 219). ***La valeur de cette force est donnée par la formule*** :

$$df = i\,H_0\,ds\,\sin\Theta$$

i *étant l'intensité du courant en unités électromagnétiques et* Θ *l'angle du champ* H_0 *avec l'élément de courant. Cette force* df *est dirigée vers la gauche d'un observateur placé sur l'élément* ds, *le courant lui entrant par les pieds et lui sortant par la tête, et regardant dans le sens du champ* H_0.

REMARQUES. — 1° Une vérification expérimentale *directe* de la première loi de Laplace est impossible puisqu'on ne peut pas réaliser un élément de courant isolé. Cette loi doit être considérée comme une loi élémentaire sans valeur physique dont l'application à un circuit *complet* donne un champ magnétique résultant identique au champ que crée réellement le circuit au point considéré.

Au contraire, la deuxième *loi de Laplace peut être vérifiée expérimentalement* parce qu'on peut, par des contacts liquides par exemple, ne rendre mobile qu'un élément d'un circuit total sans qu'il en résulte une rupture de courant. Des expériences de ce genre seront décrites au chapitre XXVII, *elles sont en accord avec la loi de Laplace.*

2° Les deux lois de Laplace peuvent servir de base à l'étude de l'électromagnétisme et être adoptées comme lois fondamentales. On évite ainsi l'introduction de la notion de feuillet magnétique. Les feuillets magnétiques n'étant pas explicitement au programme de la classe de Mathématiques spéciales, ***nous exposerons l'électromagnétisme en prenant les deux lois de Laplace comme lois fondamentales.*** Pourtant nous montrerons parfois comment les résultats obtenus pour les feuillets s'appliquent facilement à l'électromagnétisme.

227. — ***Unités électromagnétiques et unités pratiques.*** — Nous avons vu jusqu'ici trois unités d'intensité de courant :

1° L'unité électrostatique C. G. S. définie par la formule $i = \frac{dq}{dt}$ et ayant pour équation aux dimensions (§ 114) :

$$I = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$$

2° L'ampère qui est une unité électromagnétique faisant partie du système pratique d'unités électriques ;

3° L'unité électromagnétique C. G. S. définie par la relation $P = i$ et ayant pour équation aux dimensions (§ 225) :

$$I = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

On avait choisi l'ampère en déterminant la masse d'argent déposée en une seconde par un courant d'intensité égale à 0,1 U. E. M. On avait trouvé 1,1180 mg.

Des mesures récentes ont montré qu'un courant de 1 U. E. M. déposait par seconde, non pas 11,180 mg d'argent, mais 11,183 mg. Nous devons donc distinguer l'*ampère légal* qui est l'intensité d'un courant qui dépose 1,1180 mg d'argent par seconde et l'*ampère théorique* qui serait égal au dixième de l'unité électromagnétique C. G. S. d'intensité. La différence entre l'ampère légal et l'ampère théorique est tellement faible qu'elle peut être négligée dans la plupart des cas.

Quant à l'unité électrostatique C. G. S., elle est très petite. L'unité électromagnétique C. G. S. vaut 3×10^{10} fois l'unité électrostatique C. G. S. Ce nombre 3×10^{10} est la valeur numérique de la vitesse de la lumière dans le système C. G. S. Ce résultat remarquable trouvé expérimentalement est expliqué par la théorie électromagnétique de la lumière de Maxwell.

Pour la suite, le résultat essentiel à retenir c'est que **l'unité électromagnétique C. G. S. vaut 10 ampères.**

Dans la suite du cours, nous représenterons par i, i' ... les intensités de courant exprimées en unités électromagnétiques C. G. S. et par I I', . . les mêmes intensités exprimées en ampères. Nous avons :

$$I^a = 10\, i_{\text{U.E.M}} \qquad I'^a = 10\, i'_{\text{U.E.M.}}$$

CHAPITRE XXVI

CHAMP MAGNÉTIQUE PRODUIT PAR UN COURANT ÉLECTRIQUE

228. — ***Existence du champ magnétique d'un courant.*** — La production d'un champ magnétique par un courant électrique fut découverte par Oersted (1820). Son expérience, très simple, consiste à disposer un fil métallique XY (fig. 220) parallèlement à une aiguille aimantée horizontale *ab*, mobile autour d'un axe vertical et en équilibre sous l'action du champ magnétique terrestre. Lorsqu'on lance un courant dans le fil XY, l'aiguille dévie, *donc le courant crée un champ magnétique.*

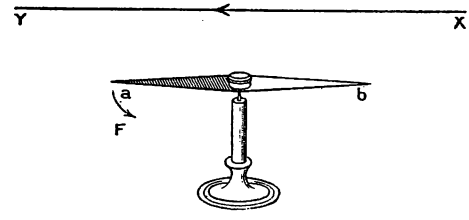


FIG. 220. — Expérience d'Œrsted.

A l'équilibre, l'aiguille est alors orientée par le champ résultant du champ terrestre et du nouveau champ créé par l'aimant.

Le champ magnétique produit par un courant exerce des actions identiques à celles du champ magnétique dû à des barreaux aimantés. Comme lui, il agit sur des aimants, il produit des spectres magnétiques s'il est assez intense, il agit sur les courants.

C'est cette identité entre les propriétés du champ magnétique dû à des courants et du champ magnétique dû à des aimants qui fait l'intérêt de la notion de champ magnétique.

229. — ***Loi fondamentale.*** — Pour supprimer les actions du champ terrestre et de la pesanteur, Ampère réalisa une aiguille aimantée mobile autour d'un axe parallèle au champ terrestre et passant par le centre de gravité de l'aiguille. En approchant un fil parcouru par un courant, on constate que la première loi de Laplace (§ 226) est vérifiée. C'est cette loi qui nous servira de loi fondamentale pour étudier les champs magnétiques des courants. Rappelons-en l'énoncé :

1° AU POINT DE VUE QUALITATIF, **le champ magnétique créé par un élément de courant** ds **en un point** A **est perpendiculaire au plan défini par l'élément et le point** A. **Il est dirigé vers la gauche d'un observateur placé sur le fil, le courant lui entrant par les pieds et lui sortant par la tête, et regardant le point** A.

Un tel observateur s'appellera dans la suite : *observateur d'Ampère.*

2° AU POINT DE VUE QUANTITATIF, **le champ dh produit à la distance r dans une direction faisant l'angle Θ avec l'élément de courant est donné par la formule :**

$$dh = \frac{i\,ds\,\sin\Theta}{r^2}$$

230. — Principe des courants sinueux. — La loi de Laplace peut prendre une forme vectorielle. D'après le sens et la valeur du champ $\vec{dh}$, nous pouvons considérer le vecteur champ $\vec{dh}$ comme le produit vectoriel de deux vecteurs : l'un $\frac{\vec{I}}{r^2}$ dirigé suivant AM (fig. 221), l'autre $i\vec{ds}$ passant par A et parallèle à l'élément de courant :

$$\vec{dh} = \left[\frac{\vec{I}}{r^2} \wedge i\vec{ds}\right]$$

Par suite, d'après les propriétés des produits vectoriels, nous pouvons remplacer le vecteur $\vec{ds}$ par d'autres vecteurs dont il est la somme géométrique, par exemple par ses composantes suivant trois axes de coordonnées. D'où le résultat suivant connu sous le nom de :

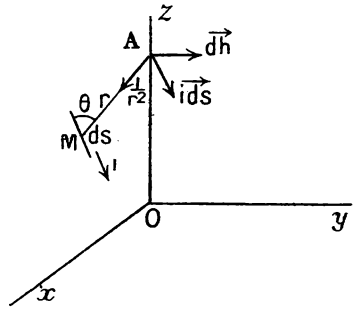


FIG. 221

PRINCIPE DES COURANTS SINUEUX : *Le champ magnétique créé par un élément de courant* $\vec{ds}$ *est égal à la somme géométrique des champs créés par ses composantes.*

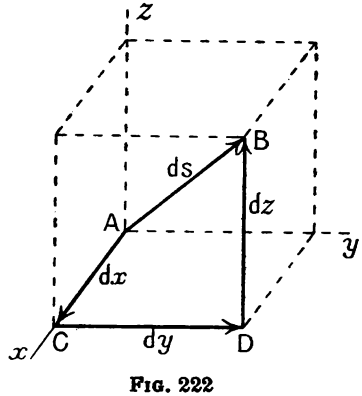


FIG. 222

Le courant rectiligne AB est équivalent au courant sinueux ACDB à condition que l'on calcule son action en un point M situé à une distance *r* grande par rapport aux composantes (fig. 222).

231. — Champ magnétique d'un courant rectiligne. — 1° ETUDE EXPÉRIMENTALE. — Disposons verticalement un fil XY de quelques mètres de longueur dans lequel nous ferons passer un courant d'au moins une dizaine d'ampères. Les extrémités de la partie rectiligne verticale sont reliées à un générateur de courant. Ces nouvelles parties du

circuit ne produisent pas d'effet appréciable au voisinage du milieu O du fil XY (fig. 223).

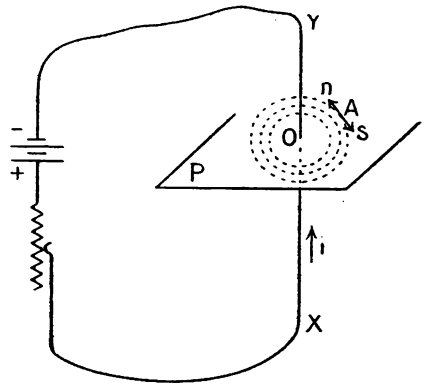


FIG. 223

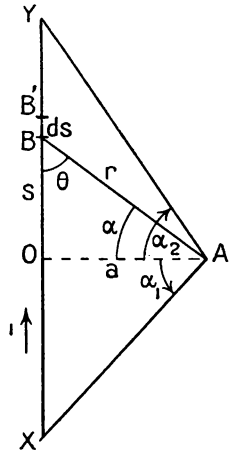


FIG. 224

Formons le spectre de limaille sur un carton horizontal P percé d'un orifice O pour le passage du fil. Le carton P est placé environ au milieu du fil rectiligne XY.

Si nous faisons passer le courant, le spectre se forme nettement et les lignes de limaille sont des circonférences de centre O. Si nous plaçons une aiguille aimantée en un point quelconque A d'une de ces circonférences, nous observons que cette aiguille horizontale s'oriente tangentiellement au cercle et a son pôle nord dirigé vers la gauche d'un observateur d'Ampère placé sur XY et regardant en A.

Ces résultats sont en accord avec la loi de Laplace.

2° CALCUL DU CHAMP EN UN POINT. — Nous appliquerons la première loi de Laplace aux différents éléments du fil.

Prenons comme plan de figure le plan défini par le fil rectiligne XY et le point A où nous voulons calculer le champ.

Remarquons d'abord que les champs élémentaires au point A, dus à tous les éléments de courant pris sur XY, sont des vecteurs perpendiculaires au plan de figure et dirigés en arrière (fig. 224). Par suite l'intensité H du champ résultant sera la somme *algébrique* des intensités des champs produits par les éléments.

Soit *ds* la longueur d'un élément BB' situé à la distance OB = *s* du pied O de la perpendiculaire abaissée de A sur le fil XY. Posons OA = *a*. Nous avons (§ 229) :

$$dH = \frac{i\,ds\,\sin\Theta}{r^2}.$$

Prenons comme variable l'angle $\widehat{OAB} = \alpha$ et exprimons toutes les grandeurs en fonction de α.

Nous avons : $s = OB = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $\sin\Theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$, $r = \frac{a}{\cos\alpha}$,

$ds = a\,d(\mathrm{tg}\,\alpha) = \frac{a\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$. D'où : $dH = \frac{i}{a}\cos\alpha\,d\alpha$.

Le champ total H produit par le fil XY, dont les extrémités X et Y correspondent aux valeurs algébriques α_1 et α_2 de l'angle α, sera :

$$H = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{i}{a}\cos\alpha\,d\alpha$$

$$\boxed{H = \frac{i}{a}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1).} \qquad (1)$$

Dans le cas d'un courant rectiligne indéfini, nous avons $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ et la formule précédente devient :

$$H = \frac{2i}{a}.$$

REMARQUE. — La formule (1) et la formule précédente supposent toutes les grandeurs évaluées en unités électromagnétiques. Si nous exprimons l'intensité en ampères et les autres grandeurs en unités électromagnétiques C. G. S., nous avons $H = \frac{1}{10\,a}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$ et $H = \frac{2\,I}{10\,a}$

3° EXPÉRIENCES DE BIOT ET SAVART. — La comparaison expérimentale des valeurs de l'intensité H du champ produit par un courant rectiligne dans diverses circonstances fut effectuée par Biot et Savart par la méthode des oscillations.

Nous avons vu au paragraphe 205 qu'en faisant osciller une aiguille aimantée dans le champ terrestre H_0 et dans les champs $(H_1 + H_0)$ et $(H_2 + H_0)$, on obtenait des périodes d'oscillations T_0, T_1 et T_2 telles que :

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{\frac{1}{T_2^2} - \frac{1}{T_0^2}}{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_0^2}}.$$

Nous pouvons ainsi comparer $\frac{H_2}{H_1}$ soit au rapport $\frac{i_2}{i_1}$ des intensités, pour une valeur donnée de la distance a, soit au rapport $\frac{a_2}{a_1}$ des distances pour une valeur donnée de l'intensité i.

Biot et Savart ont fait deux séries d'expériences. Les intensités étaient mesurées avec un voltamètre. Ils ont énoncé la loi suivante appelée généralement LOI DE BIOT ET SAVART :

L'intensité du champ magnétique produit par un courant rectiligne en un point est :

1° *proportionnelle à l'intensité* i *du courant* ;

2° *inversement proportionnelle à la distance* a *du point au fil.*

Les formules déduites de la loi de Laplace sont en accord avec ces résultats expérimentaux.

REMARQUE. — Notons qu'au point de vue chronologique les expériences de Biot et Savart sont antérieures à la loi de Laplace. C'est d'ailleurs pour interpréter ces résultats expérimentaux que Laplace a énoncé la loi élémentaire que nous avons adoptée comme loi fondamentale.

232. — ***Courants angulaires.*** — Soit un courant d'intensité i (fig. 225) qui parcourt successivement les fils rectilignes XO et OY indéfinis. Déterminons par le calcul le champ en un point B situé sur la bissectrice de l'angle XOY à une distance b du sommet.

Les champs produits en B par les courants rectilignes XO et OY sont tous deux perpendiculaires au plan de figure et dirigés en arrière. Ils ont des intensités égales par raison de symétrie.

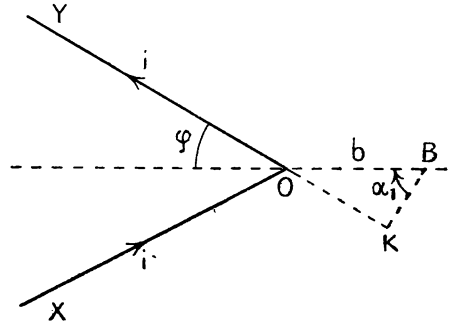


FIG. 225. — Courants angulaires.

D'après la formule (1) du paragraphe précédent, la portion OY crée en B un champ d'intensité :

$$h = \frac{i}{KB}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\alpha_1\right)$$

Or $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $\sin\alpha_1 = \cos\varphi$, et $KB = b\sin\varphi$.

$$h = \frac{i\,(1 - \cos\varphi)}{b\sin\varphi}.$$

Le champ total créé par l'ensemble XOY sera :

$$H = 2h = \frac{2i}{b}\left(\frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}\right)$$

$$H = \frac{2i}{b}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

EXPÉRIENCES DE BIOT ET SAVART. — Biot et Savart ont étudié expérimentalement cette question par la même méthode que pour un courant rectiligne (§ 231). Ils ont fait trois séries d'expériences :

1° Ils firent varier i en laissant b et φ constants ;

2° Ils firent varier b en laissant i et φ constants ;

3° Ils firent varier φ en laissant i et b constants.

Ils ont trouvé que :

L'intensité du champ magnétique au point considéré est proportionnelle à l'intensité du courant, inversement proportionnelle à la distance b *du point au sommet de l'angle, et enfin proportionnelle à* $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

Ces résultats expérimentaux sont en accord avec ceux qui se déduisent de la formule de Laplace.

REMARQUE. — Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, nous obtenons un courant rectiligne indéfini. Nous avons alors $\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = 1$ et $H = \frac{2i}{b}$. Nous retrouvons bien la formule établie au paragraphe précédent.

233. — ***Champ magnétique d'un courant circulaire.*** — 1° ETUDE EXPÉRIMENTALE. — Prenons une spire circulaire de centre C dans laquelle nous ferons passer un courant d'au moins dix ampères. Formons le spectre de limaille sur un carton horizontal dont le plan passe par C. Le spectre a la forme indiquée sur la figure 226. La droite OO′ est la trace du plan du circuit supposé perpendiculaire au plan de figure. La flèche représente le sens du courant dans la partie qui est en avant de la figure.

Très près des points O et O′, les lignes de force sont sensiblement des circonférences de centre O et O′, la ligne de force passant par C est une droite perpendiculaire au plan du cercle ainsi que le fait prévoir d'ailleurs la symétrie.

Pour avoir le sens des lignes de force, nous placerons en un point une petite aiguille aimantée suspendue à un fil sans torsion. Le sens trouvé, qui va du pôle sud au pôle nord de l'aiguille, est celui qu'indique la figure. Il concorde avec celui que l'on peut déduire de la loi fondamentale de Laplace. Le champ en chaque point se dirige vers la gauche de l'observateur d'Ampère regardant ce point.

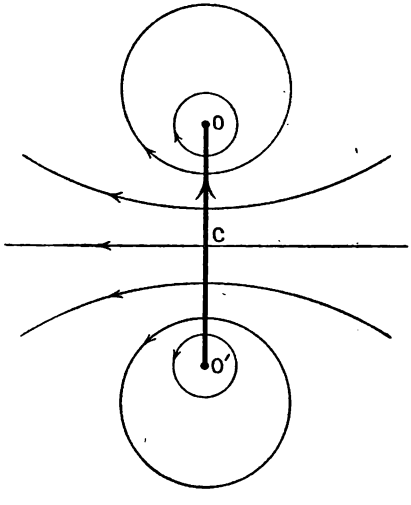


FIG. 226

Nous pouvons, dans le cas actuel, remplacer la règle précédente par une autre règle équivalente dite règle du tire-bouchon.

RÈGLE DU TIRE-BOUCHON DE MAXWELL :

Le sens des lignes de force est le sens dans lequel progresse un tire-bouchon placé normalement au plan de la spire quand on le fait tourner dans le sens du courant.

2° CALCUL DU CHAMP EN UN POINT DE L'AXE. — Soit la spire circulaire de centre C et de rayon R. Calculons, en appliquant la loi de Laplace, le

champ magnétique créé au point A de l'axe (fig. 227) situé à la distance CA = x du centre de la spire.

Par raison de symétrie, le champ en A est dirigé suivant l'axe CA. Son sens est donné par la règle du tire-bouchon par exemple. Son intensité H peut être calculée en faisant la somme algébrique des projections dh_1 sur CA des champs élémentaires dh produits par les éléments du circuit.

Considérons un élément BB′ de longueur ds situé à la distance d du point A. Il crée en A un champ dh perpendiculaire au plan ABB′ et dont l'intensité est donnée par la loi de Laplace :

$$dh = \frac{i\,ds\,\sin\Theta}{d^2}.$$

Or $\Theta = \frac{\pi}{2}$. D'où :

$$dh = \frac{i\,ds}{d^2}.$$

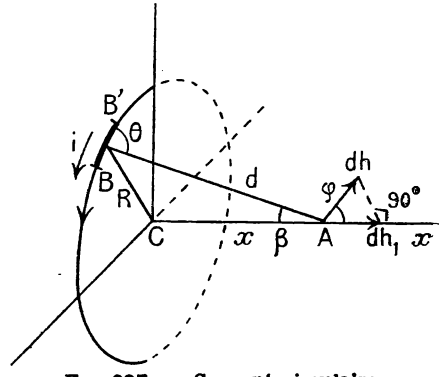


Fig. 227. — Courant circulaire.

La composante dh_1 de ce champ suivant l'axe sera :

$$dh_1 = dh\cos\varphi = \frac{i\,ds\cos\varphi}{d^2}.$$

Posons $\widehat{BAC} = \beta$, nous avons $\cos\varphi = \sin\beta$, et $d = \frac{R}{\sin\beta}$

$$dh_1 = \frac{i}{R^2}\sin^2\beta\,ds.$$

Le champ total en A sera :

$$H = \int dh_1 = \frac{i}{R^2}\sin^2\beta\int ds = \frac{i}{R^2}\sin^2\beta \times 2\pi R.$$

$$\boxed{H = \frac{2\pi i}{R} \times \sin^2\beta}$$

Si nous voulons garder comme variable la distance CA = x, il suffit de remplacer $\sin\beta$ par sa valeur en fonction de x :

$$\sin\beta = \frac{R}{d} = \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}} = \left(1+\frac{x^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$H = \frac{2\pi i}{R} \times \left(1+\frac{x^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

Cas particulier. — Lorsque le point A est au centre C, nous avons $x = 0$. D'où $H = H_0 = \frac{2\pi i}{R}$. S'il y a n spires formant une bobine d'é-

paisseur négligeable vis-à-vis du diamètre (bobine plate), le champ au centre sera n fois plus grand.

Le champ créé au centre d'une bobine plate circulaire contenant n spires de rayon R est donné par la formule : $H_0 = \frac{2\pi ni}{R}$.

REMARQUES. — 1° Les formules précédentes supposent toutes les grandeurs évaluées dans le système électromagnétique. Si nous exprimons l'intensité en ampères (I) et les autres grandeurs en unités électromagnétiques C. G. S., nous avons les formules :

$$H = \frac{2\pi I}{10\,R}\left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad H_0 = \frac{2\pi nI}{10\,R}$$

2° Les résultats précédents peuvent s'obtenir en remplaçant le courant circulaire par le feuillet équivalent. Le potentiel créé par le feuillet de puissance $P = i$ au point A est (§ 212)

$$V = + P\,\Omega = + 2\pi i\,(1 - \cos\beta).$$

car $\Omega = 2\pi(1 - \cos\beta)$ (§ 1) et du point A on voit la face *positive* du feuillet (fig. 227).

Le champ suivant l'axe sera :

$$H = -\frac{dV}{dx} = -2\pi i \sin\beta \frac{d\beta}{dx}$$

Or $x = R\cot g\,\beta$, d'où $dx = -\frac{R}{\sin^2\beta}d\beta$, et $\frac{d\beta}{dx} = -\frac{\sin^2\beta}{R}$

Par suite $$H = \frac{2\pi i}{R}\sin^2\beta = \frac{2\pi i}{R}\left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

234. — ***Champ magnétique d'un solénoïde.*** — 1° ETUDE EXPÉRIMENTALE. — On appelle solénoïde une bobine cylindrique à section circulaire dont la longueur est grande par rapport au rayon de la section. Le fil constituant la bobine est enroulé régulièrement en forme d'hélice.

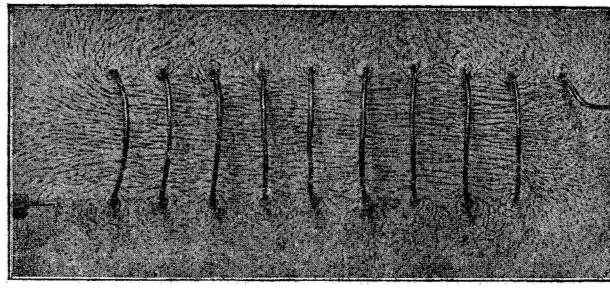


FIG. 228. — Spectre d'un solénoïde.

Faisons passer un courant dans ce solénoïde, la bobine étant placée horizontalement. Formons le spectre sur un carton horizontal dont le plan contient l'axe de la bobine. Ce carton est convenablement entaillé pour laisser passer les spires. Le spectre obtenu est représenté sur la figure 228. Nous observons :

1° Qu'à l'intérieur du solénoïde, les lignes de force sont toutes parallèles à l'axe, sauf au voisinage des extrémités où elles s'épanouissent et au voisinage immédiat de chaque spire où elles entourent les traces de la spire sur le plan de carton ;

2° A l'extérieur du solénoïde, le spectre ressemble au spectre d'un aimant cylindrique à aimantation uniforme. Les lignes de limaille extérieures se continuent sans discontinuité à l'intérieur, c'est donc que les lignes de force correspondent aux lignes d'*induction* de l'aimant.

3° Le sens du champ à l'intérieur est donné encore soit par la règle du bonhomme d'Ampère, soit par la règle du tire-bouchon de Maxwell.

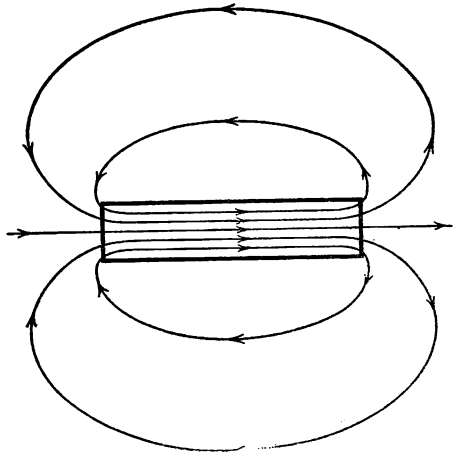


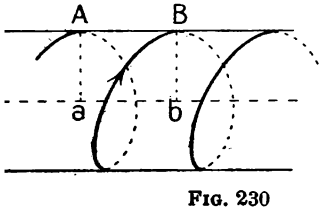
FIG. 229

La figure 229 représente les lignes d'induction du barreau aimanté équivalent au solénoïde qui occuperait l'emplacement de la bobine.

Ces résultats expérimentaux peuvent être déduits de la loi fondamentale d'Ampère (§ 225). Considérons une spire du solénoïde. D'après le principe des courants sinueux (§ 230), elle est équivalente à un courant circulaire perpendiculaire à l'axe, plus un courant rectiligne parallèle à l'axe et de longueur égale au pas de l'hélice (fig. 230).

Si donc, après avoir enroulé le fil en hélice de l'extrémité gauche de la bobine à l'extrémité droite, on replie le fil en une portion rectiligne parallèle à l'axe de droite à gauche, on compense ainsi par ce fil de retour l'action des petits courants rectilignes tels que *ab* et il ne reste que l'action des courants circulaires (fig. 231). D'ailleurs si on réalise un nombre *pair* de couches de fil, il n'y aura plus besoin de fil de retour. L'élément rectiligne *ab* d'une spire d'une couche de rang impair est neutralisé par l'élément *ba* de la spire correspondante de la couche suivante.

Considérons le solénoïde entier. Remplaçons-le par l'ensemble des courants circulaires équivalant aux spires, ces courants étant parallèles et équidis-



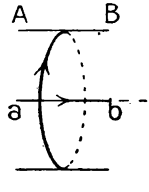


FIG. 230

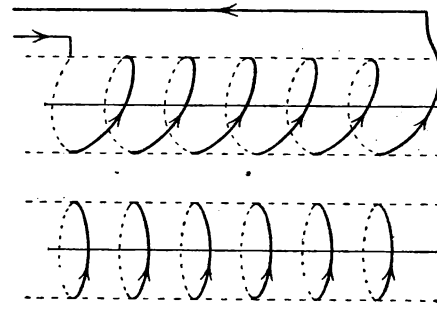


FIG. 231

tants. Chaque courant circulaire est équivalent à un feuillet de puissance i. Donnons à chaque feuillet une épaisseur égale à l'équidistance e des spires. L'intensité d'aimantation sera $\mathcal{I} = \frac{i}{e}$ et la densité superficielle de magnétisme sur chaque face sera : $\sigma = \mathcal{I} = \frac{i}{e}$ (§ 208).

Les différents feuillets sont identiques et juxtaposés ; les faces en contact portent des quantités de magnétisme égales et de signes contraires qui se neutralisent. Finalement l'ensemble est équivalent à deux plages de magnétisme uniforme placées aux extrémités du solénoïde et portant une densité de magnétisme $\sigma = \frac{i}{e}$. *Le solénoïde est donc équivalent à un aimant.*

Les masses magnétiques des pôles de surface S sont $m = S\sigma = \frac{iS}{e}$. Le moment magnétique de l'aimant sera $\mathfrak{M} = m \times l$, l étant la longueur du solénoïde. Appelons N le nombre *total* de spires, nous avons $l = Ne$ d'où :

$$\mathfrak{M} = ml = \frac{iS}{e} \times Ne = NSi.$$

D'où le résultat important suivant :

Un solénoïde est équivalent à un aimant ayant ses pôles aux extrémités et dont le moment magnétique est $\mathfrak{M} = NSi$.

Ce résultat explique la forme du champ magnétique d'un solénoïde. Nous l'utiliserons fréquemment dans la suite.

2° CALCUL DU CHAMP EN UN POINT DE L'AXE. — Soit M le point de l'axe où nous calculons le champ. Par raison de symétrie, le champ est dirigé suivant l'axe. Son sens est donné par la règle du tire-bouchon de Maxwell : c'est le sens dans lequel se déplace un tire-bouchon placé suivant l'axe quand on le fait tourner dans le sens du courant (fig. 232).

L'intensité du champ sera la somme *algébrique* des projections sur l'axe des champs créés en M par les différents éléments.

Considérons un élément rectangulaire limité, d'une part, par deux portions de spires parallèles de longueur ds et, d'autre part, par deux portions de génératrices du cylindre de longueur dl (fig. 232). Appelons d la distance de l'élément au point M.

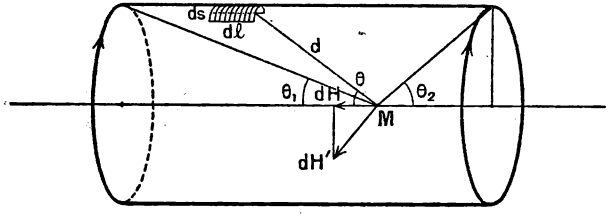


FIG. 232

Le champ produit en M par un élément ds de spire a pour intensité (§ 233) $dh' = \frac{ids}{d^2}$. L'élément de surface rectangulaire contient $n_1\,dl$ spires, en ap-

pelant n_1 le nombre de spires par unité de longueur de la bobine. L'intensité dH' du champ créé en M par l'élément de surface est :

$$dH' = n_1 dl \times dh' = \frac{n_1 i\, ds\, dl}{d^2}.$$

La composante de ce champ suivant l'axe sera :

$$dH = dH' \sin \Theta = n_1 i \frac{ds\, dl \sin \Theta}{d^2}.$$

Or Θ est le complément de l'angle φ que fait la normale à l'élément de surface avec la droite joignant M à cet élément. La quantité $\frac{ds\, dl \sin \Theta}{d^2} = \frac{ds\, dl \cos \varphi}{d^2}$ représente l'angle solide $d\Omega$ sous lequel de M on voit l'élément de surface considéré (§ 1) :

$$dH = n_1 i\, d\Omega.$$

Le champ en M créé par le solénoïde entier sera :

$$H = \int dH = n_1 i \Omega.$$

Ω étant l'angle solide sous lequel de M on voit la surface *latérale* du solénoïde. Pour calculer Ω nous distinguerons deux cas :

1° *Le point M est à l'intérieur du solénoïde* (fig. 232). Désignons par Ω_1 et Ω_2 les angles solides sous lesquels on voit les faces terminales.
Nous avons :

$$\Omega + \Omega_1 + \Omega_2 = 4\pi.$$

D'autre part, nous avons vu (§ 1) que, si Θ_1 et Θ_2 sont les angles sous lesquels de M on voit les rayons des faces terminales, nous avons :

$$\Omega_1 = 2\pi (1 - \cos \Theta_1) \qquad \Omega_2 = 2\pi (1 - \cos \Theta_2).$$
$$\Omega = 4\pi - \Omega_1 - \Omega_2 = 2\pi (\cos \Theta_1 + \cos \Theta_2).$$

En définitive, pour un point M intérieur, l'intensité du champ est donnée par la formule :

$$\boxed{H = 2\pi n_1 i (\cos \Theta_1 + \cos \Theta_2)}$$

Si le point M est au centre du solénoïde : $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$ et

$$H = 4\pi n_1 . i \cos \Theta$$

Enfin dans le cas particulier où le solénoïde est infiniment long :

$\Theta_1 = 0.$ $\Theta_2 = 0,$ $H_0 = 4\pi n_1 i.$

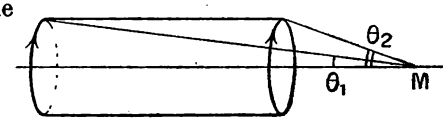


FIG. 233

2° *Le point M est à l'extérieur du solénoïde* (fig. 233).

En conservant les mêmes notations nous avons :

$$\Omega = \Omega_2 - \Omega_1,$$

D'où :

$$\Omega = 2\pi (\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2)$$

$$H = 2\pi n_1 i (\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2).$$

REMARQUES. — 1° Les formules précédentes sont valables dans le système électromagnétique. Si nous exprimons l'intensité en ampères (I) et les autres grandeurs en unités électromagnétiques C. G. S., nous avons les formules :

$$H = 2\pi n_1 \frac{I}{10} (\cos \Theta_1 + \cos \Theta_2) \quad \text{et} \quad H_0 = \frac{4\pi}{10} n_1 I$$

2° Nous pouvons faire le calcul du champ en remplaçant le solénoïde par l'aimant équivalent. L'aimantation $\mathcal{J}$ est égale à la densité superficielle σ sur les faces terminales et nous avons vu que $\sigma = \frac{i}{e}$. Or e étant le pas de l'hélice et n_1 le nombre de spires par unité de longueur de la bobine, $n_1 e = 1$. D'où :

$$\mathcal{J} = \sigma = n_1 i.$$

Le champ du solénoïde est égal, en chaque point, à l'*induction magnétique* de l'aimant (§ 225). Considérons deux cas :

a) *Le point M est à l'intérieur* (fig. 234). — Le vecteur aimantation $\mathcal{J}$ est dirigé comme l'indique la figure.

Appelons H le champ cherché et h le champ créé par l'aimant. Au point M ce champ h est dirigé en sens contraire de l'aimantation. D'où :

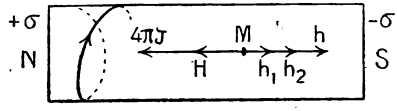


FIG. 234

$$\vec{H} = \vec{h} + 4\pi \vec{\mathcal{J}}$$

$$H = -h + 4\pi \mathcal{J} = -h + 4\pi n_1 i.$$

h est la somme des champs h_1 et h_2 créés en M par les faces terminales. Nous savons (§ 44) que :

$$h_1 = 2\pi\sigma (1 - \cos \Theta_1) = 2\pi n_1 i (1 - \cos \Theta_1).$$
$$h_2 = 2\pi\sigma (1 - \cos \Theta_2) = 2\pi n_1 i (1 - \cos \Theta_2).$$

D'où :

$$H = 4\pi n_1 i - h = 2\pi n_1 i (\cos \Theta_1 + \cos \Theta_2).$$

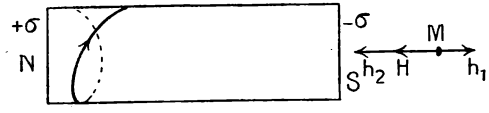


FIG. 235

H est dirigé dans le sens de l'aimantation.

b) *Le point M est extérieur* (fig. 235). L'aimantation en M est nulle.

$$\vec{H} = \vec{h} + 4\pi \vec{\mathcal{J}} = \vec{h}$$

h est la différence des champs h_1 et h_2 créés en M par les faces terminales.

$$H = h_2 - h_1 = 2\pi n_1 i (\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2).$$

235. — ***Théorème d'Ampère.*** — Le résultat obtenu au paragraphe 214 relatif au travail de l'induction le long d'une courbe fermée peut être transposé en électromagnétisme en remplaçant le feuillet par le circuit équivalent. Ce résultat constitue le théorème d'Ampère.

THÉORÈME D'AMPÈRE : *Le travail $\mathcal{C}$ du vecteur champ magnétique créé par*

un circuit parcouru par un courant i, *le long d'une courbe* **fermée** *traversant* m *fois le circuit dans le sens qui va de la droite vers la gauche d'un observateur d'Ampère regardant à l'intérieur, et* n *fois en sens inverse, est égal au produit de l'intensité du courant* i *par* 4π (m — n).

$$\mathcal{C} = 4\pi (m - n)\, i$$

APPLICATIONS. — 1° Considérons un circuit fermé comprenant un fil rectiligne long et cherchons le champ en un point A situé à la distance OA = *a* du fil (fig. 236). Nous pouvons considérer le fil XY comme indéfini, la partie YGX du circuit ayant une action négligeable en A.

Par raison de symétrie, la ligne de force passant par A est un cercle horizontal de rayon OA et le champ H a une grandeur constante en tous les points. Le travail du champ H le long de cette ligne de force sera :

$$\mathcal{C} = H \times 2\pi a.$$

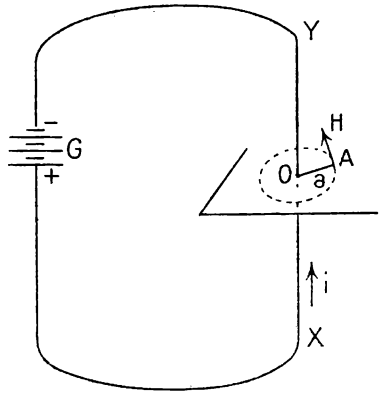


FIG. 236

Or cette ligne coupe une fois le plan du circuit. Donc, d'après le théorème d'Ampère :

$$\mathcal{C} = 4\pi i,$$
$$H \times 2\pi a = 4\pi i$$
$$H = \frac{2i}{a}.$$

Nous retrouvons la loi de Biot et Savart (§ 231).

2° Considérons un tore sur lequel on a enroulé en hélice régulière un fil conducteur isolé dans lequel nous ferons passer un courant *i* (fig. 237). Le système est équivalent à un ensemble de spires circulaires équidistantes placées dans des plans méridiens (§ 234).

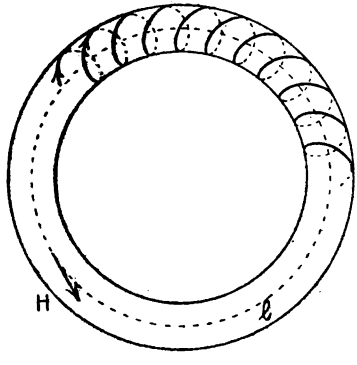


FIG. 237

Le lieu des centres des spires est un cercle et le champ est, en grandeur, le même en tous les points de ce cercle, par raison de symétrie. Soit H sa valeur.

Le travail du champ le long de ce cercle est :

$$\mathcal{C} = H \times l,$$

en appelant *l* la longueur de la circonférence.

D'autre part, d'après le théorème d'Ampère, le cercle traversant toutes les spires, nous avons :

$$\mathcal{C} = 4\pi N i,$$

N étant le nombre total de spires.

D'où :
$$Hl = 4\pi N i,$$
$$H = 4\pi i \times \frac{N}{l}.$$

Or $\frac{N}{l} = n_1$ représente le nombre de spires par unité de longueur de la circonférence moyenne.
$$H = 4\pi n_1 i.$$

La formule précédente ne contient pas le rayon de la circonférence moyenne. Supposons ce rayon infini, la formule persiste et se rapporte alors à un solénoïde infiniment long.

*236. — **Circuit magnétique fermé. Réluctance. Force magnétomotrice. Nombre d'ampères-tours.*** — Considérons la bobine en forme de tore étudiée au paragraphe précédent. Les lignes de force du champ magnétique créé à l'intérieur des spires se ferment sur elles-mêmes. L'ensemble constitue un *circuit magnétique fermé.* Soit S l'aire d'une spire, H l'intensité du champ magnétique, sensiblement la même en tous les points de la section et Φ le flux magnétique traversant *chacune* des sections. Le vecteur H étant perpendiculaire au plan de chacune des spires, nous avons, avec les notations du paragraphe précédent :
$$\Phi = HS = \frac{4\pi}{10} n_1 IS = \frac{4\pi}{10} \frac{N}{l} IS.$$

en appelant I l'intensité du courant exprimée en ampères.

Nous pouvons encore écrire :
$$\Phi = \frac{\frac{4\pi}{10} NI}{\frac{l}{S}}.$$

Si l'intérieur des spires est rempli d'un métal de perméabilité magnétique μ, de fer par exemple, le *flux d'induction* qui traverse chacune des spires est μ fois plus grand et a pour expression :
$$\Phi' = \mu\Phi = \frac{\frac{4\pi}{10} NI}{\frac{1}{\mu}\frac{l}{S}}. \qquad (1)$$

Le dénominateur de la fraction est une expression de même forme que celle de la résistance électrique d'un conducteur homogène de section constante ; la perméabilité magnétique μ joue le rôle de la conductivité électrique c (§ 129).

La formule précédente montre que, pour une valeur déterminée du produit NI, le *flux d'induction magnétique* obtenu dans un circuit magnétique fermé varie en raison inverse de la grandeur $\frac{1}{\mu}\frac{l}{S}$; de même que, dans un

circuit électrique fermé (homogène et à section constante), pour une f. é. m. déterminée, l'intensité du courant, c'est-à-dire le *flux d'électricité* obtenu, varie en raison inverse de la résistance $\frac{1}{c}\frac{l}{S}$.

Pour rappeler cette analogie, on donne à la grandeur $\frac{1}{\mu}\frac{l}{S}$ le nom de *résistance magnétique* du circuit magnétique considéré ; on l'appelle aussi et surtout sa **réluctance.**

De même, le numérateur $\frac{4\pi}{10}$ NI de la fraction (1) joue le même rôle que la *force électromotrice* dans la formule d'Ohm appliquée à un circuit électrique fermé. Par analogie, cette grandeur $\frac{4\pi}{10}$ NI est appelée **force magnétomotrice** du circuit magnétique. On l'exprime en *gilberts.*

Dans l'expression de la force magnétomotrice, les nombres N et I n'interviennent que par leur produit ; le flux obtenu dans le circuit magnétique reste le même pour un nombre double de spires et une intensité de courant moitié moindre. Par suite de l'importance de ce produit NI du *nombre de tours* de fil par le *nombre d'ampères* qui mesure l'intensité du courant, on l'appelle *le* **nombre d'ampères-tours** de la bobine.

La formule (1), facile à retenir par suite de son analogie avec la formule d'Ohm, sert en général au calcul du nombre d'ampères-tours nécessaire pour obtenir, dans un circuit magnétique donné, un flux magnétique imposé à l'avance (électro-aimants).

Exercices.

58. Etudier les variations du champ magnétique le long de l'axe d'une bobine circulaire plate. Montrer que la courbe représentative présente un point d'inflexion que l'on déterminera.

Réponse : Point d'inflexion à la distance $x = \frac{R}{2}$.

59. On considère deux spires circulaires de même axe, de même rayon R, parcourues par le même courant i, dans le même sens. Leur distance est égale à R. Construire la courbe qui représente les variations du champ magnétique sur l'axe du système. Calculer le champ au milieu M de l'intervalle $O_1 O_2$ entre les centres des spires. Déterminer la portion de l'axe au voisinage de M où le champ peut être considéré comme constant et égal au champ en M à $\frac{1}{500}$ près.

Réponse : Si x est la distance du point au milieu M :

$$H = H_0\left[\left[1+\frac{\left(\frac{R}{2}-x\right)^2}{R^2}\right]^{-\frac{3}{2}}+\left[1+\frac{\left(\frac{R}{2}+x\right)^2}{R^2}\right]^{-\frac{3}{2}}\right]$$

H_0 étant le champ au centre d'une spire.

60. On considère un circuit fermé de forme carrée de côté $2a$; il est parcouru par un courant i. Calculer le champ au centre du circuit. Calculer le champ en un point situé à 4 cm du centre sur la perpendiculaire au plan du circuit menée par le centre du circuit. On donne : $a = 4$ cm et $i = 1$ ampère.

Réponse : $H_0 = 4\frac{i}{a}\sqrt{2} = 0,14$; $H_x = \frac{8a^2 i}{(a^2+x^2)\sqrt{2a^2+x^2}}$; $H_4 = 0,0577$.

61. Une bobine B cylindrique ayant 50 cm de longueur est régulièrement bobinée et comprend 500 spires de 8 cm de diamètre. Calculer le champ au centre quand on y a fait passer un courant I = 12 ampères. Quelle erreur relative commettrait-on en supposant la bobine infiniment longue ? Comment varie le champ le long de l'axe quand on s'éloigne légèrement du centre ? Quelle est la variation relative à 2 cm du centre ?

(*Ecole Normale Supérieure*, 1932, 2°)

62. On considère une galette constituée par un fil fin isolé, de diamètre total $d = 0{,}5$ mm enroulé en spirale à tours jointifs. Le rayon de la plus petite spire est $a = 0$ cm et celui de la plus grande est R = 20 cm. Calculer le champ magnétique créé en un point de l'axe de cette galette situé à 1 cm du centre.

CHAPITRE XXVII

ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UN COURANT

237. — ***Existence de l'action d'un champ magnétique sur un courant.*** — Prenons deux barres de cuivre AA′ et BB′ (fig. 238) placées parallèlement dans un même plan horizontal. Elles sont assez épaisses pour que leur résistance soit faible. Les extrémités A et B sont reliées aux deux pôles d'une batterie d'accumulateurs P. Le circuit est complété par une barre de cuivre cylindrique MN qui peut rouler sur les barres AA′ et BB′ et que nous plaçons perpendiculairement à AA′. A l'aide d'un aimant en fer à cheval, on crée entre les barres AA′ et BB′ un champ magnétique vertical H.

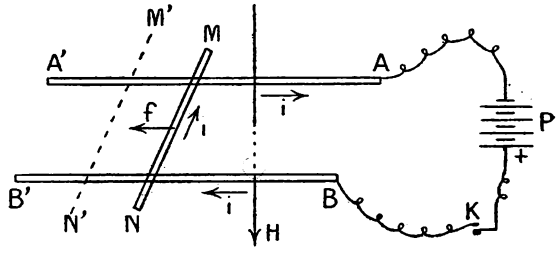


FIG. 238. — Force exercée par un champ magnétique sur un élément de courant.

Faisons passer le courant en fermant l'interrupteur K. Nous observons un déplacement de la barre MN, ce qui prouve qu'elle est soumise à une force. Si le courant a le sens indiqué sur la figure 238, le déplacement a lieu vers la gauche. De plus nous pouvons observer : d'une part, que la tige MN ne glisse pas dans sa propre direction ; d'autre part, qu'elle ne se soulève pas, aussi légère soit-elle. Enfin si nous changeons le sens du courant, ou le sens du champ H, nous observons un déplacement de MN en sens inverse.

Cette expérience nous montre qu'un élément de courant mobile placé dans un champ magnétique est soumis à une force perpendiculaire au champ et à l'élément, et dirigée vers la gauche de l'observateur d'Ampère regardant dans le sens du champ.

Nous trouvons là une vérification expérimentale de la deuxième loi fondamentale de Laplace.

238. — ***Loi fondamentale.*** — La loi fondamentale qui régit l'action d'un champ magnétique sur un courant est la deuxième loi de Laplace (§ 226). Rappelons-en les conclusions essentielles :

1° AU POINT DE VUE QUALITATIF, **tout élément de circuit parcouru par**

un courant est soumis à une force appelée force électromagnétique. Cette force est perpendiculaire au champ et à l'élément. Elle est appliquée au fil et dirigée vers la gauche d'un observateur d'Ampère placé sur l'élément et regardant dans le sens du champ.

Pour déterminer le sens de la force, on peut substituer à la règle précédente une règle équivalente appelée *règle des trois doigts de la main droite* : On dresse le pouce de la main *droite* dans la direction du courant, on pointe l'index dans la direction du champ, le médius plié à angle droit vers la gauche indique le sens de la force électromagnétique.

2° AU POINT DE VUE QUANTITATIF, **la force élémentaire** df **exercée sur un élément de courant de longueur** ds **par un champ H faisant avec l'élément l'angle** Θ **est donnée par la formule de Laplace :**

$$df = i\,H\,ds\,\sin\,\Theta.$$

Cette formule est valable dans un système électromagnétique. Si nous exprimons les intensités en ampères (I) et les autres grandeurs en unités électromagnétiques C. G. S. la formule devient :

$$df^{\text{dynes}} = \frac{1}{10}\,I\,H\,ds\,\sin\,\Theta.$$

239. — Expériences relatives à l'action d'un champ magnétique sur une portion mobile d'un circuit siège d'un courant. — Nous allons décrire des expériences classiques qui permettent de vérifier que l'action d'un champ magnétique sur un élément de courant a bien la direction et le sens prévus par la seconde loi de Laplace.

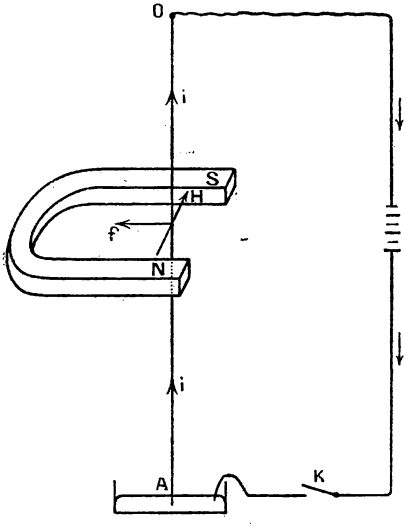


FIG. 239

PREMIÈRE EXPÉRIENCE (fig. 239). — Dans le champ horizontal produit entre ses branches par un aimant en fer à cheval NS, est placé un fil de cuivre OA vertical, mobile en tous sens autour du point O et plongeant en A dans une cuve à mercure.

Dès qu'on lance un courant dans le fil OA, celui-ci est projeté dans une direction perpendiculaire aux lignes de force du champ.

Cette direction est, conformément à la loi de Laplace, perpendiculaire au plan défini par la direction du champ et celle du fil. Le sens dans lequel est projeté le fil est conforme à la même loi ; par exemple le fil est lancé dans

le sens *f* lorsque le champ a le sens H et que le courant est dirigé vers le haut (fig. 239).

Si l'on retourne l'aimant branche pour branche, ce qui renverse le sens du champ, ou bien si à l'aide d'un commutateur on change le sens du courant, le sens de projection du fil est inversé.

SECONDE EXPÉRIENCE. ROUE DE BARLOW. — Imaginons que dans l'appareil précédent on ait, au lieu d'un fil unique, une série de fils situés dans le plan vertical de trace *f*, et rayonnant tous à partir d'un même axe métallique O parallèle à H auquel ils seraient fixés. Supposons l'écart angulaire entre deux fils consécutifs assez petit pour que l'extrémité inférieure de l'un des fils pénètre dans le mercure avant que le fil précédent n'en soit sorti. L'équipage constitué par l'ensemble des fils tournera d'un mouvement de rotation continu lorsque son axe et le mercure seront reliés aux pôles d'un générateur de courant.

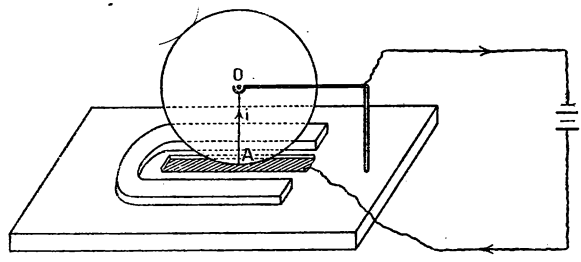


FIG. 240. — Roue de Barlow.

L'expérience montre que si l'on remplace l'ensemble *discontinu* de ces fils par un disque métallique *plein* plongeant légèrement dans le mercure à sa partie inférieure, le disque tourne aussi d'un mouvement continu lorsque passe le courant. C'est l'expérience bien connue de la *roue de Barlow*, (fig. 240).

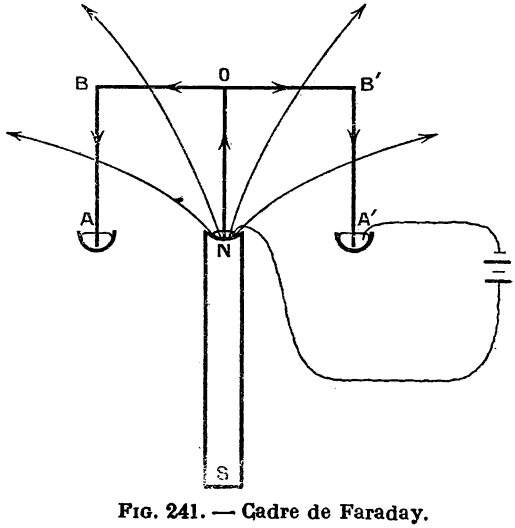


FIG. 241. — Cadre de Faraday.

Il faut remarquer toutefois que, sous cette forme, l'expérience établit une propriété nouvelle. Le déplacement, par un champ magnétique, d'*un fil* parcouru par un courant peut en effet s'expliquer de deux manières : l'action du champ peut porter soit *sur la matière* du fil siège du courant, soit sur *le courant* lui-même ; les deux interprétations sont possibles parce que le courant ne peut se déplacer sans que la matière du fil soit entraînée. Dans la roue de Barlow il n'en est plus de même ; le déplacement du courant dans *la matière immobile* du disque serait possible ; or le disque

tourne. Cette expérience établit ainsi l'existence d'une *action sur la matière conductrice* siège du courant.

TROISIÈME EXPÉRIENCE (fig. 241). — Dans un dispositif imaginé par Faraday, le champ magnétique agissant est produit par un barreau aimanté vertical NS. Une portion mobile d'un circuit est constituée par l'ensemble des fils métalliques rectilignes AB, A'B' et BB' reposant sur un pivot métallique ON autour duquel peut tourner le cadre ABB'A'. Le pivot ON plonge en N dans un godet contenant du mercure ; d'autre part les extrémités A et A' du cadre plongent dans le mercure d'une rigole circulaire horizontale AA' dont l'axe est confondu avec celui du barreau. Grâce à ces contacts liquides, on peut envoyer un courant dans le cadre sans qu'il soit interrompu par la rotation de celui-ci.

Appliquons la loi de Laplace aux quatre courants rectilignes OB, BA, OB', B'A'. Les forces exercées sont toutes perpendiculaires au plan du cadre ; chacune tend à faire tourner le cadre autour de ON. D'autre part, les quatre actions ont un sens tel qu'elles s'accordent pour imprimer au cadre un même sens de rotation ; dans la position représentée par la figure, AB et BO sont entraînés vers l'arrière, A'B' et B'O vers l'avant.

L'expérience est en accord avec les prévisions déduites de la loi de Laplace : le cadre tourne bien d'un mouvement continu, et dans le sens prévu.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE. — Remplaçons le cadre ABA'B' par une boîte métallique ayant la forme d'un cylindre vertical dont la section par le plan de la figure soit ABA'B' ; le fond circulaire horizontal BB' repose sur le pivot ON, et le bord circulaire inférieur des parois verticales plonge dans le mercure de la rigole AA' (fig. 241). En somme cette expérience est à la précédente, ce qu'est celle de la roue de Barlow à la première ; le fil, siège du courant, est remplacé par une masse conductrice mince continue occupant la région de l'espace que balaie le fil dans l'expérience précédente.

Nous observons la rotation du cylindre, ce qui établit, comme celle de la roue de Barlow, l'existence d'une action exercée sur *la matière* dans laquelle passe le courant.

REMARQUE. — Dans toutes ces expériences, le champ magnétique agissant est produit par un barreau aimanté. On constate qu'on peut remplacer celui-ci par une ou plusieurs bobines parcourues par un courant ; pourvu que le champ magnétique obtenu ait, en chaque point, même direction, même sens et même intensité que celui du barreau, les effets observés sont les mêmes.

240. — Action réciproque de deux courants. — Un courant produit dans tout son voisinage un champ magnétique qui possède les propriétés générales des champs magnétiques dus aux aimants. En particulier, il peut exercer son action sur un second courant. Etudions le cas particulier de deux *courants rectilignes parallèles.*

Cherchons l'action exercée par un courant rectiligne indéfini XY (fig. 242) d'intensité i sur une portion AB d'un circuit rectiligne parallèle au premier de longueur AB = l parcouru par un courant i'. Soit a la distance MM' des deux fils.

Le courant i crée en M' un champ magnétique $H = \frac{2i}{a}$, perpendiculaire au plan des deux fils et dirigé vers la gauche d'un observateur d'Ampère placé sur XY et regardant M'.

En tous les points du fil AB s'exerce le champ H. Cette portion de fil est donc soumise à une force f appliquée en son milieu M'. Cette force est perpendiculaire à AB et à H, elle est donc dirigée suivant M'M. Elle est dirigée vers la gauche de l'observateur d'Ampère placé sur AB et regardant dans le sens du champ H. Elle a pour sens M'M si les courants sont de même sens (fig. 242) et MM' si les courants sont de sens contraires. L'intensité de cette force f est donnée par la deuxième loi de Laplace :

$$f = Hi'l = \frac{2ii'l}{a}.$$

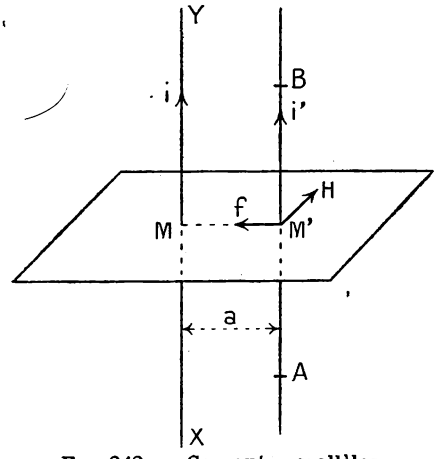


FIG. 242. — Courants parallèles.

Il résulte du sens de la force f que :

1° *Deux courants rectilignes parallèles et de même sens s'attirent* ;

2° *Deux courants rectilignes parallèles et de sens contraires se repoussent.*

L'intensité de la force est donnée par la formule $f = \frac{2\,ii'l}{a}$, toutes les grandeurs étant exprimées en unités électromagnétiques C. G. S. Si l'on appelle I et I' les intensités des courants en *ampères*, nous avons :

$$f^{\text{dynes}} = \frac{2\,I^{a} \times I'^{a} \times l^{\text{cm}}}{100\ a^{\text{cm}}}.$$

241. — Travail des forces électromagnétiques dans le déplacement d'un circuit dans un champ magnétique. — Nous avons établi au paragraphe 216 la formule qui permet de calculer le travail des forces magnétiques relatif au déplacement d'un feuillet :

$$\mathcal{T} = P\,(\Phi_2 - \Phi_1).$$

Pour avoir le travail relatif au déplacement du courant équivalent, il suffit, d'après la loi d'Ampère, de remplacer dans la formule précédente la puissance P par l'intensité i du courant. D'où la relation :

$$\mathcal{T} = i\,(\Phi_2 - \Phi_1).$$

Dans cette formule Φ_2 et Φ_1 représentent les flux sortant par la face *nord* du circuit dans les positions finale et initiale. Si $\Phi_2 > \Phi_1$, $\mathcal{T} > 0$ il s'a-

git d'un travail moteur qui se produit de lui-même ; si $\Phi_2 < \Phi_1$, $\mathcal{T} < 0$ il s'agit d'un travail résistant, il faut fournir du travail pour effectuer le déplacement.

La formule $\mathcal{T} = i\,(\Phi_2 - \Phi_1)$ est valable dans le système électromagnétique. Si nous exprimons l'intensité en ampères (I) et le travail en joules, nous avons :

$$\mathcal{T}_{\text{joules}} = 10^{-8}\, I^2\, (\Phi_2^{\text{max.}} - \Phi_1^{\text{max.}})$$

La formule précédente a une importance telle que nous l'établirons directement à partir de la loi de Laplace.

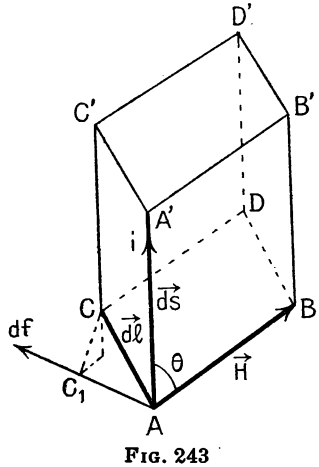


FIG. 243

Considérons un élément de circuit ds (fig. 243) parcouru par un courant d'intensité i et placé dans un champ magnétique H faisant avec l'élément de courant un angle Θ. Il est soumis à une force df donnée en sens et en grandeur par la loi de Laplace :

$$df = iH ds \sin \Theta.$$

Faisons subir à l'élément de circuit ds, un déplacement AC = dl. Le travail de la force sera :

$$d\mathcal{T} = df \times AC_1 = i\, H\, ds \sin \Theta \times AC_1.$$

AC_1 est la projection de AC sur la force df *normale au plan AA'BB'* ; c'est donc la hauteur du parallélépipède ABCDA'B'C'D' ayant pour base AA'BB'. De plus la quantité $Hds \sin \Theta$ représente l'aire du parallélogramme AA'BB'. Donc l'expression $Hds \sin \Theta \times AC_1$ représente le volume dv du parallélépipède ABCDA'B'C'D'. D'où :

$$d\mathcal{T} = i\, dv.$$

Mais le volume dv est aussi égal au produit de la surface du parallélogramme AA'CC' servant de base, par la hauteur correspondante qui est la projection de H sur la normale au plan AA'CC'.

L'aire AA'CC' est la surface balayée par l'élément de courant dans son déplacement. Le produit de cette aire par la composante normale du champ est le flux du vecteur H à travers cette surface, c'est-à-dire *le flux coupé par l'élément ds dans son déplacement*. Soit $d\Phi$ ce flux :

$$dv = d\Phi$$

d'où :

$$d\mathcal{T} = i\, d\Phi.$$

Remarquons que le travail sera positif si l'angle de df avec dl est aigu.

Le flux coupé devra être compté positivement quand le déplacement s'effectue vers la gauche de l'observateur d'Ampère regardant dans le sens du champ.

Montrons sur un exemple que le flux coupé représente en grandeur et en signe la variation du flux qui sort par la face nord du circuit total auquel appartient l'élément. Prenons le cas particulier de la barre qui se déplace sur deux rails parallèles (§ 237). D'après les sens du courant et du champ H (fig. 244), la force déplacera AA' jusqu'en CC' en produisant du travail. Le flux coupé est celui de H à travers la surface AA'CC'. Or, la face nord du circuit est en dessus et sa surface a varié de l'aire AA'CC'. Le flux de H à travers la face nord a donc varié du flux qui traverse AA'CC', c'est-à-dire du flux coupé.

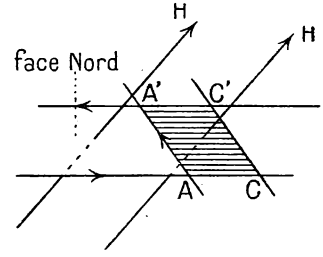


FIG. 244

En résumé, *le travail de la force électromagnétique est* $d\mathcal{C} = i d\Phi$, $d\Phi$ *étant la variation du flux à travers le circuit total, c'est-à-dire le flux coupé par le circuit dans son déplacement.*

Pour un déplacement fini du circuit, nous pouvons le concevoir comme résultant d'une infinité de déplacements élémentaires. D'où :

$$\mathcal{C} = i\,(\Phi_2 - \Phi_1).$$

Cette formule traduit ce qu'on appelle la LOI DE MAXWELL.

REMARQUE. — La loi élémentaire $d\mathcal{C} = i\,d\Phi$ se démontre simplement en utilisant les règles du calcul vectoriel. Nous avons en effet (§ 216) :

$$\vec{df} = i\,[\vec{ds} \wedge \vec{H}].$$

Le travail sera :

$$d\mathcal{C} = \vec{df} \times \vec{dl} = i\,[\vec{ds} \wedge \vec{H}] \times \vec{dl} = -\,i\,[\vec{ds} \wedge \vec{dl}] \times \vec{H}.$$

Or $[\vec{ds} \wedge \vec{dl}]$ est un vecteur égal à l'aire balayée et normal à cette aire. En tenant compte des signes, nous avons :

$$[\vec{ds} \wedge \vec{dl}] \times \vec{H} = -\,d\Phi.$$

d'où : $$d\mathcal{C} = i\,d\Phi.$$

*242. — **Applications de la loi de Maxwell.*** — La loi de Maxwell simplifie souvent la solution de nombreuses questions relatives aux déplacements de circuits. Etudions-en quelques-unes :

1° ACTION D'UN CHAMP UNIFORME SUR UN CIRCUIT. — Prenons un circuit parcouru par un courant et placé dans un champ *uniforme* H. Faisons subir au circuit une translation quelconque. Le flux qui sort par la face nord du circuit reste invariable. Donc :

$$\mathcal{C} = i\,(\Phi_2 - \Phi_1) = 0.$$

Le travail des forces électromagnétiques est nul : le système de forces a donc une résultante générale nulle et se réduit à un couple.

Un circuit quelconque parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique uniforme est soumis à un couple.

2° Equilibre d'un circuit dans un champ magnétique. — Considérons un circuit en équilibre stable dans un champ magnétique. Pour l'écarter de sa position d'équilibre, il faut fournir un travail ; le travail des forces électromagnétiques est négatif pour tous les déplacements élémentaires à partir de la position d'équilibre. Donc $\Phi_2 - \Phi_1 < 0$. Φ_1 est plus grand que tous les flux correspondant aux positions voisines. Pour la position d'équilibre, le flux sortant par la face nord est maximum. D'où le résultat fondamental suivant appelé Principe du flux maximum :

Un circuit parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique tend à se déformer et à se déplacer de façon que le flux qui sort par sa face nord soit maximum.

D'après cette loi, nous voyons qu'un cadre rigide de forme quelconque mobile autour d'un axe vertical et placé dans un champ magnétique *uniforme* s'orientera de façon que le flux sortant par sa face nord soit maximum, c'est-à-dire se placera normalement aux lignes de force. Dans les mêmes conditions, un solénoïde s'orientera de façon que son axe se place parallèlement au champ. Tous ces résultats sont faciles à vérifier expérimentalement.

3° Barreau aimanté équivalent a un circuit. — Considérons un circuit plan placé dans un champ magnétique *uniforme* H et mobile autour d'un axe situé dans son plan et perpendiculaire à H. Soit α l'angle du champ avec la normale au circuit qui sort par la face nord (fig. 245). Le flux qui traverse le circuit est :

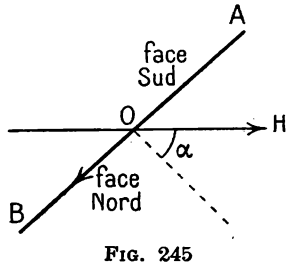


Fig. 245

$$\Phi = HS \cos \alpha.$$

S étant la surface du circuit.

Une rotation infiniment petite du circuit sous l'action du champ produit une variation de flux de $d\Phi = -HS \sin \alpha \, d\alpha$ et le travail des forces électromagnétiques est :

$$d\mathcal{C} = i \, d\Phi = -i \, HS \sin \alpha \, d\alpha.$$

Nous avons vu que ces forces se réduisaient à un couple (1°). Soit μ le moment du couple. α tend à diminuer d'après la loi du flux maximum, le travail du couple pour une variation $d\alpha$ est donc de signe contraire à $d\alpha$

$$d\mathcal{C} = -\mu d\alpha,$$

D'où : $$-\mu d\alpha = -i\mathrm{HS}\sin\alpha\, d\alpha.$$
$$\mu = i\mathrm{HS}\sin\alpha.$$

Cette formule rappelle la formule donnant le couple s'exerçant sur un barreau aimanté (§ 183) :

$$\mu = \mathfrak{M}\mathrm{H}\sin\alpha$$

La comparaison des deux formules montre, *qu'au point de vue de l'action exercée par un champ uniforme*, un circuit plan est équivalent à un aimant dont le moment magnétique serait *normal* au plan du circuit et aurait pour valeur :

$$\mathfrak{M} = i\mathrm{S}.$$

Pour une bobine plate contenant N spires, ou pour un solénoïde contenant un nombre total de spires égal à N, nous aurons :

$$\boxed{\mathfrak{M} = \mathrm{N}i\mathrm{S}}$$

Ce résultat, pour le solénoïde, a déjà été trouvé d'une autre manière au paragraphe 234.

Remarque. — Il n'y a équivalence, pour la bobine plate, que pour l'action d'un champ uniforme ; pour le solénoïde, l'équivalence s'étend à la fois au champ magnétique produit en un point extérieur et à l'action d'un champ magnétique.

243. — Action d'un courant sur son propre circuit. Expérience d'Ampère. — Un circuit traversé par un courant est toujours placé dans un champ magnétique ; même en l'absence de champ magnétique étranger, il existe tout au moins le champ dû au courant lui-même.

On peut se demander si ce dernier champ agit, et suivant les lois ordinaires, sur le circuit même du courant qui lui donne naissance. Si oui, ce circuit doit se déformer de manière à embrasser un flux maximum (§ 242).

Diverses expériences montrent qu'il en est bien ainsi.

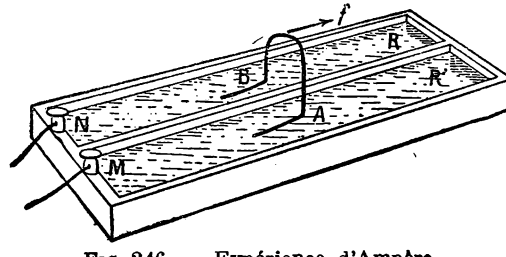


Fig. 246. — Expérience d'Ampère.

Expérience d'Ampère. — Deux rigoles horizontales parallèles (fig. 246) à parois isolantes contiennent du mercure. Par les bornes M et N, les deux masses de mercure peuvent être mises en communication respectivement avec les deux pôles d'un générateur de courant ; enfin le courant peut passer de l'une à l'autre par un pont très léger AB constitué par un fil de fer flottant sur le mercure.

Au début le circuit est ouvert et les branches A et B sont voisines des

bornes M et N. Dès qu'on établit le courant on constate, quel que soit le sens, que le pont AB s'éloigne dans le sens *f*.

Donc : 1° l'action du champ sur le circuit existe ; 2° le circuit se déforme bien de manière à embrasser un flux maximum ; en effet, ce flux est toujours positif, quel que soit le sens du courant, et l'aire du circuit s'accroît par le déplacement du pont sans que le flux varie sensiblement dans la partie indéformable du circuit.

DÉFORMATION DE L'ENSEMBLE DES SPIRES D'UNE BOBINE. — Si, dans l'enroulement du fil d'une bobine, on ne serre pas suffisamment ce fil sur la carcasse intérieure, un glissement des spires suivant une direction parallèle à l'axe est possible. Lorsqu'on lance un courant suffisant dans une telle bobine, on observe que *les spires se rapprochent les unes des autres.*

Cette expérience conduit à la même conclusion que la précédente : le circuit se déforme de manière à être traversé par un flux maximum. L'aire du circuit, c'est-à-dire sensiblement la somme des aires de chacune des spires considérée comme un petit circuit fermé, reste en effet constante, mais le nombre des spires par unité de longueur de bobine devenant plus grand, l'intensité du champ intérieur croît.

244. — Balance de Cotton. — C'est un appareil destiné à mesurer l'intensité d'un champ magnétique. C'est une application directe de la deuxième loi de Laplace. Il est surtout utilisé pour mesurer le champ dans l'entrefer d'un électro-aimant.

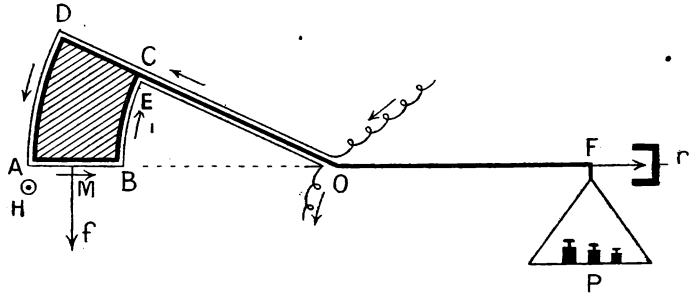


FIG. 247. — Balance de Cotton.

L'appareil a la forme indiquée par la figure 247. L'ensemble comprend une carcasse isolante en verre ou en ivoire ABCD fixée à l'extrémité d'un bras coudé COF mobile autour du point O. Un circuit OCDABEO comprend deux conducteurs rectilignes AB et CD reliés par deux conducteurs circulaires BE et AD de centre O. L'extrémité F du bras OF est munie d'un plateau P. L'appareil peut donc osciller autour de O et constitue une véritable balance.

Equilibrons la balance quand le circuit n'est parcouru par aucun courant. Pour cela chargeons le plateau P avec des masses marquées de façon que l'extrémité F du fléau OF se trouve en face d'un certain repère *r*.

Faisons passer ensuite un courant d'intensité connue i dans le circuit OCDABEO, dans le sens indiqué par la figure. Plaçons la portion rectiligne AB au centre du champ H à mesurer et normalement aux lignes de force.

Supposons le champ H dirigé d'arrière en avant du plan de figure (1). Les portions OD et OE du circuit situées en dehors du champ ne sont soumises à aucune force. Les portions circulaires AD et BE sont soumises à des forces situées dans le plan de figure et normales au fil. Ces forces passent par O et n'ont aucune action sur l'équilibre de la balance. Enfin la portion AB de longueur l est soumise à une force f appliquée en son milieu M, perpendiculaire à AB, dans le plan de figure, et dirigée vers le bas d'après la loi de Laplace. Son intensité est, comme le champ est perpendiculaire au fil :

$$f = iHl.$$

Cette force tend à faire baisser le bras OD. Rétablissons l'équilibre en ajoutant sur le plateau P des masses marquées m.

Posons OM $= d$, OF $= d'$, la condition d'équilibre de la balance sera :

$$f \times d = mg \times d',$$
$$iHld = mgd'.$$
$$H = \frac{mgd'}{ild}.$$

Si nous mesurons i en valeur absolue avec un électrodynamomètre (§ 262), nous réalisons avec une balance de Cotton, une mesure *absolue* de champ magnétique.

L'appareil est commode pour effectuer des mesures relatives. Si l'on a soin de prendre la même intensité i dans les mesures de deux champs H et H_0, nous aurons, en appelant m et m_0 les surcharges nécessaires pour rétablir l'équilibre :

$$\frac{H}{H_0} = \frac{m}{m_0}$$

Cherchons la précision que l'on peut obtenir avec cet appareil pour la mesure d'un champ magnétique de l'ordre de 20 000 gauss.

Prenons une balance de Cotton d'un modèle courant dont les constantes sont :

$d = d' = 30$ cm connus à $\frac{1}{10}$ mm près.

$l = 2$ cm connu, au cathétomètre, à 10 μ près.

$i = 1^{\text{UEM}}$ connu à l'électrodynamomètre à 10^{-4} près.

Dans ces conditions, la masse m de la surcharge sera :

$$m = \frac{Hild}{gd'} = 40{,}8 \text{ g}.$$

(1) Nous représenterons un vecteur perpendiculaire au plan de figure et dirigé en avant par une flèche vue en avant, c'est-à-dire un cercle et un point central. Le vecteur opposé serait représenté par une flèche vue de l'arrière, c'est-à-dire un cercle noir plein.

La formule $H = \frac{mgd'}{ild}$ permet de calculer une limite supérieure de l'erreur commise sur H :

$$\left|\frac{\Delta H}{H}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta m}{m}\right| + \left|\frac{\Delta d'}{d'}\right| + \left|\frac{\Delta i}{i}\right| + \left|\frac{\Delta l}{l}\right| + \left|\frac{\Delta d}{d}\right|$$

Supposons la balance sensible au centigramme :

$$\left|\frac{\Delta m}{m}\right| \leqslant \frac{1}{4080} < \frac{1}{4000} \qquad \left|\frac{\Delta d'}{d'}\right| = \left|\frac{\Delta d}{d}\right| \leqslant \frac{1}{3000}$$

$$\left|\frac{\Delta i}{i}\right| \leqslant \frac{1}{10000} \qquad \left|\frac{\Delta l}{l}\right| \leqslant \frac{1}{2000}$$

Finalement, nous avons :

$$\left|\frac{\Delta H}{H}\right| \leqslant \frac{1}{4000} + \frac{2}{3000} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{2000} < \frac{1}{500}$$

La balance de Cotton permet la mesure absolue du champ dans un entrefer avec une précision de l'ordre du 500e, si H est de l'ordre de 20 000 gauss. Il faut que les conditions géométriques et mécaniques de l'appareil soient réalisées avec une précision analogue : fléau rigide exempt de fer, arcs AD et BC centrés sur O à $\frac{1}{10}$ mm près.

La carcasse en verre est diamagnétique. Le champ exerce sur elle des forces de l'ordre du décigramme. Pour les éliminer, on fera deux mesures avec les courants i et $-i$. Dans le premier cas il faudra *ajouter* une surcharge m_1, dans le second cas *enlever* une charge m_2. Nous prendrons $m = \frac{m_1 + m_2}{2}$.

REMARQUE. — Pour les champs de quelques centaines de gauss, l'erreur principale porte sur m. Ainsi pour un champ de 200 gauss, on a m : 0,408 g et $\frac{\Delta m}{m} \leqq \frac{1}{40}$. Le champ ne peut être mesuré qu'à 5 gauss près.

Pour les champs faibles, la balance de Cotton ne peut plus servir.

245. — ***Comparaison entre les deux lois de Laplace.*** — Considérons un élément de courant A_1B_1 (fig. 248 et 249) de longueur Δl parcouru par un courant d'intensité i, en présence d'une masse magnétique $+1$ située en un point M_1 dont la position est définie par les paramètres r et α.

D'après la loi de Laplace du chapitre précédent, la force exercée par l'élément de courant sur la masse $+1$ située en M_1, qui n'est autre que le champ $\vec{\Delta H}$ créé par l'élément de courant en M_1 (fig. 248), a comme intensité :

$$\Delta H = i\,\Delta l\,\frac{1}{r^2}\sin\alpha. \qquad (1)$$

D'après la loi de Laplace du présent chapitre, la force exercée sur l'élément de courant A_1B_1 par la masse $+1$ située en M_1 est, en remarquant que le champ dû à cette masse en A_1B_1 vaut $\frac{1}{r^2}$ (fig. 249) :

$$\Delta f = i\,\Delta l\,\frac{1}{r^2}\sin\alpha. \qquad (2)$$

D'après le principe général de l'action et de la réaction, ces deux forces doivent être égales et directement opposées. Or les formules (1) et (2) montrent que les intensités des deux forces sont égales. D'autre part, ces deux forces ont même direction, puisque toutes deux sont perpendiculaires au plan défini par les droites A_1B_1 et OM_1. Enfin ces deux forces ont des sens opposés, car toutes deux sont dirigées vers la gauche d'un observateur d'Ampère couché sur A_1B_1, mais dans le premier cas cet observateur regarde dans le sens OM_1, tandis que dans le second cas il regarde dans le sens M_1O.

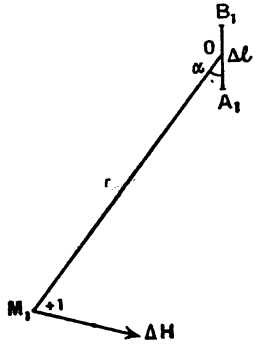


FIG. 248

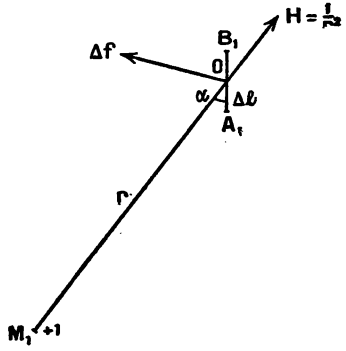


FIG. 249

Toutefois une difficulté se présente, en ce qui concerne les *points d'application* des deux forces ΔH et Δf. D'après la première loi de Laplace, la force ΔH qui agit sur la masse + 1 est appliquée en M_1, alors que d'après la seconde, la force Δf qui agit sur l'élément de courant est appliquée en O. Les deux forces ne sont donc pas *directement* opposées.

Un tel fait n'est pas surprenant, si l'on se rappelle que la première loi de Laplace ne correspond à aucune réalité physique.

L'expérience, réalisable dans le second cas, établit que la force Δf est effectivement appliquée sur l'élément de courant. Dans le premier cas, la seule réalité physique c'est que la *résultante* des forces élémentaires ΔH pour le circuit tout entier est appliquée en M_1.

Exercices

63. Un fil rigide vertical OP de longueur $l = 20$ cm et de masse $m = 1$ g est mobile autour de O. Il est placé à 5 cm d'un fil rectiligne indéfini vertical parcouru par un courant de 50 ampères. Déterminer la position d'équilibre du fil OP quand il est parcouru par un courant de 2 ampères.

64. Au milieu d'un solénoïde, on a ménagé une fente verticale, perpendiculaire à l'axe dans laquelle peut se déplacer verticalement une tige horizontale AB parcourue par un courant de 10 ampères. Le solénoïde est constitué par des spires de 10 cm de rayon et le champ à l'intérieur est uniforme et égal à 1000 gauss. On déplace la tige AB d'un bout à l'autre de la fente, dans le sens vertical. Calculer le travail effectué par la force électromagnétique exercée sur AB.

Réponse : $\mathcal{C} = 314\,000$ ergs.

65. Un cadre rectangulaire vertical est mobile autour d'un axe Z'Z passant par son centre. Les côtés horizontaux mesurent 2 cm et les côtés verticaux ont 5 cm.

Ce cadre, parcouru par un courant $i = 0{,}1$ ampère, est placé au voisinage d'un fil rectiligne indéfini vertical parcouru par un courant $I = 50$ ampères. Le centre O du cadre est à 10 cm du fil. Calculer le couple électromagnétique C qui tend à faire tourner le cadre lorsque celui-ci fait un angle α avec la perpendiculaire au fil abaissée du centre O du cadre. Déterminer la force qui s'exerce sur l'axe de rotation Z'Z.

66. Une bobine plate B comprend 200 spires circulaires de 4 cm de diamètre moyen. Elle est parcourue par un courant de 1 ampère et placée dans un champ magnétique uniforme, perpendiculaire à son axe, dont l'intensité est de 100 gauss. Calculer le moment du couple qui s'exerce sur B.

Réponse : $\mu = 25\ 100$ C. G. S.

67. Un cercle de cuivre est placé dans un champ magnétique $H = 1\ 000$ gauss perpendiculaire à son plan. On fait passer dans ce fil un courant de 100 ampères. Indiquer les sens respectifs du champ et du courant pour que le cercle soit contracté par les forces électromagnétiques. Calculer la contrainte, c'est-à-dire la force par unité de longueur.

Réponse : 10 000 dynes.

CHAPITRE XXVIII

PHÉNOMÈNES D'INDUCTION (1)

I. — INDUCTION PAR DÉPLACEMENT RELATIF D'UN CIRCUIT ET D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE

246. — Déplacement, dans un champ magnétique, d'un circuit traversé par un courant. Force électromotrice d'induction. — 1° ETUDE QUALITATIVE. — Considérons un circuit parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique. Nous avons appris au chapitre XXVII qu'en général, le champ exerce une action sur le circuit.

Laissons le circuit, soumis à certaines liaisons mécaniques, se déplacer *sous l'action du champ* d'une position C à une position C'. Les forces exercées par le champ sur le circuit effectuent un travail *positif* $\mathcal{T}$ et nous avons donné au paragraphe 241 l'expression de ce travail :

$$\mathcal{T} = i(\Phi' - \Phi).$$

en désignant par Φ et Φ' les valeurs du flux qui traverse le circuit dans les positions C et C'.

Nous avons laissé de côté jusqu'ici un point important du problème : nous ne nous sommes pas demandé d'où vient ce travail effectué par les forces électromagnétiques. L'étude de cette question fait l'objet du présent paragraphe.

D'après le principe de la conservation de l'énergie, le travail en question provient certainement de la transformation d'une quantité équivalente d'une autre espèce d'énergie, mais aucun raisonnement ne permet de trouver quelle est cette espèce d'énergie.

Elle peut, par exemple, être de l'énergie *calorifique* ; s'il en est ainsi, le circuit doit, pendant son déplacement, s'échauffer moins que ne l'indiquerait la loi de Joule pour l'intensité du courant existant.

Elle peut aussi être de l'énergie *magnétique*, et provenir soit du milieu dans lequel se déplace le circuit, soit des aimants producteurs du champ qui éprouveraient alors des modifications pendant le déplacement du circuit.

Elle peut encore être de l'énergie électrique ; l'intensité du courant doit alors devenir plus faible quand le circuit se déplace, ce qui revient à dire que

(1) Les questions traitées dans ce chapitre sont au programme de la classe de Mathématiques spéciales, mais ne figurent pas aux programmes des Concours d'admission aux grandes Ecoles.

le déplacement doit produire dans le circuit une force contre-électromotrice.

A priori toutes ces hypothèses sont également plausibles. L'expérience seule permet de décider.

Or *les faits confirment la dernière hypothèse.* Une force *contre*-électromotrice se produit dans le circuit pendant son déplacement ; on l'appelle **force électromotrice d'induction.**

L'existence de cette f. é. m. étant connue, le principe de la conservation de l'énergie permet de la calculer, alors qu'il ne permet pas d'affirmer *à priori* son existence.

2° Etude quantitative. — Soit E la f. é. m. du générateur qui produit le courant dans le circuit indépendamment du déplacement, R la résistance du circuit. Nous supposons que le circuit ne contient aucun récepteur.

a) Lorsque le circuit est immobile par rapport au champ, il est le siège d'un courant dont l'intensité I est donnée par la loi d'Ohm :

$$E = RI ;$$

il revient au même de dire que, pendant un temps dt, l'énergie électrique $EIdt$ fournie par le générateur se transforme tout entière en énergie calorifique par effet Joule :

$$EIdt = RI^2dt.$$

b) Lorsque le circuit se déplace par rapport au champ, une partie seulement de l'énergie électrique fournie par le générateur subvient à l'effet Joule, l'autre partie se transforme dans le travail mécanique accompli par les forces électromagnétiques. Dans ces conditions, le courant possède à l'instant t une intensité I' et, si nous appelons $d\mathcal{C}$ le travail des forces électromagnétiques pendant le temps dt qui suit l'instant t, le principe de la conservation de l'énergie donne la relation :

$$EI'dt = RI'^2dt + d\mathcal{C}. \qquad (1)$$

Or nous savons (§ 241) que : $d\mathcal{C} = I'd\Phi$, en appelant $d\Phi$ la variation, pendant le temps dt, du flux qui traverse l'intérieur du circuit.

Donc :

$$EI'dt = RI'^2dt + I'd\Phi \qquad (2)$$

relation qu'on peut écrire :

$$E = \frac{d\Phi}{dt} + RI'$$

L'intensité I' est plus petite que l'intensité I correspondant au circuit immobile. Tout se passe comme si, pendant le déplacement du circuit, il existait dans celui-ci une *force contre-électromotrice* ayant, à l'instant t, une valeur e définie par la formule :

$$e = \frac{d\Phi}{dt}.$$

Il revient au même de dire que tout se passe comme si le déplacement du circuit faisait naître dans ce circuit une *force électromotrice* définie par la relation :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Cette formule suppose toutes les grandeurs évaluées en unités d'un même système, par exemple du système pratique : Φ en unités pratiques (*pra-maxwells*), t en secondes, e en volts.

L'unité pratique de flux est rarement employée. Si nous exprimons I' en ampères, R en ohms, les f. é. m. en volts, les termes $EI'dt$ et RI'^2dt de la relation (2) sont évalués en joules ; le travail $d\mathcal{C}$ doit être exprimé avec la même unité et nous devons prendre : $d\mathcal{C} = 10^{-8}\, I'd\Phi$, la variation de flux étant exprimée en maxwells. La relation (2) devient :

$$EI'dt = RI'^2dt + 10^{-8}\, I'd\Phi$$

d'où l'on déduit, comme expression, en volts, de la f. é. m. d'induction :

$$e = -10^{-8}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Etudions maintenant le problème, non plus dans le cas où le circuit se déplace dans le sens où l'entraînent les forces électromagnétiques dues au champ, mais dans le cas où *nous forçons le circuit à se déplacer* en sens opposé.

Nous dépensons alors du travail mécanique *contre* le champ. Pendant le temps dt qui suit l'instant t, le travail $d\mathcal{C}$ ainsi dépensé *contre* les forces électromagnétiques *s'ajoute* à l'énergie électrique fournie par le générateur pour donner de l'énergie calorifique. Le principe de la conservation de l'énergie donne :

$$EI'dt + d\mathcal{C} = RI'^2dt.$$

Or le travail $d\mathcal{C}$ dépensé *contre* les forces électromagnétiques a pour expression (§ 241) :

$$d\mathcal{C} = -I'd\Phi.$$

Donc :

$$EI'dt - I'd\Phi = RI'^2dt.$$

Cette équation est identique à la relation (2) du précédent cas. La relation (2) est donc générale et on en déduit, comme dans le premier cas, pour expression de la f. é. m. d'induction :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt},$$

si l'on exprime toutes les grandeurs en unités pratiques, ou bien :

$$\boxed{e = -10^{-8}\,\frac{d\Phi}{dt}}$$

si l'on veut obtenir e en volts, en continuant d'exprimer Φ en maxwells et t en secondes.

Dans la formule précédente, e et Φ sont des valeurs algébriques. Pour déterminer leurs signes, choisissons sur le circuit un sens positif arbitraire : e sera positif si cette f. é. m. tend à produire seule un courant circulant dans le sens positif. D'autre part, un tel courant crée à travers le circuit un flux Φ_0 ; les flux Φ seront positifs quand ils seront de même sens que Φ_0.

REMARQUE. — De ce que l'expression analytique de la f. é. m. d'induction est la même dans les deux cas qui viennent d'être étudiés, il ne faudrait pas conclure que le sens de cette f. é. m. dans le circuit est le même. On ne doit pas oublier que les variations de Φ sont de signes contraires dans les deux cas, ce qui entraîne un changement du signe de e lorsqu'on passe de l'un à l'autre.

En somme, lorsque le circuit se déplace *sous l'action du champ*, le courant est *moins* intense que si le circuit était immobile ; lorsque nous imposons au circuit un déplacement de sens contraire, l'intensité du courant est plus grande qu'en l'absence de déplacement.

247. — Déplacement, dans un champ magnétique, d'un circuit fermé ne contenant aucun générateur de courant. Loi de Lenz. — L'expression trouvée au paragraphe précédent pour la f. é. m. d'induction :

$$e = -10^{-8}\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (1)$$

montre que cette f. é. m. est indépendante de la f. é. m. E du générateur existant dans le circuit qui se déplace.

Il pourrait sembler légitime d'en déduire que la relation (1) est encore vraie lorsque $E = 0$, c'est-à-dire d'en conclure que le déplacement, dans un champ magnétique, d'un circuit fermé ne contenant pas de générateur, fait encore naître dans ce circuit une f. é. m. d'induction ayant pour valeur :

$$e = -10^{-8}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Mais nous devons remarquer que le raisonnement fait au paragraphe précédent et qui fait intervenir la conservation de l'énergie n'est plus applicable lorsque le circuit ne contient pas de générateur. En effet, si le circuit n'est le siège d'aucun courant, il n'est soumis à aucune force de la part du champ. Il n'y a donc plus de travail effectué *par* ou *contre* de telles forces pendant le déplacement, et il n'y a plus lieu de faire intervenir une énergie électrique dépensée ou créée pour satisfaire au principe de la conservation de l'énergie.

En d'autres termes, le principe de la conservation de l'énergie ne permet ni d'affirmer, ni de nier, *a priori*, l'existence d'un courant induit dans de telles conditions.

Or, l'*expérience montre qu'un tel déplacement produit en général un courant.* Nous décrirons au paragraphe suivant les expériences classiques qui établissent cette propriété importante. Remarquons alors que, l'existence d'un courant induit étant admise, le principe de la conservation de l'énergie permet d'étudier le problème, c'est-à-dire de préciser la condition nécessaire à la production de ce courant, ainsi que le sens du courant, et l'expression de la f. é. m. correspondante.

1° CONDITION POUR QUE LE DÉPLACEMENT PRODUISE UN COURANT INDUIT. — Dire que, pendant le déplacement du circuit, un courant s'y produit, c'est dire qu'il apparaît de l'énergie électrique. Donc, pendant ce déplacement, un travail doit être dépensé *contre* les forces électromagnétiques exercées par le champ sur le courant. D'après la relation : $d\mathcal{T} = -i\,d\Phi$, qui donne ce travail pour un déplacement infiniment petit, pour qu'on ait : $d\mathcal{T} \neq 0$, il faut que : $d\Phi \neq 0$.

Ainsi *le déplacement d'un circuit fermé dans un champ magnétique ne produit une f. é. m. d'induction que s'il résulte de ce déplacement une variation du flux traversant l'intérieur du circuit c'est-à-dire un flux coupé par le circuit.*

Par exemple, une *translation* d'un circuit indéformable, dans un champ magnétique *uniforme*, ne fait pas varier le flux traversant l'intérieur du circuit et n'y produit pas de phénomènes d'induction.

2° SENS DU COURANT INDUIT. LOI DE LENZ. — Pour qu'il apparaisse un courant induit, du travail mécanique doit être dépensé, pendant le déplacement du circuit, *contre* les forces électromagnétiques exercées sur lui par le champ.

Donc, **le courant induit a un sens tel que, par ses effets électromagnétiques, il s'oppose au déplacement qui le produit.** C'est la *loi de Lenz.*

3° EXPRESSION DE LA F. É. M. D'INDUCTION. — Faisons immédiatement le calcul dans le système pratique. Soit, à un instant t pendant le déplacement, e la f. é. m. d'induction exprimée en volts, I l'intensité du courant induit exprimée en ampères. Pendant le temps dt secondes qui suit l'instant t, l'énergie électrique apparue a pour valeur : $eIdt$ joules.

D'autre part, si nous appelons $d\Phi$ la variation, pendant ce temps, du flux d'induction exprimé en maxwells qui traverse l'intérieur du circuit, le travail *dépensé* pendant ce même temps *contre* les forces électromagnétiques vaut : $d\mathcal{T} = -10^{-8}\,Id\Phi$ joules.

Le principe de la conservation de l'énergie donne alors :

$$eIdt = -10^{-8}\,Id\Phi,$$

d'où :

$$\boxed{e = -10^{-8}\,\frac{d\Phi}{dt}.}$$

Nous retrouvons bien l'expression établie au paragraphe précédent. Cette expression confirme le fait, établi plus haut, qu'un déplacement du circuit ne produit une f. é. m. d'induction que s'il entraîne une variation du flux intérieur.

4° DÉPLACEMENT D'UN CIRCUIT NON FERMÉ. — Bien entendu, si le circuit qui se déplace n'est pas fermé, il ne peut pas exister de courant induit. *La f. é. m. d'induction existe cependant*, ce qui revient à dire que le fait primordial dû au déplacement du circuit est la production d'une *force électromotrice.*

Un circuit ouvert qu'on déplace dans un champ magnétique est comparable en somme à un circuit ouvert contenant un générateur de courant quelconque. Dans un cas comme dans l'autre, dès qu'on ferme le circuit un courant se manifeste.

248. — Phénomènes d'induction produits sans déplacement. — Nous avons vu (§ 246 et 247) que toutes les fois qu'on déplace un circuit dans un champ magnétique *de manière que le flux qui le traverse varie*, il naît dans ce circuit une f. é. m. d'induction dont la valeur et le sens sont définis par la relation :

$$e = -10^{-8}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Une question se pose maintenant : la véritable cause du phénomène d'induction est-elle le déplacement relatif du circuit par rapport au champ, ou est-elle la variation qui en résulte pour le flux traversant l'intérieur du circuit ? En d'autres termes, une variation du flux obtenue sans déplacement produit-elle une f. é. m. d'induction, et le déplacement dans les expériences des paragraphes précédents n'a-t-il que l'importance secondaire d'un procédé permettant de faire varier le flux ? L'expérience, qui seule permet de répondre à la question, confirme cette dernière manière de voir (§ 251).

L'énoncé de la loi de Lenz, donné au paragraphe 247, énoncé qui fixe le sens du courant induit, doit être modifié puisqu'il supposait la variation du flux produite par un déplacement. La forme générale de la loi est la suivante :

Le courant induit a un sens tel que la naissance de son propre flux tend à s'opposer à la variation du flux inducteur.

Expliquons cet énoncé. Le courant qui prend naissance dans le circuit induit lorsque varie le flux inducteur, crée un champ magnétique, d'où l'apparition d'un flux supplémentaire traversant l'intérieur de ce circuit ; pour la commodité du langage appelons *flux induit* ce dernier. La signification de la loi de Lenz est alors la suivante : *le flux induit est de même sens que le flux inducteur lorsque celui-ci diminue, de sens contraire lorsque le flux inducteur augmente.* Comme le sens du flux induit est lié au sens du courant induit, celui-ci est bien défini par la loi.

L'énoncé général de la loi de Lenz qui vient d'être donné, et qui concorde avec celui du paragraphe 247 dans le cas particulier où l'induction est due à un déplacement, est une conséquence de la formule :

$$e = -10^{-8}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Cette formule montre en effet que la f. é. m. d'induction e et la variation de flux $d\Phi$ qui la produit sont de signes contraires. Or, l'intensité du courant induit et, par suite aussi son propre flux qui naît en même temps que lui, sont du même signe que e (§ 246), donc d'un signe contraire à celui de $d\Phi$: le flux dû au courant induit tend bien, en s'installant, à empêcher la *variation* du flux inducteur. L'expérience (§ 251) confirme cette conséquence de la formule.

249. — Enoncé général des lois de l'induction. — Jusqu'ici les variations de flux provoquant la naissance de courants induits avaient lieu dans l'*air*, c'est-à-dire dans un milieu non magnétique. On peut se demander ce qui se produit dans le cas où la variation de flux a lieu dans le fer par exemple.

D'abord nous avons indiqué (§ 209) que, dans le fer, il y avait lieu de considérer deux vecteurs : le *champ magnétique* H et l'*induction magnétique* $\mathcal{B}$. C'est le second qui joue le rôle fondamental dans les phénomènes d'induction, d'où son intérêt.

De nombreuses expériences montrent en effet que le flux qui doit intervenir dans la production des courants induits est le FLUX D'INDUCTION et non le flux du vecteur champ magnétique H. Citons l'expérience suivante (fig. 250) :

Un circuit électrique comprend un générateur relié aux bornes d'une petite bobine verticale B. Plaçons, autour de B, une seconde bobine B' reliée à un galvanomètre. Le courant dans B étant établi, le galvanomètre est au zéro. Enfonçons un noyau de fer doux dans B, on observe une déviation du galvanomètre, ce qui montre la production d'un courant induit dans B'. L'introduction du fer doux a modifié le flux d'*induction* et créé un courant induit.

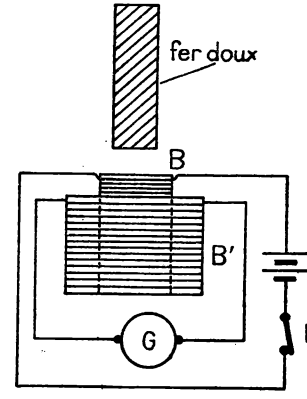


FIG. 250. — L'introduction du fer doux dans B donne naissance à un courant induit dans B'.

En définitive, les phénomènes d'induction qui prennent naissance dans un circuit situé dans un champ magnétique sont régis par les lois suivantes :

1° **Toutes les fois que le flux d'induction qui traverse l'intérieur d'un circuit subit une variation $d\Phi$, le circuit devient le siège d'une force électromotrice d'induction e.**

2° **Cette f. é. m. d'induction n'existe que pendant le temps dt où varie le flux inducteur.**

3° **Le sens de la f. é. m. d'induction est tel que le courant qu'elle peut donner dans le circuit s'oppose, par la naissance de son flux, à la variation du flux inducteur.**

4° **La f. é. m. d'induction est donnée, en grandeur et en signe, par la formule :**

$$e = 10^{-8} \frac{d\Phi}{dt}$$

250. — Force électromotrice d'induction dans un élément de courant mobile. — Considérons le cas de la barre qui peut se déplacer sur deux rails parallèles (fig. 238, § 237). Supprimons la batterie d'accumulateurs et remplaçons-la par un galvanomètre, un aimant créant toujours un champ magnétique H vertical. Déplaçons rapidement la barre de MN en M'N' (fig. 238), parallèlement aux rails, nous observons une déviation du galvanomètre qui

s'explique aisément : en déplaçant la barre, nous avons fait varier le flux qui traverse le circuit, d'où courant induit.

Soit l la longueur de l'élément de circuit qui se déplace et soit v sa vitesse. La variation de flux $d\Phi$ est le *flux coupé* par l'élément. Pendant le temps dt la barre s'est déplacée de la longueur $v\,dt$; l'aire balayée est, si la barre est normale aux rails :

$$dS = l \times v\,dt$$

Le champ étant supposé normal au plan des rails, le flux coupé est :

$$d\Phi = l \times v\,dt \times H$$

D'après la loi de Lenz, la f. é. m. d'induction qui prend naissance a pour expression :

$$e = 10^{-8}\frac{d\Phi}{dt} = 10^{-8}\,H\,l\,v.$$

Si le champ H n'est pas normal à l'aire balayée, H doit être remplacé par sa composante H_n normale à cette aire. De même, si la vitesse v n'est pas normale à l'élément de circuit qui se déplace, seule la composante v_n perpendiculaire à l'élément intervient.

Finalement, la force électromotrice d'induction est donnée par la formule :

$$\boxed{e = 10^{-8}\,H_n\,l\,v_n}$$

e étant exprimé en volts et les autres grandeurs en unités électromagnétiques C. G. S.

REMARQUE. — Dans un milieu ferro-magnétique, le champ H devrait naturellement être remplacé par l'induction $\mathcal{B}$.

251. — Expériences montrant la production de courants induits. — PREMIÈRE EXPÉRIENCE. — Dans le champ magnétique d'un barreau NS (fig. 251), déplaçons de B_1 en B_2 une bobine dont le circuit est fermé sur un galvanomètre (non représenté sur la figure).

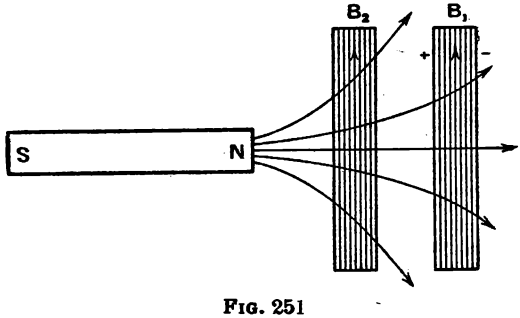


FIG. 251

Ce circuit ne contient pas de générateur de courant et tant que la bobine est immobile, le galvanomètre reste au zéro. *Pendant toute la durée du déplacement, le galvanomètre indique l'existence d'un courant dans le circuit.* Si le galvanomètre utilisé est tel que le sens de sa déviation varie avec le sens du courant, nous constatons que le courant induit a le sens que représente la flèche dessinée sur B_1 et sur B_2.

Ce sens est bien celui qu'on déduit de la formule : $e = -10^{-8}\frac{d\Phi}{dt}$. Choisissons en effet, arbitrairement, un sens positif sur la bobine, celui de la flèche par exemple ; la f. é. m. et l'intensité du courant sont positives lorsque le courant a ce sens. Cette convention fixe les signes des faces de la bobine et par suite aussi le signe du flux qui la traverse (§ 246). Dans le cas de la figure, la face positive est à gauche, les lignes de force du champ sortent de la bobine par sa face négative, le flux Φ est négatif. Quand la bobine passe de B_1 en B_2, le flux qui la traverse croît en valeur absolue et par suite décroît algébriquement : $d\Phi$ est négatif. D'après la formule : $e = -10^{-8}\frac{d\Phi}{dt}$, e est positif, la flèche représente bien le sens de la f. é. m. d'induction. L'application de la loi de Lenz telle qu'elle est énoncée (§ 247) conduirait, bien entendu, au même résultat ; seule serait modifiée la manière de s'exprimer.

Si nous avions choisi comme sens positif le sens inverse de la flèche, le flux Φ et sa variation $d\Phi$ seraient positifs, e serait négatif ; nous trouverions bien encore que la f. é. m. d'induction a le sens de la flèche.

Revenons à l'expérience. Si nous déplaçons la bobine de B_2 en B_1 en conservant la même orientation du barreau, ou si nous déplaçons la bobine de B_1 en B_2 en présence du barreau retourné bout pour bout, nous constatons que, dans chaque cas, le sens du courant induit est inverse du précédent.

Enfin nous trouvons que, dans toutes ces expériences, *seul* le déplacement *relatif* intervient. Le résultat est le même, soit que nous déplacions la bobine dans un sens en présence du barreau immobile, soit que nous déplacions le barreau en sens opposé devant la bobine immobile. C'est ainsi que le déplacement du globe terrestre dans l'espace ne produit dans la bobine aucun courant induit.

Deuxième expérience — On observe que, dans les expériences précédentes, on peut remplacer, sans rien changer aux résultats, le barreau aimanté par une bobine *bb'* (fig. 252) qui lui serait équivalente en ce qui concerne les phénomènes électromagnétiques (§ 242). Le circuit de cette bobine *bb'* contiendrait par conséquent un générateur de courant (non représenté sur la figure).

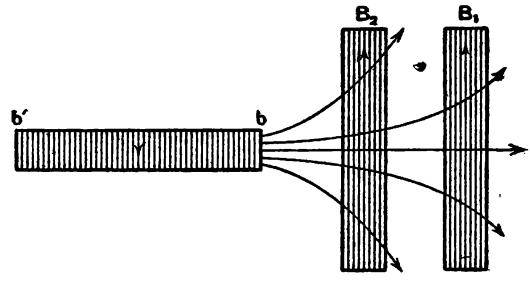


Fig. 252

Donc, *pour les phénomènes d'induction comme pour les phénomènes électromagnétiques, les champs magnétiques des courants et ceux des aimants ont les mêmes propriétés.*

Nous pouvons encore remarquer que le courant induit dans la bobine B est, dans l'espace, de sens contraire à celui de la bobine inductrice *bb'*, lorsqu'on diminue la distance des deux bobines. Or, deux bobines ainsi

disposées et traversées par des courants de sens contraires se repoussent. Le courant induit a donc bien un sens tel qu'il s'oppose au déplacement qui le produit ; nous vérifions ainsi la loi de Lenz relative au déplacement (§ 247, 2°).

Ce montage permet également d'obtenir un courant induit sans déplacement ; il suffit de faire varier l'intensité du courant qui circule dans la bobine *bb'* pour réaliser une variation de flux dans B. Supposons le galvanomètre construit de telle sorte que le sens de sa déviation soit lié au sens du courant.

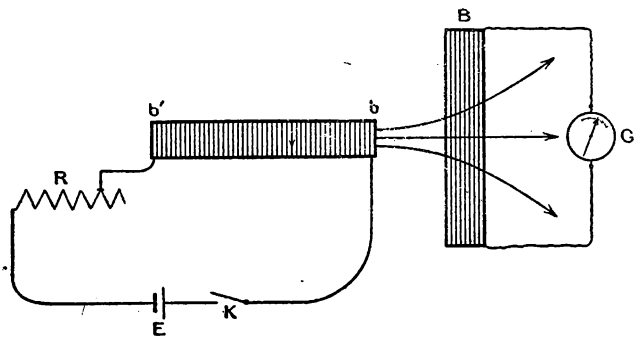


FIG. 252 *bis*

Lorsque nous *fermons* sur le générateur de courant le circuit de la bobine inductrice *bb'* (fig. 252 *bis*) ou lorsque nous *augmentons* l'intensité du courant dans cette bobine, nous donnons au flux qui traverse la bobine induite B un *accroissement*, c'est-à-dire une variation de même signe que si nous *approchions* B de *bb'*. Nous observons que le sens du courant induit dans B est bien le même dans les trois expériences, c'est-à-dire le sens contraire de celui du courant de la bobine inductrice *bb'*.

Au contraire, lorsque nous *coupons* le circuit de la bobine *bb'*, ou lorsque nous *diminuons* l'intensité de son courant, ou lorsque nous *éloignons* B de *bb'*, nous faisons naître dans B un courant induit de même sens que le courant inducteur.

TROISIÈME EXPÉRIENCE. — La propriété du courant induit, indiquée par la loi de Lenz, d'avoir un sens tel qu'il s'*oppose au déplacement* qui lui donne naissance, est établie d'une manière très nette par l'expérience suivante :

Dans le champ magnétique à peu près uniforme et horizontal qui existe entre les pièces polaires N et S d'un électro-aimant (fig. 253), disposons un circuit rectangulaire fermé ABCD dont le plan soit perpendiculaire aux lignes de force (et aussi au plan de la figure). Les côtés AB et CD du cadre sont verticaux, les côtés AC et BD horizontaux ; seule la moitié inférieure du cadre est dans la partie intense du champ.

Supposons pour un instant qu'un courant existe dans le circuit et cherchons, d'après les lois de l'électromagnétisme, quelle est l'action du champ sur lui. L'action sur le côté BD est très faible et pratiquement négligeable, puisque ce côté se trouve dans une partie très peu intense du champ. Les forces exercées sur les côtés verticaux AB et CD sont dans le plan du circuit, horizontales, égales et directement opposées ; leurs effets se détruisent. Il ne reste que la force *f* exercée sur le côté horizontal AC ; elle est verticale, et dirigée vers le haut ou vers le bas suivant le sens du courant.

Supposons alors qu'on donne au circuit (simplement fermé sur lui-même et ne contenant aucun générateur de courant) un mouvement de va-et-vient dans son propre plan et parallèle à la force f, c'est-à-dire vertical. On fait ainsi varier à chaque instant le flux qui traverse l'intérieur du circuit : on doit observer un courant d'induction dans le circuit, et le sens de ce courant doit être tel que, à chaque instant, l'action du champ sur lui s'oppose au déplacement.

Nous observons ce dernier caractère très nettement si l'appareil est construit de manière que le champ magnétique et le courant induit soient suffisamment intenses. Nous réalisons ces conditions de la manière suivante :

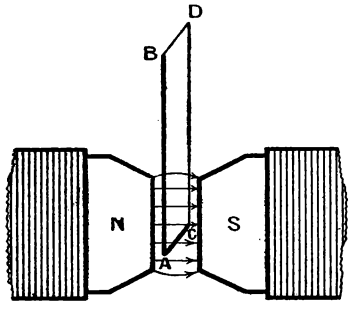


FIG. 253

Nous ne laissons qu'une faible distance entre les pièces polaires de l'électro-aimant, nous faisons passer dans la bobine de celui-ci un courant intense ; nous réalisons facilement ainsi entre les pièces polaires un champ de l'ordre de 10 000 gauss. D'autre part nous constituons le circuit par un seul tour de gros fil de cuivre (diamètre de l'ordre de 4 à 5 mm) ; nous obtenons ainsi un circuit extrêmement peu résistant dans lequel une f. é. m. d'induction déterminée produit un courant relativement intense.

Dans ces conditions, si, tenant le circuit à la main, nous produisons le déplacement indiqué, nous sentons très nettement une résistance au déplacement, comme si le circuit était plongé dans un milieu visqueux. Pour vaincre cette résistance au déplacement, nous sommes obligés de dépenser un travail mécanique ; nous en retrouvons l'équivalent dans le circuit sous forme de chaleur créée par l'effet Joule.

252. — ***Induction dans les masses métalliques. Courants de Foucault.*** — Les phénomènes d'induction qui viennent d'être étudiés se produisent dans des circuits pratiquement linéaires. Des phénomènes analogues se produisent dans le sein même d'une masse conductrice lorsqu'on la déplace dans un champ magnétique. Des courants d'induction, fermés sur eux-mêmes, prennent naissance dans la masse de métal ; on les appelle **courants de Foucault.** Leur sens est encore défini par la loi de Lenz, c'est-à-dire que, par leurs effets électromagnétiques, ils s'opposent au déplacement qui les produit.

Rappelons quelques expériences classiques qui mettent ces phénomènes en évidence.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE. — Utilisons, comme dans la dernière expérience du paragraphe précédent, le champ magnétique intense créé entre les pièces polaires rapprochées d'un électro-aimant (fig. 254). Dans ce champ disposons un disque de cuivre ou d'aluminium D perpendiculaire aux lignes de force, et faisons-le osciller comme un pendule autour d'un axe horizontal *xy* paral-

lèle à ces lignes. Dans son déplacement, le disque coupe les lignes de force du champ ; les f. é. m. d'induction qui en résultent donnent dans la masse du disque des courants intenses, grâce à la bonne conductibilité du cuivre ou de l'aluminium *l'action du champ sur ces courants s'oppose au déplacement du disque.* Nous constatons en effet que celui-ci qui se déplaçait librement tant qu'il était en dehors du champ, s'arrête en un temps très court dès qu'il arrive entre les pièces polaires N et S comme s'il pénétrait à cet instant dans un milieu visqueux.

SECONDE EXPÉRIENCE. — Le disque de cuivre D (fig. 255), plus grand que dans l'expérience précédente, a sa partie supérieure seule entre les pièces

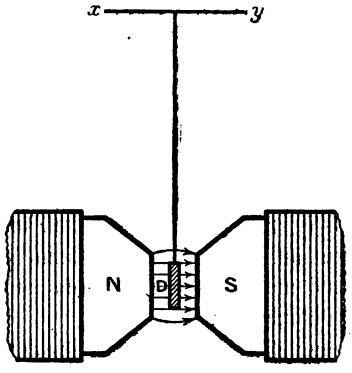


FIG. 254

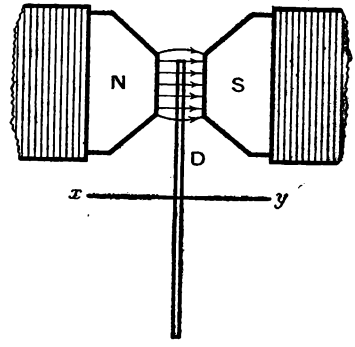


FIG. 255

polaires de l'électro-aimant, et, au lieu de le faire osciller, nous le faisons tourner à la main d'un mouvement continu autour d'un axe horizontal *xy* à l'aide d'une manivelle. Dès que nous créons le champ magnétique en lançant un courant dans l'électro-aimant, nous éprouvons brusquement une grande difficulté à faire tourner le disque, comme s'il était soumis à un frottement considérable. En même temps le disque s'échauffe notablement, par effet Joule. Comme dans la dernière expérience du paragraphe précédent, l'énergie mécanique dépensée contre les forces électromagnétiques se transforme finalement en énergie calorifique, après avoir pris intermédiairement la forme électrique.

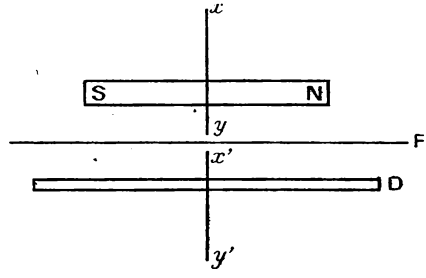


FIG. 256

TROISIÈME EXPÉRIENCE. — Faisons tourner un barreau aimanté horizontal NS (fig. 256) autour d'un axe vertical *xy*. Plaçons au-dessous du barreau un disque de cuivre D mobile lui-même autour d'un axe vertical *x'y'* situé dans le prolongement de *xy*. Aucune liaison mécanique n'existe entre le barreau

et le disque : les axes xy et $x'y'$ sont indépendants, et une feuille de papier F peut même être tendue horizontalement pour éviter un entraînement possible par l'air. Malgré ces précautions le disque prend le mouvement de rotation de même sens que celui du barreau ; des courants de Foucault prennent naissance dans le disque et ont un sens tel qu'ils s'opposent au déplacement *relatif*.

On utilise les courants de Foucault pour le freinage de certains appareils et pour amortir les oscillations des systèmes mobiles ; mais, le plus souvent, ils sont nuisibles. On les affaiblit considérablement en *feuilletant* les masses métalliques.

253. — ***Quantité d'électricité induite.*** — Par un moyen quelconque faisons varier de Φ_1 à Φ_2 la valeur, en maxwells, du flux qui traverse l'intérieur d'un circuit fermé.

Soit un instant t pendant la variation du flux ; la f. é. m. d'induction à cet instant, exprimée en volts, est :

$$e = -10^{-8}\frac{d\Phi}{dt},$$

et le circuit, de résistance R ohms, est le siège d'un courant induit ayant pour intensité, en ampères :

$$I = -\frac{10^{-8}}{R}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Pendant le temps dt qui suit l'instant t, ce courant transporte une quantité d'électricité induite dont la valeur, en coulombs, est :

$$dq = I dt$$

ou :

$$dq = -\frac{10^{-8}}{R}d\Phi.$$

La quantité totale d'électricité induite dans le circuit pendant que le flux qui le traverse varie de Φ_1 à Φ_2 est donc, en coulombs :

$$q = -\frac{10^{-8}}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = -\frac{10^{-8}}{R}(\Phi_2 - \Phi_1),$$

ou :

$$q = \frac{10^{-8}}{R}(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Cette relation montre que la *quantité d'électricité induite*, pour un circuit donné (R constant), dépend seulement des valeurs du flux au début et à la fin, et est indépendante, en particulier, de la loi de variation du flux en fonction du temps, alors que, au contraire, la *f. é. m. d'induction* dépend essentiellement de cette loi (§ 249).

254. — ***Mesure relative de l'intensité d'un champ magnétique uniforme.*** — Cette question a déjà été traitée dans l'étude du magnétisme (§ 205). Nous allons indiquer ici une nouvelle méthode basée sur les lois de l'induction.

Considérons un circuit fermé plan, de forme quelconque et d'aire S, situé dans un champ magnétique uniforme d'intensité H. Ce circuit est mobile autour d'un axe fixe *xy* situé dans son plan et perpendiculaire au vecteur H.

Donnons au circuit une première position pour laquelle son plan soit perpendiculaire à la direction du champ. Il est alors traversé par un flux de valeur absolue SH. Par une rotation de 180° autour de l'axe *xy*, retournons le circuit face pour face ; il est de nouveau traversé par un flux de valeur absolue SH. Mais, les lignes de force du champ sortant du circuit par l'une de ses faces dans la première position et par l'autre face dans la seconde, nous devons affecter de signes contraires les deux flux, et par suite la variation du flux lorsque le circuit passe de la première position à la seconde est 2SH. D'après le paragraphe précédent, la quantité d'électricité induite (exprimée en C. G. S.) est alors :

$$Q = \frac{2SH}{R}$$

en appelant R la résistance du circuit dans le même système.

Répétons une expérience analogue avec le même circuit, dans un autre champ magnétique uniforme d'intensité H'. La quantité d'électricité induite est :

$$Q' = \frac{2SH'}{R}.$$

Nous en déduisons :

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{H}{H'}.$$

La mesure du rapport des intensités de deux champs magnétiques se trouve ainsi ramenée à celle du rapport de deux quantités d'électricité. La rotation du circuit induit pouvant être effectuée en un temps très court, le *galvanomètre balistique* (§ 271) permet la mesure de $\frac{Q}{Q'}$ et par suite de $\frac{H}{H'}$.

Le circuit utilisé est généralement une bobine circulaire plate, mobile autour d'un de ses diamètres. Dans chaque expérience, on dispose d'abord ce diamètre perpendiculairement à la direction du champ magnétique, puis on place la bobine de manière que son plan soit perpendiculaire à cette même direction et on la retourne brusquement face pour face. Les extrémités du fil de la bobine sont reliées aux bornes d'un galvanomètre balistique qui reçoit la quantité d'électricité induite.

Cette méthode permet de mesurer les composantes verticale Z et horizontale H_0 du champ terrestre. Pour mesurer Z, le diamètre fixe de la bobine est perpendiculaire au plan du méridien magnétique et les positions initiale et finale de cette bobine sont horizontales. Pour H_0 même disposition, mais les positions initiale et finale de la bobine sont verticales.

Connaissant Z et H_0, nous en déduisons l'inclinaison I par la formule :

$$tg I = \frac{Z}{H_0}.$$

SELF-INDUCTION

255. — ***Phénomène de self-induction.*** — Considérons un circuit fermé contenant un générateur, et par suite traversé par un courant. Celui-ci crée un champ magnétique et, de ce fait, un certain flux traverse l'intérieur du circuit.

Par un procédé quelconque, faisons varier l'intensité du courant. Il en résulte une variation de l'intensité du champ et par suite une variation du flux traversant le circuit.

L'expérience montre qu'*il se produit dans le circuit une f. é. m. d'induction*, absolument comme si le flux était dû à une cause autre que le courant du circuit lui-même. Ce phénomène d'induction d'un circuit par son propre courant est appelé *self-induction.*

La self-induction obéit aux lois générales de l'induction énoncées au paragraphe 249, et en particulier à la loi de Lenz :

Lorsque le courant croît, la f. é. m. de self-induction est de sens contraire à celle du générateur; *lorsque le courant décroît, elle est de même sens que celle dernière.*

Dans tous les cas l'établissement de la f. é. m. d'induction a donc pour effet de gêner *la variation* du courant.

La f. é. m. de self-induction est donnée par la formule générale (§ 249):

$$e = -10^{-8}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Sa valeur absolue est d'autant plus grande que le flux, et par suite le courant, varie plus rapidement.

Considérons par exemple un circuit contenant un générateur de courant, un interrupteur et *une bobine à noyau de fer.* Grâce à la présence de la bobine et de son noyau, le flux d'induction qui traverse le circuit est relativement grand pour une intensité de courant donnée, les phénomènes de self-induction y sont très marqués.

Supposons d'abord le circuit coupé ; il ne passe aucun courant. Fermons l'interrupteur. Le courant s'établit, le flux traversant l'intérieur du circuit croît ; la f. é. m. de self-induction, de sens opposé à celle du générateur, gêne l'installation du courant ; celui-ci au lieu de prendre instantanément l'intensité que lui assignerait la loi d'Ohm, ne s'établit que progressivement. Avec un galvanomètre construit de manière à obéir immédiatement au courant, on peut observer le phénomène qui, avec une forte bobine, est appréciable pendant plusieurs secondes.

Le courant établi, coupons maintenant le circuit. Le flux traversant le circuit diminue ; la f. é. m. de self-induction est de même sens que celle du générateur. Cette f. é. m. de self-induction *de rupture* est beaucoup plus grande, pour un même circuit, que la f. é. m. de *fermeture* du cas précédent, parce que la variation de flux est plus rapide, la rupture du circuit étant plus brusque que l'installation du courant. On atteint facilement plusieurs milliers de volts, f. é. m. suffisante pour faire passer un courant à travers la coupure sous forme d'une étincelle visible.

Décrivons quelques expériences de self-induction.

256. — ***Expériences de self-induction.*** — PREMIÈRE EXPÉRIENCE. — Etablissons un circuit contenant un générateur G (fig. 257) d'une centaine de volts (le secteur continu, par exemple), un interrupteur I, une bobine à noyau de fer B et un rhéostat R. Puis, en dérivation sur les extrémités de la bobine installons une lampe à incandescence L et réglons le rhéostat de manière que, le courant étant établi, le filament de la lampe soit rouge. Coupons le courant à l'aide d'un interrupteur, nous observons que, pendant un instant, la lampe éclaire beaucoup plus ; la rupture a fait naître dans la bobine une f. é. m. de self-induction beaucoup plus considérable que la f. é. m. du générateur ; cette f. é. m. d'induction lance un courant intense dans le seul circuit existant après la rupture, c'est-à-dire celui qui contient la bobine et la lampe.

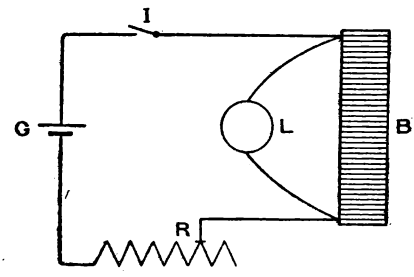


FIG. 257

Répétons l'expérience après avoir enlevé le noyau de fer de la bobine ; le flux qui traverse celle-ci pour un courant déterminé devient beaucoup moindre ; il en est de même de la f. é. m. de self-induction de rupture : le phénomène devient à peine sensible.

SECONDE EXPÉRIENCE. — Branchons en A et B (fig. 258), sur un secteur continu à 110 volts, un circuit contenant un rhéostat R, une lime L et un électro-aimant en fer à cheval E muni de son armature. En déplaçant l'extrémité C du fil sur la surface rugueuse de la lime nous observons les étincelles brillantes qui se produisent chaque fois que, le fil passant d'une aspérité à une autre, le circuit se trouve momentanément coupé.

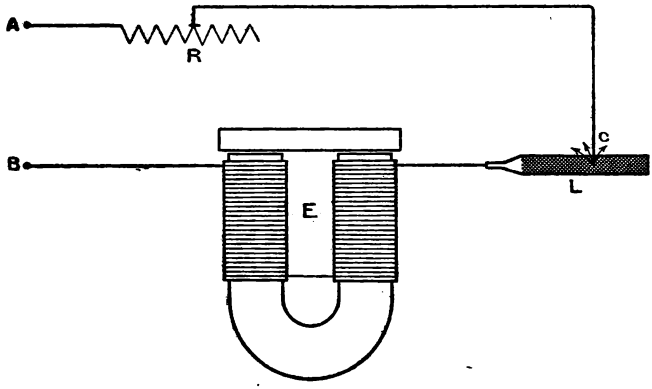


FIG. 258

Reprenons l'expérience après avoir retiré l'armature de l'électro-aimant, les étincelles sont moins brillantes : la réluctance du circuit magnétique est devenue plus grande et, d'après la formule du paragraphe 236, le flux d'induction dans les branches de l'électro-aimant est devenu plus faible et par suite aussi la f. é. m. d'induction de rupture.

TROISIÈME EXPÉRIENCE. — Enchâssons dans un disque isolant des sec-

teurs métalliques m (fig. 259) et supposons égales les surfaces de ces secteurs et celles des parties isolantes qui les séparent. Tous les secteurs métalliques communiquent avec une baguette conductrice montée sur l'axe de rotation du disque. Deux frotteurs métalliques f et f' s'appuient l'un sur la bague, l'autre sur le pourtour du disque. Ces frotteurs sont les extrémités d'un circuit contenant un générateur de courant, un électro-aimant et un ampèremètre (non représentés sur la figure).

Faisons tourner le disque. Un courant passe dans le circuit, pendant les seuls instants où le frotteur f' est en contact avec les secteurs métalliques ; si cependant, l'inertie de l'organe mobile de l'ampèremètre est suffisante, cet organe garde une déviation constante qui mesure l'*intensité moyenne* du courant.

Si le courant prenait son intensité définie par la loi d'Ohm dès que le frotteur f' entre en contact avec un secteur métallique, la déviation de l'ampèremètre devrait être deux fois plus petite que lorsque le disque est immobile avec f' sur un secteur métallique puisque, les secteurs métalliques et les secteurs isolants ayant des étendues égales, le courant ne passe que pendant la moitié du temps.

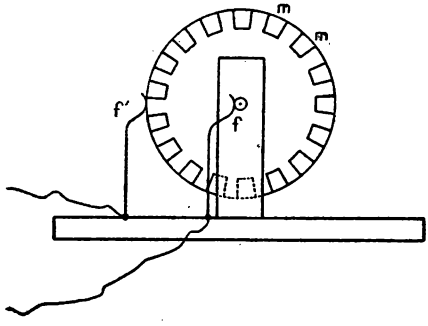


FIG. 259

Or, nous constatons que la déviation de l'ampèremètre est *plus petite* que la déviation ainsi prévue, et d'autant plus petite que le disque tourne plus vite, ce qui prouve bien qu'à chaque fermeture du circuit le courant ne s'établit que progressivement et n'a pas, dès le début du contact, la valeur assignée par la loi d'Ohm.

257. — ***Coefficient de self-induction. Henry.*** — Considérons le cas simple d'une bobine *sans noyau de fer* parcourue par un courant. L'intensité du champ magnétique créé par la bobine à l'intérieur est proportionnelle à l'intensité du courant (il n'en serait pas de même s'il y avait un noyau de fer). Par suite le flux Φ qui traverse l'intérieur de la bobine est proportionnel à l'intensité i du courant et nous pouvons écrire :

$$\Phi = Ai.$$

Comme le flux produit par un courant à travers son propre circuit sort par la face Nord, A est un coefficient *positif* d'après nos conventions de signe (§ 216).

Nous avons vu que les équations de dimension de Φ et i étaient dans le système électromagnétique :

$$\Phi = L^{3/2} M^{1/2} T^{-1} \qquad i = L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$$

Le coefficient $A = \frac{\Phi}{i}$ a pour dimension $A = L$. Il est exprimé en centimètres dans le système électromagnétique C. G. S.

Exprimons l'intensité en ampères (I), nous avons $\Phi = \frac{1}{10} AI$ et la f. é. m. de self-induction est donnée par la formule générale :

$$e = -10^{-8} \frac{d\Phi}{dt} = -10^{-9} A \frac{dI}{dt}.$$

Posons $10^{-9} A = L$, la formule précédente devient :

$$\boxed{e = -L \frac{dI}{dt}}$$

L s'appelle *coefficient de self-induction* du circuit. Il s'exprime avec une unité 10^9 fois plus grande que celle de A. C'est le **henry** (symbole H).

Nous avons : $A = \frac{\Phi}{I} \times 10$ d'où : $L = 10^{-9} A = 10^{-8} \frac{\Phi}{I}$.

D'où la définition du henry qui est l'unité du système pratique :

Le henry est le coefficient de self-induction d'un circuit qui est traversé par un flux de 10^8 *maxwells lorsqu'il est le siège d'un courant de* 1 *ampère.*

La formule $e = -L \frac{dI}{dt}$ nous donne une autre définition du henry :

Le henry est le coefficient de self-induction d'un circuit dans lequel une variation d'intensité de 1 *ampère en* 1 *seconde produit une force électromotrice d'induction de* 1 *volt.*

CALCUL DU COEFFICIENT DE SELF-INDUCTION D'UNE BOBINE LONGUE. — Soit une bobine longue cylindrique de longueur l de section droite S comportant N spires. Quand elle est traversée par un courant i u. e. m., le champ à l'intérieur est uniforme et a pour intensité :

$$H = 4\pi \frac{N}{l} i$$

Le flux qui traverse *une* spire d'aire S est :

$$\varphi = HS = 4\pi \frac{N}{l} i S$$

Le flux total qui traverse toute la bobine est donc :

$$\Phi = N\varphi = 4\pi \frac{N^2}{l} Si$$

En u. e. m., le coefficient de self-induction est :

$$A = \frac{\Phi}{i} = 4\pi \frac{N^2}{l} S$$

Dans le système pratique, ce coefficient, en henrys, est :

$$L = 10^{-9} \times 4\pi \frac{N^2}{l} S$$

Cette valeur ne peut être qu'approchée car le champ n'est pas uniforme d'un bout à l'autre de la bobine et il n'est pas non plus uniforme dans toute l'étendue de la section droite.

*258. — **Réalisation matérielle d'étalons de self-induction.*** — On trouve chez les constructeurs des séries de bobines étalonnées ayant des coefficients de self-induction qui vont de 0,01 à 10 henrys.

La figure 260 représente une bobine d'un henry ; elle est formée de fil de cuivre enroulé sur un cylindre de bois ayant un diamètre d'environ 5 centimètres ; le diamètre extérieur de la bobine est 14 centimètres et sa hauteur 4 centimètres ; sa résistance est de l'ordre de 100 ohms.

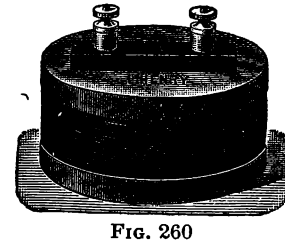


FIG. 260
Bobine d'un henry.

Le coefficient de self-induction d'un récepteur Morse ordinaire est de l'ordre de 10 henrys ; il est d'ailleurs variable pendant les déplacements de l'armature, puisque ceux-ci font varier la réluctance du circuit magnétique (§ 236).

Un circuit de transport d'énergie composé de deux fils de cuivre parallèles distants d'un mètre a un coefficient de self-induction d'environ 2,5 millihenrys au kilomètre. Ce coefficient diminue si l'on rapproche les deux fils de manière à diminuer l'aire comprise entre eux.

Les bobines des boîtes de résistances sont constituées par un fil replié d'abord sur lui-même, puis enroulé en double comme le montre la figure 138. Cette disposition a pour but de rendre sensiblement nul le coefficient de self-induction de la bobine.

*259. — **Etablissement du courant dans un circuit.*** — Nous avons dit au paragraphe 255 qu'à la fermeture d'un circuit contenant un générateur, le courant ne s'installe que progressivement. Nous allons établir, par le calcul, la loi de variation de l'intensité en fonction du temps.

Prenons comme origine des temps l'instant où nous fermons le circuit ; soit R et L la résistance et le coefficient de self-induction de celui-ci, I l'intensité à l'instant t, e la f. é. m. de self-induction au même instant et E la f. é. m. constante du générateur.

La loi d'Ohm appliquée à l'instant t s'exprime par la relation :

$$E + e = RI.$$

Or $e = -L\frac{dI}{dt}$, donc : $E - L\frac{dI}{dt} = RI$

et $$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

Telle est l'équation différentielle qui détermine la loi de variation.

$$L\,dI = (E - RI)\,dt.$$

$$\frac{L}{E-RI}\,dI = dt.$$

Les variables sont séparées. L'intégrale générale est donc :

$$\frac{L}{R}\,\text{Log.}\,(RI - E) = -t + \text{Log.}\,k.$$

$$RI - E = Ke^{-\frac{Rt}{L}}$$

e étant la base des logarithmes népériens ($e = 2{,}718\ldots$).

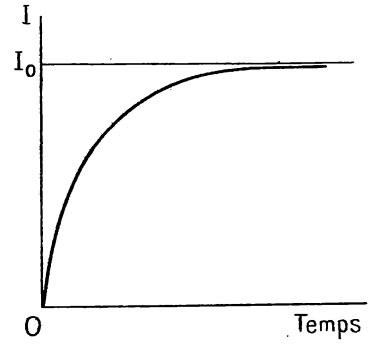


FIG. 261.— Etablissement du courant dans une bobine de self.

Au temps $t = 0$, nous devons avoir $I = 0$ d'où $K = -E$:

$$RI - E = -E\,e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \qquad (1)$$

La courbe de la figure 261 représente cette fonction. Théoriquement l'intensité I n'atteint sa valeur limite $I_0 = \frac{E}{R}$ qu'au bout d'un temps infini.

La quantité $\frac{R}{L}$ a pour dimension T^{-1} afin d'assurer l'homogénéité de la formule (1). La quantité $\frac{L}{R} = \Theta$ a donc les dimensions d'un temps. Cette quantité Θ qui règle la croissance de l'intensité s'appelle la **constante de temps** du circuit. *Plus Θ est grand, plus le courant tend lentement vers l'intensité limite.*

Pour un circuit de 100Ω de résistance ayant une self-induction de 10 henrys, la constante de temps $\Theta = 1/10$ s. Sur la formule (1), nous voyons que l'intensité ne différera de l'intensité maximum I_0 de 1/100 au bout du temps t, tel que $e^{-10t_1} = 1/100$ d'où : $t_1 = 0{,}46$ seconde.

Considérons maintenant le problème au point de vue *énergie*. L'équation différentielle précédente :

$$E = L\frac{dI}{dt} + RI$$

s'écrit, en multipliant par $I\,dt$:

$$EI\,dt = LI\,dI + RI^2\,dt$$

$EI\,dt$ représente l'énergie fournie par le générateur pendant l'intervalle de temps dt et $RI^2\,dt$ est l'énergie dissipée par effet Joule. La quantité $LI\,dI$ représente donc une énergie qui n'apparaît pas immédiatement et qui a été *emmagasinée par la bobine* : c'est de l'ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

Lorsque l'intensité passe de zéro à I, l'énergie totale emmagasinée par la self est :

$$W = \int_0^I LI\,dI = \frac{1}{2}\,LI^2$$

Cette énergie se retrouvera d'ailleurs lors de la suppression du courant qui ne se fait pas instantanément (§ 260).

REMARQUE. — Dans le cas d'une bobine longue nous avons (§ 257) :

$$L = 10^{-9} \times 4\pi \frac{N^2}{l} S \qquad \text{d'où} \qquad W = \frac{1}{2} \times 10^{-9} \times 4\pi \frac{N^2}{l} SI^2 \text{ joules}$$

Or le champ intérieur est $H = \frac{4\pi}{10} \frac{N}{l} I$, d'où :

$$I = \frac{10\, H\, l}{4\pi N}$$

et

$$W^{ergs} = \frac{1}{8\pi} Sl\, H^2$$

Or Sl est le volume v intérieur de la bobine.

$$W = \frac{1}{8\pi} H^2 v$$

Cette expression, établie dans le cas particulier d'une bobine longue sans fer, est générale. On a été amené à considérer l'énergie électromagnétique comme répartie dans tout l'espace, chaque élément de volume dv, autour d'un point où le champ magnétique est H et la perméabilité magnétique μ, contenant l'énergie $\mu \frac{H^2}{8\pi} dv$.

*260. — **Suppression d'un courant d'un générateur dans un circuit.*** — Supposons qu'un circuit contenant un générateur soit fermé depuis un temps assez long pour que l'intensité du courant ait atteint pratiquement sa valeur limite I_0.

Coupons le circuit à l'aide d'un interrupteur. La loi de variation de l'intensité I en fonction du temps est difficile à établir, car elle dépend de la manière dont fonctionne l'interrupteur. Supposons que le générateur soit mis hors circuit en le court-circuitant par une résistance négligeable.

Prenons comme origine des temps, l'instant où nous établissons le court-circuit. Soit I l'intensité à l'instant t, l'intensité à l'instant zéro étant I_0. La seule f. é. m. existant sur le circuit est la f. é. m. de self-induction $-L\frac{dI}{dt}$.

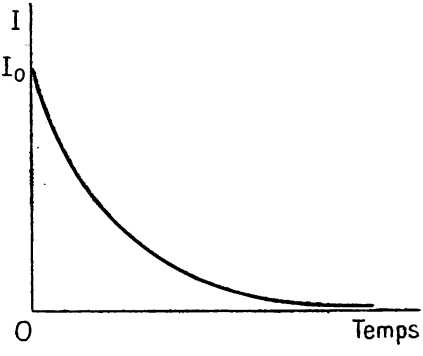


FIG. 262. — Disparition du courant dans une bobine de self.

La loi d'Ohm donne :

$$-L\frac{dI}{dt} = RI$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt.$$

En intégrant et tenant compte que pour $t = 0$, $I = I_0$ nous avons :

$$I = I_0\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

La courbe représentant les variations de I en fonction du temps est tracée sur la figure 262.

Il faut théoriquement un temps infini pour que l'intensité soit nulle ;

pratiquement l'intensité devient très faible au bout d'un temps très court qui dépend de la constante de temps $\Theta = \frac{L}{R}$ du circuit.

261. — ***Coefficient d'induction mutuelle de deux circuits.*** — Considérons deux circuits voisins, l'un C_1 contenant un générateur de courant, l'autre C_2 simplement fermé. Le courant I_1 passant dans C_1 envoie dans le circuit C_2 un flux Φ_1 proportionnel à l'intensité I_1. Posons :

$$\Phi_1 = 10^8 M I_1.$$

M est un coefficient de même nature que L et qui s'exprimera en henrys.

De même un courant I_2 dans le circuit C_2 enverra dans le circuit C_1 un flux Φ_2 proportionnel à I_2. Nous avons de même : $\Phi_2 = 10^8 M' I_2$.

On démontre que les coefficients M et M′ sont égaux. Leur valeur commune s'appelle le **coefficient d'induction mutuelle des deux circuits.**

Une variation dI_1 de l'intensité dans le premier circuit fera naître dans C_2 une f. é. m. d'induction e_1 donnée par la loi de Lenz :

$$e_1 = -10^{-8} \frac{d\Phi_1}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}.$$

De même une variation dI_2 de l'intensité dans C_2 produit dans C_1 une f. é. m. d'induction e_2 :

$$e_2 = -10^{-8} \frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt}.$$

Etablissons l'égalité des coefficients M et M′. Pour cela, considérons les deux circuits C_1 et C_2 parcourus par les courants I_1 et I_2 et calculons le travail nécessaire pour les écarter l'un de l'autre à une distance infinie. Pour cela nous pouvons par exemple laisser C_1 fixe et éloigner C_2 jusqu'à l'infini ; nous pouvons aussi laisser C_2 fixe et déplacer C_1 jusqu'à l'infini. Il est évident que le travail sera le même dans les deux cas. Evaluons ces travaux.

Dans le premier cas, la variation de flux subie par C_2 est $\Phi_1 = 10^8 M I_1$ et le travail mis en jeu est (§ 241) :

$$\mathcal{C} = I_2 \Phi_1 = 10^8 M I_1 I_2$$

Dans le second cas, la variation de flux subie par C_1 est $\Phi_2 = 10^8 M' I_2$ et le travail mis en jeu est (§ 241) :

$$\mathcal{C} = I_1 \Phi_2 = 10^8 M' I_1 I_2$$

L'égalité de ces deux travaux exige que $M = M'$.

Exercices.

68. On considère un solénoïde de longueur l possédant N spires de section s. On dispose d'une différence de potentiel constante U. L'une des bornes de la source est reliée à une des extrémités du solénoïde, l'autre borne est reliée à un contact mobile qui se déplace d'un mouvement uniforme le long d'une génératrice du solénoïde. Calculer l'intensité du courant en fonction du temps. On négligera les résistances et on appellera i_0 l'intensité du courant à l'instant initial et x_0 la longueur du solénoïde utilisée au même instant.

69. Sur une bobine ayant 10 cm. de diamètre et 3 mètres de longueur, on enroule régulièrement 1884 m de fil de cuivre dans lequel on fait passer un courant de 1 ampère. On place au centre de cette bobine, normalement à son axe, une petite bobine plate à fil fin ayant 1000 spires de 10 cm² de section. Calculer la f. é. m. induite dans la petite bobine lorsque le courant qui passe dans la grande bobine varie de 1 à 0 ampère en 1/100 de seconde, la variation se faisant proportionnellement au temps.

CHAPITRE XXIX

APPLICATIONS DES LOIS DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME MESURES ÉLECTRIQUES

I. — ÉLECTRODYNAMOMÈTRES

262. — ***Electrodynamomètre de Pellat.*** — Un électrodynamomètre est un appareil permettant de faire des mesures d'intensité de courant. Nous prendrons comme type l'électrodynamomètre de Pellat.

L'appareil comprend (fig. 263) : 1° une *longue* bobine B fixe, à enroulement régulier et dont l'axe est horizontal; 2° une bobine B′ à axe vertical placée à

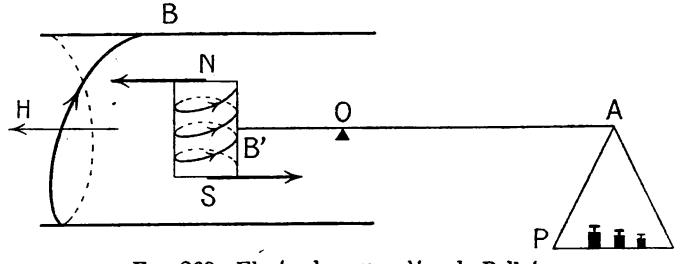


FIG. 263. Electrodynamomètre de Pellat.

l'intérieur de B de façon que les centres des deux bobines coïncident. Cette bobine B′ est fixée à l'extrémité du fléau d'une balance mobile autour du couteau O. L'autre extrémité du fléau est munie d'un plateau P suspendu à un couteau placé en A. Initialement, on place sur le plateau P les masses marquées nécessaires pour que le fléau soit horizontal, aucun courant ne passant alors dans les bobines B et B′.

Faisons passer le même courant i dans les deux bobines. La bobine B crée dans la région occupée par B′ un champ uniforme $H = 4\pi n_1 i\,(1 - \alpha)$, n_1 étant le nombre de spires par centimètre de longueur de la bobine B et α un terme correctif qui pourra être négligeable si la bobine B est suffisamment longue (§ 234). Ce champ agit sur la bobine B′ qui est soumise à un couple que nous allons calculer.

Soit N′ le nombre *total* de spires de B′, chaque spire ayant une surface S′. Cette bobine B′ est équivalente à un aimant ayant ses pôles comme l'indique la figure 263 et ayant pour moment magnétique $\mathfrak{M}' = N'S'i$ (§ 242). L'axe

magnétique de la bobine étant perpendiculaire au champ H, celle-ci est soumise à un couple de moment $\mu = \mathfrak{M}'H = N'S'iH$ qui tend à faire baisser le bras du fléau portant la bobine. Rétablissons l'équilibre en ajoutant sur le plateau P des masses marquées m.

Appelons l la longueur du bras de levier AO. Le moment du couple électromagnétique est :

$$\mu = N'S'iH = N'S'i \times 4\pi n_1 i\,(1 - \alpha).$$

Le moment dû à la surcharge est $\mu' = mgl$. La condition d'équilibre du système est donc : $\mu = \mu'$

$$N'S'i \times 4\pi n_1 i\,(1 - \alpha) = mgl.$$

d'où

$$i = \sqrt{\frac{mgl}{4\pi n_1 N'S'\,(1-\alpha).}} = K\sqrt{m},$$

K étant une constante caractéristique de l'appareil.

L'électrodynamomètre de Pellat permet :

1° De faire des mesures absolues d'intensité de courant. En effet, les grandeurs n_1, N', S', l, m se mesurent sans difficulté et on prend une bobine suffisamment longue pour que le terme α soit négligeable.

2° De faire des mesures relatives d'intensité. Si m_1 et m_2 sont les surcharges correspondant à deux intensités i_1 et i_2, nous avons

$$i_1 = K\sqrt{m_1} \qquad i_2 = K\sqrt{m_2}$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}.$$

La connaissance de K n'est plus nécessaire.

Cet électrodynamomètre absolu est utilisé pour l'étalonnage des ampèremètres. Il permet d'obtenir une précision de $\frac{1}{10\,000}$.

263. — ***Ampère-étalon.*** — L'électrodynamomètre absolu n'est guère utilisé que dans les laboratoires de mesures. Dans la pratique, on utilise des appareils basés sur le même principe mais dont la bobine B est *courte*. Le champ de B n'est plus uniforme dans toute la région où se trouve B'. Mais, comme en chaque point, il est toujours proportionnel à i, le couple électromagnétique reste proportionnel à i. Nous avons encore :

$$i = K'\sqrt{m}$$

K' étant un facteur de proportionnalité caractéristique de l'appareil, mais *qui ne peut plus être calculé.* Nous pouvons toutefois le déterminer, il suffit de faire passer le même courant dans l'appareil et dans un électrodynamomètre absolu.

Le type de ces appareils à bobine plate est l'**ampère-étalon.** On a déter-

miné la masse m_0 qui réalise l'équilibre quand le courant passant dans les bobines est de 1 ampère. Si m est la surcharge correspondant à un courant inconnu de I ampères, nous avons :

$$I = \sqrt{\frac{m}{m_0}}.$$

Ces appareils ne comportent ni aimant, ni ressort, ni fil de torsion ; par suite ils seront fidèles. Ils sont utilisés pour le contrôle et l'étalonnage des ampèremètres, leur précision est de l'ordre du dix-millième.

C'est avec un électrodynamomètre absolu calculable que l'on a déterminé l'équivalent électrochimique de l'argent. Les mesures faites vers 1900 ont donné 1,1180 mg, ce qui a permis de définir l'ampère international. Des mesures récentes plus précises ont montré que l'équivalent électrochimique de l'argent était compris entre 1,1182 mg et 1,1183 mg. L'ampère international est donc inférieur de deux à trois dix-millièmes au dixième de l'unité électromagnétique d'intensité.

II. — GALVANOMÈTRES

Les galvanomètres sont des appareils destinés à mesurer des courants très faibles. Souvent, ils sont utilisés pour constater l'absence de courant dans une branche d'un circuit, ce sont alors des appareils de zéro. On distingue les galvanomètres à cadre mobile basés sur la deuxième loi de Laplace et les galvanomètres à aimant mobile basés sur la première loi de Laplace. Nous étudierons d'abord les premiers, car ils sont les plus utilisés.

*264. — **Galvanomètre à cadre mobile.*** — L'appareil a été vulgarisé sous une forme commode et de faible prix par Déprez et d'Arsonval.

1° **Description.** — L'appareil se compose d'un cadre ABCD rectangulaire d'environ 6 cm de hauteur et 3 cm de largeur (fig. 264). Ce cadre porte une centaine de tours de fil de cuivre fin. Il est suspendu par deux fils d'argent tendus verticalement l'un au-dessus, l'autre au-dessous. Le cadre est placé dans un champ magnétique créé par un aimant en fer à cheval NS. Les deux fils d'argent ont un triple rôle : 1° ils supportent le cadre ; 2° ils servent à lui amener le

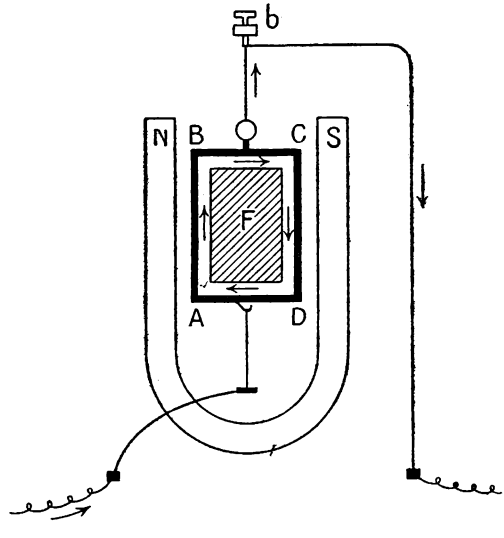


FIG. 264. — Galvanomètre à cadre mobile.

courant ; 3° ils créent des forces de réaction mécanique s'opposant à la rotation du cadre. Le couple de torsion est un couple de rappel proportionnel à l'angle d'écart.

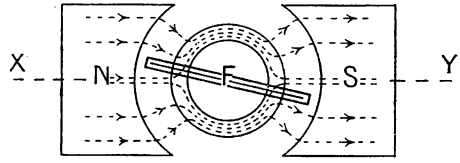


FIG. 265. — Champ radial.

Enfin pour augmenter l'intensité du champ, on place à l'intérieur du cadre un cylindre en fer doux F à génératrices verticales, porté par un support indépendant. On a ainsi un entrefer étroit où peut se mouvoir le cadre, le champ y est intense et de plus il est *radial*, c'est-à-dire est de révolution autour de l'axe du cylindre (fig. 265)

Lorsqu'il ne passe aucun courant, on amène le cadre à être dans le plan de symétrie XY de l'appareil. Pour cela il suffit de tourner le bouton supérieur *b*.

2° **Equation d'équilibre.** — Faisons passer un courant dans le cadre dans le sens indiqué par les flèches sur la figure 264. Sous l'action des forces électromagnétiques, le cadre va tourner et tendra à se placer de façon que le flux sortant par sa face nord soit maximum. Le côté CD du cadre viendra en avant du plan de figure. Un équilibre s'établit entre le couple électromagnétique et le couple de rappel dû à la torsion du fil. Le cadre prend une position d'équilibre faisant un angle α avec la position initiale.

L'équation d'équilibre s'obtient en exprimant que le moment du couple de torsion est égal au moment du couple électromagnétique.

Soit C la constante de torsion du fil, le moment μ_1 du couple de torsion à l'équilibre est :

$$\mu_1 = C\alpha.$$

Les forces électromagnétiques agissant sur le cadre sont :

D'une part, les forces s'exerçant sur les côtés horizontaux AD et BC. Elles sont nulles car l'angle du champ radial et du courant est égal à zéro.

D'autre part, les forces s'exerçant sur les côtés verticaux AB et CD. Ces forces *f* sont données par la deuxième loi de Laplace. Elles sont appliquées aux milieux M et M' des côtés AB et CD. Elles sont horizontales et dirigées comme l'indique la figure 266 qui est faite dans le plan horizontal passant par M et M' (1).

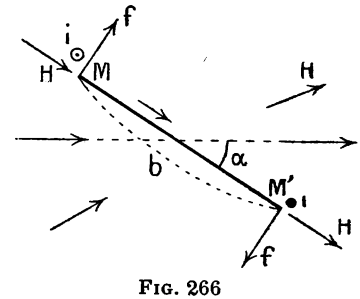


FIG. 266

Appelons N le nombre total des spires du cadre, *a* la longueur des côtés verticaux et *b* celle des côtés horizontaux. Soit H l'intensité du champ magnétique. L'intensité de chaque force est :

$$f = N \times Hia.$$

(1) **Pour la représentation des sens des courants sur les figures 266 et 267, voir note (1), page 307.**

Les deux forces forment un couple dont le moment est :

$$\mu_2 = f \times b = \mathrm{NH}iab.$$

Or le produit ab **représente la surface S d'une spire du cadre :**

$$\mu_2 = \mathrm{NH}i\mathrm{S}.$$

L'équation d'équilibre sera : $\mu_1 = \mu_2$.

$$\boxed{C\alpha = \mathrm{NSH}i}$$

La déviation du cadre est proportionnelle à l'intensité du courant. La mesure de la déviation α permet d'en déduire l'intensité i connaissant les constantes de l'appareil : N, S, H et C.

Remarques. — 1° Si le champ était uniforme entre les pôles N et S (pas de cylindre de fer doux F), la figure 266 serait remplacée par la figure 267 et l'équation d'équilibre serait :

$$C\alpha = \mathrm{NSH}i \cos \alpha.$$

2° La quantité NSH représente le flux Φ_0 qui traverse le cadre quand il est placé normalement aux lignes de force d'un champ uniforme H. L'équation d'équilibre peut s'écrire dans le cas d'un champ radial :

$$C\alpha = i\Phi_0.$$

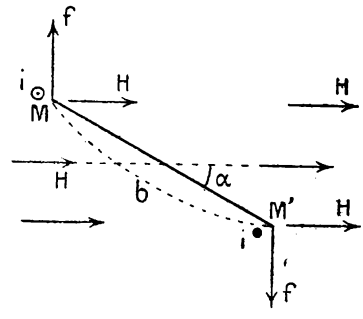


Fig. 267.

3° On peut obtenir facilement l'équation d'équilibre à partir du théorème de Maxwell (§ 241) et du principe des travaux virtuels. A partir de la position d'équilibre, effectuons un petit déplacement, une rotation $d\alpha$**. Le travail du couple de torsion est** $C\alpha d\alpha$**. Le flux coupé par les côtés verticaux est** $N\alpha \times b\,d\alpha \times H = \mathrm{NHS}d\alpha$**. Le travail des forces électromagnétiques est :**

$$d\mathcal{T} = id\Phi = \mathrm{NHS}d\alpha \times i.$$

D'où :

$$C\alpha d\alpha = \mathrm{NS}i\,d\alpha$$
$$C\alpha = \mathrm{NSH}\,i.$$

3° **Sensibilité.** — Un galvanomètre est d'autant plus sensible que, pour une intensité donnée, il donne un angle d'écart α plus grand. Nous pouvons caractériser la sensibilité par la quantité $\sigma = \frac{\alpha}{i}$.

Or : $C\alpha = \mathrm{NSH}i$, d'où :

$$\sigma = \frac{\alpha}{i} = \frac{\mathrm{NSH}}{C}.$$

Pour augmenter la sensibilité il y aura intérêt à avoir une constante de torsion C faible. Pour cela, on utilise des fils de suspension longs, très fins et de préférence en argent. Mais la période d'oscillation du système est $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{K}{C}}$, K étant le moment d'inertie. **En diminuant C, on augmente** T_0 **et on rend les mesures de plus en plus longues et difficiles. Pour que le**

galvanomètre soit commode, T_0 ne devra pas dépasser 10 ou 15 secondes, ce qui limite la petitesse de C.

En réalité, on se fixe T_0. Comme $C = \frac{4\pi^2}{T_0^2} K$, la formule de la sensibilité devient :

$$\sigma = \frac{NSH}{C} = \frac{T_0^2}{4\pi^2} \frac{NSH}{K}.$$

Pour augmenter σ, on peut songer à augmenter N et S, mais on sera limité par le fait que le moment d'inertie K augmente en même temps. Pratiquement N est de l'ordre de 200 et S de l'ordre de 20 cm². On donnera la préférence à des cadres allongés dans le sens vertical, car pour les mêmes valeurs de N et S, le moment d'inertie sera plus faible.

C'est finalement H que l'on cherchera à faire le plus grand possible. Avec des aimants permanents, il est difficile de dépasser 1000 gauss, avec des électro-aimants on atteint 10 000 gauss.

Avec un champ de 1000 gauss, on peut, avec ces galvanomètres, atteindre une sensibilité permettant de déceler 10^{-9} ampère. Avec un électro-aimant, on peut arriver à déceler 10^{-10} ampère.

4° **Amortissement.** — Ecartons le cadre de sa position d'équilibre d'un petit angle Θ_0 et laisons-le libre, il revient à sa position d'équilibre. Etudions ce mouvement de retour.

Appelons Θ l'angle avec la position d'équilibre à un instant quelconque t. Le cadre est soumis au couple électromagnétique de moment $\mu_2 = NSHi$, au couple de rappel de moment $\mu_1 = -C(\alpha + \Theta)$, le signe moins pour tenir compte de la convention de signe indiquée au paragraphe 3. En outre, il existe des forces d'amortissement proportionnelles à la vitesse et dont le moment peut se mettre sous la forme $\mu_3 = -f\frac{d\Theta}{dt}$, f étant une constante positive.

L'équation différentielle du mouvement sera (§ 3) :

$$K\frac{d^2\Theta}{dt^2} = NSHi - C(\alpha + \Theta) - f\frac{d\Theta}{dt}.$$

$$K\frac{d^2\Theta}{dt^2} + f\frac{d\Theta}{dt} + C(\alpha + \Theta) = NSHi.$$

Le courant i est la somme du courant i_0 qui passe dans le cadre à l'équilibre et des courants induits dus au mouvement. La f. é. m. induite est $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, $e = -NSH\frac{d\Theta}{dt}$; l'intensité i' du courant induit sera, en appelant R la résistance totale du circuit du galvanomètre :

$$i' = \frac{e}{R} = -\frac{NSH}{R}\frac{d\Theta}{dt}.$$

L'intensité du courant dans le cadre à l'instant t est :

$$i = i_0 - \frac{NSH}{R}\frac{d\Theta}{dt}.$$

L'équation différentielle du mouvement sera :

$$K\frac{d^2\Theta}{dt^2} + f\frac{d\Theta}{dt} + C(\alpha + \Theta) = NSH\left(i_0 - \frac{NSH}{R}\frac{d\Theta}{dt}\right).$$

$$K\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \left(f + \frac{N^2S^2H^2}{R}\right)\frac{d\Theta}{dt} + C\Theta = 0$$

en tenant compte qu'à l'équilibre $C\alpha = NSHi_0$.

En général, le terme f est négligeable devant $\frac{N^2S^2H^2}{R}$, c'est-à-dire que *l'amortissement est dû presque uniquement aux courants induits.*

En résumé, quand on écarte un galvanomètre à cadre mobile de sa position d'équilibre, il effectue en général des oscillations d'autant plus amorties que la résistance R du circuit est plus faible. En particulier les oscillations s'amortissent très rapidement en fermant le circuit du galvanomètre sur lui-même. Pour cela il suffit de placer entre les deux bornes un fil peu résistant.

C'est cette facilité d'amortissement et aussi la grande fixité du zéro de l'appareil qui rendent ce galvanomètre très pratique.

265. — Galvanomètre à aimant mobile. — Le type le plus simple est la *boussole des tangentes.*

1° **Boussole des tangentes.** — L'appareil est représenté par la figure 268. Il comprend une bobine circulaire plate B, verticale, que l'on place dans le plan du méridien magnétique. Au centre se trouve une courte aiguille aimantée *ns* horizontale mobile sur un pivot vertical. Un index A fixé à l'aiguille se meut sur un cadran et permet de mesurer les déviations.

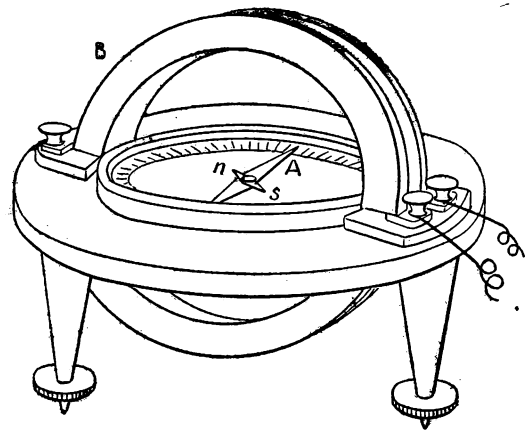


FIG. 268. — Boussole des tangentes.

Quand il ne passe aucun courant dans la bobine, l'aiguille *ns* se place dans le plan du méridien magnétique, c'est-à-dire dans le plan de la bobine. Lorsqu'on envoie un courant i dans la bobine, il crée dans la région où se trouve *ns* un champ magnétique H dirigé suivant l'axe de la bobine, c'est-à-dire perpendiculaire au champ terrestre H_0.

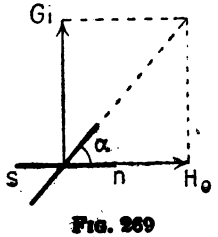


FIG. 269

Le champ H est proportionnel à l'intensité i. Nous pouvons écrire $H = Gi$, G étant une constante caractéristique de la bobine qu'on appelle sa constante galvanométrique.

Sous l'action des deux champs $H = Gi$ et H_0, l'aiguille s'oriente dans la

direction du champ résultant. Elle tourne d'un angle α tel que (fig. 269) :

$$\text{tg } \alpha = \frac{H}{H_0} = \frac{Gi}{H_0}.$$

La déviation α est donc indépendante du moment magnétique de l'aiguille, de sa forme et de son aimantation. Si l'aiguille est assez courte, le champ produit par la bobine peut être considéré comme uniforme dans toute la région où se déplace l'aiguille : G est constant. *L'intensité du courant est proportionnelle à tg* α et pratiquement à α si cet angle est assez petit.

2° **Sensibilité.** — On peut, comme dans le cas précédent, caractériser la sensibilité de l'appareil par la quantité $\sigma = \frac{\text{tg } \alpha}{i} = \frac{G}{H_0}$.

Plus généralement, nous pouvons écrire $\sigma = \frac{G}{h}$, G étant la constante galvanométrique de la bobine et h le champ directeur. Pour augmenter la sensibilité, il faudra réduire le champ directeur h et augmenter la constante galvanométrique.

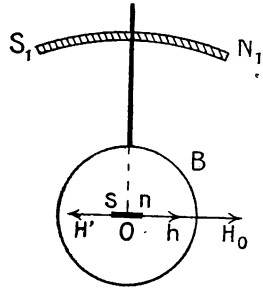


FIG. 270

Pour réduire le champ directeur nous disposons de deux méthodes :

a) Nous pouvons placer au-dessus de la bobine B un aimant N_1S_1 appelé *aimant compensateur* qui crée dans la région de l'aiguille *ns* un champ H' de sens contraire au champ terrestre H_0 (fig. 270). Le champ directeur effectif est $h = H_0 - H'$. On peut faire varier h comme on veut en déplaçant l'aimant $N_1 S_1$ le long de la tige verticale lui servant de support. Ce dispositif a l'inconvénient de rendre l'appareil sensible aux variations, même faibles, du champ terrestre H_0. On préfère utiliser le deuxième procédé.

b) Supprimons l'action du champ terrestre en remplaçant l'aiguille *ns* par l'ensemble de deux aiguilles aimantées $n_1 s_1$ et $n_1' s_1'$ de moments magnétiques égaux, parallèles entre elles, mais de sens opposés. Les deux aiguilles sont fixées sur une tige d'aluminium rigide. L'ensemble a un moment magnétique résultant nul et les champs uniformes, comme le champ terrestre, n'ont aucune action sur un tel système appelé *système astatique.*

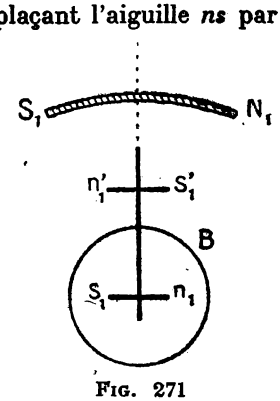


FIG. 271

Pour que le courant ait une action sur ce système, il faut que la bobine n'agisse que sur une seule aiguille, d'où le dispositif indiqué sur la figure 271. Enfin il faut un champ directeur. On l'obtient en plaçant un aimant N_1S_1 au-dessus du système astatique. Cet aimant aura une action plus forte sur l'aiguille $n'_1 s'_1$ que sur l'aiguille $n_1 s_1$ puisque la première est plus rapprochée. L'action résultante ne sera pas nulle et constituera le couple de rappel.

En résumé, on réduira le champ directeur soit par un aimant compensateur, soit par l'utilisation d'un système astatique et d'un aimant auxiliaire. Nous serons limité dans cette diminution de h, car en même temps nous augmentons la période d'oscillation T_0 de l'aiguille ns qui est donnée par la formule : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{K}{\mathfrak{M}h}}$. Pour la commodité des mesures, nous nous fixerons T_0. La sensibilité peut s'écrire :

$$\sigma = \frac{T_0^2}{4\pi^2}\frac{\mathfrak{M}}{K}G.$$

Cette formule nous montre que la sensibilité sera d'autant meilleure que $\frac{\mathfrak{M}}{K}$ et G seront plus grands. Pour avoir $\frac{\mathfrak{M}}{K}$ grand, nous utiliserons un ensemble d'aiguilles aimantées courtes (K petit) et fortement aimantées ($\mathfrak{M}$ grand). Pour augmenter G, nous agirons sur les dimensions de la bobine. Pour une bobine circulaire plate : $G = \frac{2\pi N}{R}$ (§ 233). Nous prendrons une bobine de faible rayon (R petit) et comprenant plusieurs couches de fil (N grand). Nous laisserons au centre un vide juste suffisant pour y placer les aiguilles aimantées.

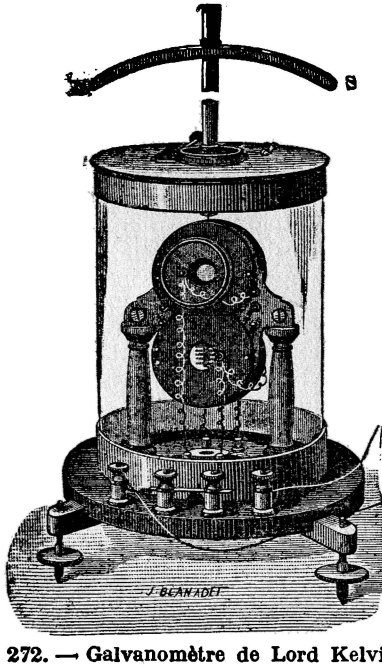


FIG. 272. — Galvanomètre de Lord Kelvin.

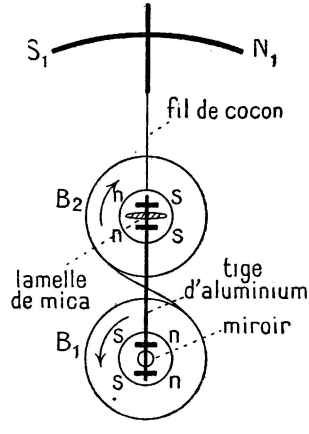


FIG. 273

La boussole des tangentes transformée de manière à obtenir la plus grande sensibilité constitue le galvanomètre de Lord Kelvin qui est à peu près le seul type de galvanomètre à aimant mobile utilisé actuellement.

3° Galvanomètre de Lord Kelvin. — Il est représenté par la figure 272 et schématisé par la figure 273.

Les deux groupes d'aimants formant système astatique sont fixés sur une tige d'aluminium suspendue à un fil de cocon. Chaque groupe comprend 4 petites aiguilles parallèles d'environ 8 mm de longueur.

L'appareil comprend deux bobines B_1 et B_2 ayant des actions de même sens sur les aimants intérieurs. L'équipage porte un miroir au centre de B_1 pour la mesure des rotations par la méthode de Poggendorf et une lame de mica au centre de B_2 pour l'amortissement des oscillations.

Il existe des galvanomètres de Lord Kelvin sensibles à un courant de 10^{-11} ampère. Ils ne sont pratiquement pas utilisés pour des mesures d'intensités mais ils sont particulièrement avantageux comme appareils de zéro.

Pour les mesures courantes, on préfère le galvanomètre à cadre mobile qui, s'il est moins précis, est plus robuste (fil de suspension en argent et non en cocon) et mieux amorti (amortissement par courants induits). En outre, il est insensible aux champs magnétiques extérieurs faibles.

III. — AMPÈREMÈTRES ET VOLTMÈTRES

266. — Comparaison d'un ampèremètre et d'un galvanomètre. — Un ampèremètre est un appareil relativement peu sensible, servant à la mesure *absolue* des intensités de courant. Le fonctionnement des ampèremètres repose sur les mêmes principes que celui des galvanomètres, mais, les qualités exigées n'étant pas les mêmes, des détails de construction les différencient.

1° Un ampèremètre doit fonctionner dans toutes les positions.

2° Il doit donner une mesure *absolue* par simple lecture sur un cadran.

3° Une sensibilité aussi grande que celle des galvanomètres n'est pas nécessaire.

La petitesse relative de la sensibilité fait que l'appareil n'est pas affecté d'une façon appréciable par le champ magnétique terrestre. Il en résulte deux conséquences : il n'est pas nécessaire d'orienter l'appareil par rapport au méridien magnétique ; l'appareil peut donner des mesures absolues.

D'autre part, l'organe mobile, au lieu d'être suspendu à un fil vertical, est mobile autour d'une tige terminée à chaque bout par un pivot tournant dans une cavité. Le centre de gravité de la partie mobile est sur l'axe. L'appareil est ainsi rendu indépendant de la verticale.

En définitive, un ampèremètre est indépendant du champ magnétique et du champ de gravitation terrestres. Il fonctionne dans toutes les positions.

Enfin à l'organe mobile est fixée une aiguille dont l'extrémité se déplace sur un cadran gradué.

Dans les paragraphes qui suivent nous décrivons quelques modèles d'ampèremètres. Nous ne revenons pas sur les principes de leur fonctionnement, ils ont été exposés aux paragraphes précédents. Nous indiquons seulement les particularités relatives à chaque modèle.

Nous avons vu (§ 150) qu'un voltmètre était un ampèremètre résistant qu'on utilisait en dérivation et qu'on graduait en volts. A chaque type d'ampèremètre correspondra donc un voltmètre.

267. — Ampèremètre à aimant mobile. — La figure 274 représente un tel appareil (type Déprez). AB et A'B' sont deux aimants qui créent le *champ magnétique directeur h* ; *ab* est le petit aimant mobile auquel est fixée une longue aiguille indicatrice ; dans les bobines C et D passe le courant à mesurer.

Le champ directeur a une intensité *h* suffisante pour que le champ magnétique terrestre puisse être négligé. La constante G de l'ensemble des deux bobines C et D est beaucoup plus petite que celle des bobines des galvano-

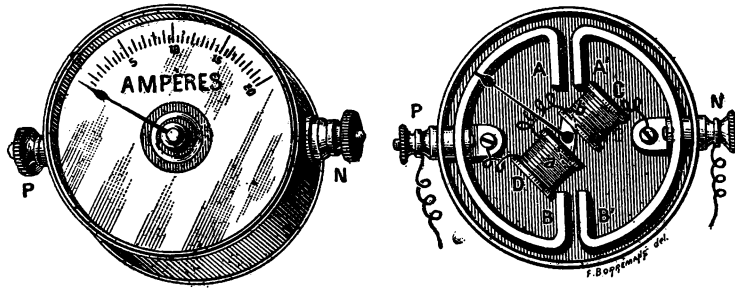


FIG. 274. — Ampèremètre à aimant mobile.

mètres. La sensibilité : $\sigma = \frac{G}{h}$ de ces ampèremètres est donc faible en comparaison de celle des galvanomètres (G plus petit, *h* plus grand). Dans les appareils de ce type, elle dépasse rarement 1/10 d'ampère.

Dans les ampèremètres, les bobines C et D sont constituées par du fil gros et court. Dans les voltmètres au contraire, elles sont formées de fil fin et long. Ces appareils sont étalonnés par comparaison.

268. — Ampèremètre à fer mobile et à ressort. — Il diffère du précédent en ce que le couple directeur est exercé, non plus par un champ *magnétique* auxiliaire *h*, mais par l'action *mécanique* d'un ressort spiral R (fig. 275). On évite ainsi l'emploi d'aimants directeurs qui, se désaimantant peu à peu, produisent un champ *h* décroissant, d'où un déplacement lent du zéro.

Le petit barreau mobile est en fer doux ; il s'aimante seulement par le champ du courant étudié. Il en résulte que : 1° le sens de déviation de l'aiguille est indépendant du sens du courant dans l'appareil, c'est-à-dire indépendant du sens des connexions ; 2° le moment du couple exercé sur le barreau par le courant, proportionnel à $\mathfrak{M}i$, est grossièrement proportionnel à i^2, car le moment magnétique $\mathfrak{M}$ du barreau mobile est grossièrement proportionnel à l'intensité du champ qui l'aimante, et par suite à *i*. Ces

appareils sont robustes, *peu coûteux*, mais peu précis. Comme tous ceux où la déviation est proportionnelle au carré de l'intensité, ils peuvent être employés pour les courants alternatifs, mais ils ont des divisions serrées au voisinage du zéro ; leurs indications sont affectées par l'hystérésis du barreau mobile, et par la self-induction des bobines liée elle-même à la fréquence du courant.

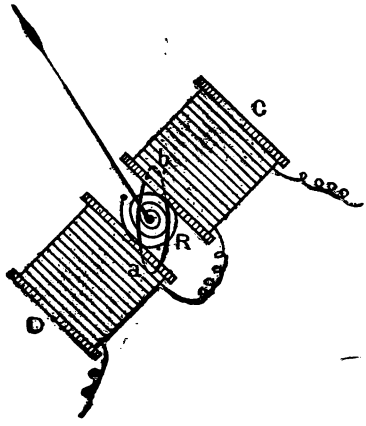


FIG. 275

Lorsqu'ils sont parcourus par le courant le plus intense qu'ils puissent mesurer, ces appareils consomment une puissance de quelques watts. Par exemple un ampèremètre dont l'indication maximum est 10 ampères a une résistance de l'ordre de $\frac{1}{40}\,\Omega$; quand il est traversé par un courant de 10 ampères, la différence de potentiel aux bornes est de l'ordre de : $\frac{10}{40} = 0{,}25$ volt, et la puissance consommée par l'appareil est : $10 \times 0{,}25 = 2{,}5$ watts.

269. — Ampèremètre à cadre mobile. — La figure 276 représente e dispositif adopté. Le cadre mobile est porté par deux pivots logés dans des cavités fixes en agate. Le couple mécanique est exercé par deux ressorts spiraux qui établissent en même temps la communication électrique entre le cadre et le circuit extérieur. Les pièces polaires N et S sont creusées sur les faces en regard, de manière à former pour le cadre mobile un logement cylindrique ; les déviations restent ainsi proportionnelles aux intensités de courant, même si elles ne sont pas très petites, et les divisions du cadran sont toutes équidistantes.

Ces appareils sont robustes, peu sensibles aux champs magnétiques extérieurs ; on les utilise fréquemment comme appareils de contrôle. Pour la précision des lectures, l'extrémité de l'aiguille a la forme d'une lame mince perpendiculaire au plan de la graduation et se déplace en avant d'un miroir plan situé dans le plan de cette graduation. On place l'œil de manière que la lame et son image dans le miroir paraissent se recouvrir exactement. On évite ainsi toute erreur de parallaxe, et l'erreur de lecture ne dépasse pas 1 /10 de millimètre. Si la longueur de la graduation est d'au moins 10 centimètres, l'erreur est ainsi de l'ordre du millième de l'intensité maximum que peut mesurer l'appareil.

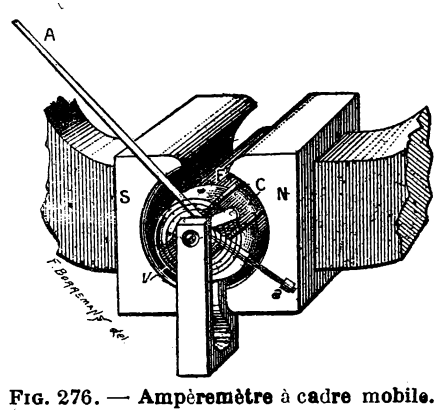


FIG. 276. — **Ampèremètre à cadre mobile.**

Ces appareils donnent *directement*, en général, des microampères (de 0 à 50, par exemple) ; pour les intensités supérieures, on shunte l'appareil.

La résistance du cadre est de l'ordre d'un ohm.

Rappelons qu'il existe des ampèremètres basés sur la loi de Joule appelés ampèremètres thermiques. Ils ont été étudiés au paragraphe 132.

IV. — WATTMÈTRE ET GALVANOMÈTRE BALISTIQUE

270. — ***Wattmètre.*** — Un wattmètre est un appareil destiné à mesurer la puissance W consommée entre deux points A et D d'un circuit (fig. 277). Si V_A — V_D est la différence de potentiel entre A et D et I l'intensité du courant on a :

$$W = (V_A - V_D)\, I.$$

Nous pourrions calculer W en mesurant I avec un ampèremètre et $V_A - V_D$ avec un voltmètre placé en dérivation entre A et D, mais ceci exige deux lectures, donc deux erreurs qui s'ajoutent. En outre il n'y a pas simultanéité des deux lectures. On préfère utiliser des appareils appelés wattmètres donnant la puissance par simple lecture.

Le type le plus utilisé, schématisé sur la figure 277, comprend :

1° Le circuit $\alpha\beta$ appelé **circuit des ampères.** Il est formé par une bobine B à gros fil. Il est parcouru par le courant I qui traverse le circuit principal.

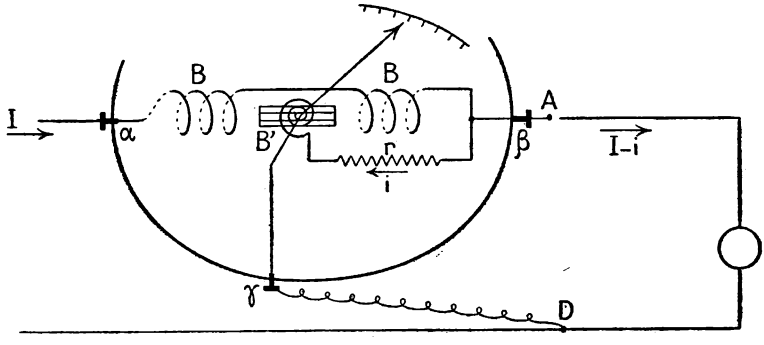


FIG. 277. — Wattmètre.

2° Le circuit $\beta\gamma$ appelé **circuit des volts.** Il comprend une grande résistance *r* de l'ordre de 3000 ohms en série avec le cadre B' d'un galvanomètre. Le couple de rappel du galvanomètre est obtenu avec un ressort spiral. Le champ magnétique H dans lequel se meut le cadre est produit par la bobine B. Ce second circuit est monté en dérivation entre les extrémités A et D du circuit à étudier et il est parcouru par un courant *i* proportionnel à $V_A - V_D$.

Le cadre B' est soumis à un couple électromagnétique proportionnel : d'une part à *i* c'est-à-dire à $V_A - V_D$, d'autre part au champ H proportionnel à I. En définitive, ce couple est proportionnel au produit $(V_A - V_D)\, I$.

Or la puissance consommée entre A et D est : $W = (V_A - V_D)(I - i)$ ou, comme r est grand et que par suite i est négligeable devant I, $W = (V_A - V_D)\,I$. En définitive *le couple électromagnétique agissant sur le cadre et par suite la déviation prise par ce cadre sont proportionnels à la puissance W consommée entre A et D.* Le cadre B′ entraîne une aiguille se déplaçant devant une graduation faite de manière à donner directement W.

271. — Galvanomètre balistique. — C'est un appareil destiné à mesurer la quantité d'électricité qui le traverse *pendant un temps très court.* L'appareil doit subir une impulsion qui le lance hors de sa position d'équilibre. La force qui provoque le mouvement cesse aussitôt et l'appareil revient à sa position de départ en effectuant des oscillations amorties.

Utilisons un galvanomètre à cadre mobile. Lançons dans le galvanomètre une quantité d'électricité q qui le traverse en un temps très court τ. L'appareil n'a pas le temps de se déplacer pendant le temps τ, il est simplement lancé avec une vitesse angulaire ω_0.

L'équation du mouvement du galvanomètre est (§ 264) :

$$K\frac{d^2\Theta}{dt^2} + F\frac{d\Theta}{dt} + C\Theta = Ai. \qquad (1)$$

K étant le moment d'inertie du système et F la constante d'amortissement.

La relation (1) peut s'écrire en multipliant tous les termes par dt :

$$K\frac{d^2\Theta}{dt^2}\,dt + F\frac{d\Theta}{dt}\,dt + C\Theta\,dt = Ai\,dt.$$

Intégrons entre les instants 0 et τ, c'est-à-dire pendant le passage rapide de la quantité d'électricité q. Nous avons :

$$K\int_0^\tau \frac{d^2\Theta}{dt^2}\,dt + F\int_0^\tau \frac{d\Theta}{dt}\,dt + C\int_0^\tau \Theta\,dt = A\int_0^\tau i\,dt.$$

Or :

$$\int_0^\tau \frac{d^2\Theta}{dt^2}\,dt = \left[\frac{d\Theta}{dt}\right]_0^\tau = \omega_0 \qquad \int_0^\tau \frac{d\Theta}{dt}\,dt = \left[\Theta\right]_0^\tau = 0$$

$\int_0^\tau \Theta\,dt = 0$, car Θ est toujours nul.

$\int_0^\tau i\,dt = q$ (quantité d'électricité qui a traversé l'appareil).

D'où : $$K\omega_0 = Aq.$$

Mais le système se mettant à osciller, l'élongation maximum Θ_0 du cadre est proportionnelle à ω_0. Nous voyons donc que, dans les conditions supposées, l'*élongation maximum* Θ_0 *est proportionnelle à la quantité d'électricité qui a traversé le galvanomètre.* Nous avons :

$$\Theta_0 = \lambda q.$$

La mesure de Θ_0, élongation maximum, permet de calculer q si on a déterminé préalablement λ en faisant passer dans l'appareil une quantité d'électricité connue.

Notons que Θ_0 est lu *au vol*. La lecture sera d'autant plus facile que la période sera plus longue. On aura intérêt à ce que les oscillations qui suivent la première aient sensiblement même amplitude, donc l'amortissement devra être faible. En résumé, *un galvanomètre balistique aura une grande période et sera peu amorti.* A cause de la difficulté de la lecture au vol, on ne peut guère apprécier que des quantités d'électricité supérieures à 10^{-8} coulomb.

Exercices.

70. Dans un ampèremètre à aimant mobile type Déprez (§ 267), le champ magnétique directeur h fait un angle Θ avec l'axe de la bobine où passe le courant à mesurer I. Calculer l'angle α que fait l'aimant mobile avec cet axe, à l'équilibre. Construire les courbes $\alpha = f(I)$ pour différentes valeurs de Θ.

Réponse : Si I_0 désigne l'intensité du courant qui, en passant dans la bobine crée un champ égal à h, on a : $tg\,\alpha = \dfrac{I \sin \theta}{I_0 + I \cos \theta}$.

71. Les centres B et B' des deux bobines circulaires identiques d'un galvanomètre de Lord Kelvin (§ 265) sont distants de 10 cm. Un aimant directeur rectiligne court a pour moment magnétique $\mathfrak{M} = 5000$ C. G. S.

A quelle hauteur faut-il le placer au-dessus du milieu C de BB' pour compenser en ce point C la composante horizontale du champ terrestre $H_0 = 0{,}2$ gauss ? Equilibre du système astatique quand les bobines sont parcourues par un courant de un milliampère. Rayon moyen de chaque bobine : 2 cm. — Chaque bobine comprend 100 spires.

Réponse : Hauteur : 29,25 cm ; déviation θ : $tg\,\theta = 0{,}28$.

72. Ecrire l'équation d'équilibre du galvanomètre à cadre mobile dont le cadre est constitué par une galette rectangulaire dont les spires verticales successives sont distantes de 0,2 mm. La spire extérieure a pour dimensions $2a = 10$ cm et $2b = 4$ cm ; la spire centrale a pour dimensions $2\alpha = 1$ cm et $2\beta = 0{,}4$ cm.

73. La bobine fixe d'un électrodynamomètre de Pellat a pour longueur $2l = 60$ cm Elle est formée de $n = 300$ tours de fil dont le rayon moyen est $r = 10$ cm. La bobine mobile est constituée par $N = 40$ tours de fil et chaque spire embrasse une aire moyenne $S = 150$ cm². Le bras de levier de la balance a pour longueur : $d = 15$ cm.

Quel poids p faut-il placer sur le plateau, sachant que le courant qui parcourt les bobines dépose 671 *mg* d'argent en 20 minutes ?

CHAPITRE XXX

UNITÉS ÉLECTRIQUES

272. — Différents systèmes d'unités électriques. — Nous avons vu au chapitre III qu'il existait quatre systèmes d'unités électriques.

1° *Le système électrostatique C. G. S.* dont les unités fondamentales sont le centimètre, le gramme et la seconde. Les unités électriques se déduisent des unités mécaniques à partir de la loi de Coulomb de l'*électrostatique* : $f = \frac{1}{\varepsilon}\frac{qq'}{r^2}$ où la constante ε est prise égale à 1 dans le vide.

2° *Le système électromagnétique C. G. S.* qui a les mêmes unités fondamentales que le précédent : cm-g-sec. Mais les unités électriques se déduisent des unités mécaniques à partir de la loi de Coulomb du *magnétisme* : $f = \frac{1}{\mu}\frac{mm'}{r^2}$ où la constante μ est prise égale à 1 dans le vide.

3° *Le système pratique d'unités électriques* dont les unités fondamentales sont l'ampère, le joule et la seconde. C'est un système électromagnétique, c'est-à-dire que la loi de Coulomb du magnétisme dans le vide est : $f = \frac{mm'}{r^2}$.

4° *Le système M. K. S. A. Giorgi* défini par les quatre unités fondamentales : mètre, kilogramme, seconde, ampère.

Nous allons étudier les unités et leurs dimensions dans les trois premiers systèmes ; le dernier, proposé par la Commission internationale électrotechnique de 1935, n'est pas encore officiellement adopté.

Remarquons que, dans un système comme le système Giorgi où l'on introduit une quatrième unité fondamentale *électrique*, les grandeurs électriques ne sont plus rattachées aux grandeurs mécaniques par les lois de Coulomb et que, dans le vide, les coefficients ε et μ ne sont plus égaux à 1.

273. — Dimensions des unités électriques. — Les équations aux dimensions d'une unité dépendent des formules de définition. Elles sont donc différentes pour un système électromagnétique et pour un système électrostatique. Les formules de définition des unités électriques et leurs dimensions sont résumées dans les deux tableaux suivants :

1° Système électrostatique.

GRANDEUR	FORMULE DE DÉFINITION	ÉQUATION AUX DIMENSIONS
Quantité d'électricité...	$f = \frac{qq'}{r^2}$	$q = L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$
Intensité de courant....	$q = it$	$i = L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}$
Différence de potentiel..	$\mathcal{C} = qV$	$V = L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$
Capacité	$q = CV$	$C = L$
Résistance.....	$V = Ri$	$R = L^{-1} T$
Self-induction.....	$V = \frac{Li}{t}$	$L = L^{-1} T^2$
Masse magnétique.....	$f = m \times \frac{il}{r^2} \sin \alpha$	$m = L^{1/2} M^{1/2}$
Champ magnétique....	$f = mH$	$H = L^{1/2} M^{1/2} T^{-2}$

Remarquons que la formule qui nous a servi pour passer des unités électriques aux unités magnétiques est la formule $H = \frac{il \sin \alpha}{r^2}$ qui exprime la première loi de Laplace.

2° Système électromagnétique.

GRANDEUR	FORMULE DE DÉFINITION	ÉQUATION AUX DIMENSIONS
Masse magnétique.....	$f = \frac{m m'}{r^2}$	$m = L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$
Champ magnétique....	$f = mH$	$H = L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$
Moment magnétique...	$\mathfrak{M} = ml$	$\mathfrak{M} = L^{5/2} M^{1/2} T^{-1}$
Puissance de feuillet...	$P = \frac{\mathfrak{M}}{S}$	$P = L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$
Intensité de courant....	$i = P$	$i = L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$
Quantité d'électricité...	$q = it$	$q = L^{1/2} M^{1/2}$
Différence de potentiel.	$\mathcal{C} = qV$	$V = L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}$
Capacité	$q = CV$	$C = L^{-1} T^2$
Résistance.....	$V = Ri$	$R = LT^{-1}$
Self-induction.....	$\Phi = HS = Li$	$L = L$

Remarquons que la formule $i = P$ qui nous a servi pour passer des unités magnétiques aux unités électriques n'est valable que dans un système électromagnétique. Nous aurions pu utiliser aussi la formule qui exprime la loi de Laplace : $H = \frac{il \sin \alpha}{r^2}$.

274. — ***Comparaisons des différentes unités.*** — Nous appellerons $[q_s]$, $[i_s]$, $[V_s]$, $[C_s]$,... les unités du système électrostatique C. G. S. ; $[q_m]$, $[i_m]$, $[V_m]$, $[C_m]$, ..., les unités correspondantes du système électromagnétique C. G. S. et enfin $[q_p]$, $[i_p]$, $[V_p]$, $[C_p]$, ..., les unités correspondantes du système pratique d'unités électriques.

Nous avons dans les trois systèmes les formules :

$$W = RI^2t \qquad W = VIt \qquad W = Vq \qquad W = \frac{1}{2}CV^2.$$

Par suite :

$$\frac{[q_m]}{[q_s]} = \frac{[i_m]}{[i_s]} = \frac{[V_s]}{[V_m]} = \sqrt{\frac{[R_s]}{[R_m]}} = \sqrt{\frac{[C_m]}{[C_s]}} = c.$$

La constante c se calcule en mesurant par exemple la capacité d'un condensateur plan calculable :

1° Dans le système électrostatique C. G. S. par la formule $C = \frac{S}{4\pi e}$;

2° Dans le système électromagnétique C. G. S. en chargeant le condensateur sous une différence de potentiel V et en mesurant la charge prise.

Au degré de précision des mesures, la constante c *a été trouvée égale numériquement à la vitesse de la lumière, dans le vide, exprimée en C. G. S.* Nous avons :

$$\boxed{c = 3 \times 10^{10}}$$

Finalement pour comparer entre elles les unités électriques des différents systèmes, il suffit de connaître les formules de définition et de retenir les résultats suivants :

$$\boxed{1 \text{ joule} = 10^7 \text{ ergs} \qquad \frac{[q_m]}{[q_s]} = c = 3 \times 10^{10} \qquad \frac{[i_m]}{[i_p]} = 10}$$

Calculons, à titre d'exemple, la valeur en volts des unités électrostatique et électromagnétique C. G. S. de différence de potentiel.

Nous avons $W = qV$, d'où :

$$\frac{[W_p]}{[W_m]} = \frac{[q_p]}{[q_m]} \times \frac{[V_p]}{[V_m]}$$

d'où

$$\frac{[V_m]}{[V_p]} = \frac{[q_p]}{[q_m]} \times \frac{[W_m]}{[W_p]}.$$

Or $\qquad \frac{[q_p]}{[q_m]} = \frac{[i_p]}{[i_m]} = \frac{1}{10} \qquad \frac{[W_m]}{[W_p]} = \frac{\text{erg}}{\text{joule}} = \frac{1}{10^7}$

d'où $\frac{[V_m]}{[V_p]} = 10^{-8}$, ce qui exprime que l'unité E. M. C. G. S. de différence de potentiel vaut 10^{-8} volt.

On aurait de même :

$$\frac{[V_m]}{[V_s]} = \frac{[q_s]}{[q_m]} \times \frac{[W_m]}{[W_s]}.$$

Or : $\frac{[q_s]}{[q_m]} = \frac{1}{c}$ $\frac{[W_m]}{[W_s]} = 1$ et par suite $\frac{[V_m]}{[V_s]} = \frac{1}{c}$.

d'où : $[V_s] = c\ [V_m] = 3 \times 10^{10} \times 10^{-8}$ volts.

$[V_s] = 300$ volts.

On peut ainsi comparer toutes les unités. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

GRANDEUR	UNITÉ PRATIQUE	VALEUR EN U.E.M.	VALEUR EN U. E. S.
Intensité.....	*ampère*	10^{-1}	3×10^{9}
Quantité d'élect....	*coulomb*	10^{-1}	3×10^{9}
Diff. de pot.....	*volt*	10^{8}	1 : 300
Résistance.....	*ohm*	10^{9}	$3^{-2} \times 10^{-11}$
Capacité.....	*farad*	10^{-9}	$3^{2} \times 10^{11}$
Self-induction.....	*henry*	10^{9}	$3^{-2} \times 10^{-11}$

REMARQUE. — Le gauss et le Maxwell ne sont pas des unités du système pratique mais des unités C. G. S. A ce sujet, signalons que la Commission électrotechnique internationale a établi une distinction entre les unités de champ magnétique et d'induction magnétique. Elle a proposé, en 1930, de réserver le nom de ***Gauss*** à l'unité d'induction et d'attribuer à l'unité de champ, le nom d'***Oersted***. Ces décisions ne sont pas universellement respectées.

Exercices.

74. Calculer les unités de longueur et de masse du système pratique d'unités électriques.

Réponse : [L] = 10 000 km ; [M] = 10^{-11} gramme.

75. Le moment magnétique d'un barreau d'acier aimanté de densité 8, pesant 480 g, est de 10^{8} unités du système électromagnétique mm-mg. Quelle est l'intensité d'aimantation en unités électromagnétiques C. G. S. ?

Réponse : 167 U. E. M. C. G. S.

76. Quelle est, dans le système pratique d'unités électriques, la valeur de l'unité usuelle de résistivité qui est le microhm centimètre ?

77. Quelle est la valeur du coefficient ε de la formule $F = \frac{1}{\varepsilon}\frac{qq'}{r^2}$ appliquée aux charges électriques, dans le système électromagnétique C. G. S. et dans le système pratique ?

PROBLÈMES

I. — ÉLECTROSTATIQUE

1. Un électromètre est formé de deux boules conductrices égales, l'une fixe, l'autre mobile, de masse $m = 2{,}3\ g$ attachée au bout d'un fil de longueur $l = 12$ cm. dont le point de suspension est sur la verticale du centre de la première boule. Ces boules qui, au début, se touchent, reçoivent chacune une charge q qui produit une déviation $\theta = 60°$. Calculer cette charge.

(*Ecole Centrale*, 1905.)

---

2. Le fil d'argent d'une balance de Coulomb subit une torsion de 360° pour un couple de 1,57 C. G. S. Les boules portent des charges égales à $+0{,}5$ et $-0{,}5$ C. G. S., et on tourne le tambour supérieur de 1 radian dans le sens qui convient pour écarter les boules. On demande de trouver la ou les positions d'équilibre de la boule mobile sachant que celle-ci se meut sur un cercle de rayon $a = 10$ cm. Discuter la stabilité. Qu'arriverait-il si ces boules avaient respectivement comme charges $+2$ et -2 C. G. S. ?

(*Sorbonne.*)

---

3. Deux plateaux circulaires de même rayon $r = 10$ cm, l'un fixe, l'autre mobile, sont disposés parallèlement en face l'un de l'autre, à la distance $e = 1$ mm. On établit entre ces deux plateaux une différence de potentiel V telle qu'ils s'attirent avec une force égale au poids à Paris de $m = 11{,}49\ g$.

1° Calculer V.

2° Calculer l'erreur relative que l'on peut commettre sur la mesure de V, sachant que e est connu à 5 μ près, que le rayon r est connu à 2/100 de mm près et que chaque pesée donnant m est faite à 2 mg près.

3° L'erreur serait-elle augmentée ou diminuée si l'on opérait avec une épaisseur double $2\ e$ pour mesurer la même différence de potentiel qu'on vient de calculer ?

4° Quelle serait l'épaisseur optima à adopter pour la mesure de V, c'est-à-dire celle qui donnerait lieu à l'erreur relative minima ?

5° Quelle serait la valeur de V pour laquelle l'épaisseur $e = 1$ mm serait à son tour optima ?

On supposera que le champ est uniforme dans toute la région comprise entre les plateaux.)

(*Sorbonne.*)

---

4. Deux sphères métalliques creuses d'épaisseur négligeable et de rayons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$) sont disposées concentriquement. On demande

1° les charges totales q_1 et q_2 des deux sphères portées respectivement aux potentiels V_1 et V_2;

2° les densités superficielles sur les deux sphères ;

3° le potentiel en un point distant du centre d'une quantité r, d'abord compris entre les deux sphères, puis extérieur au système ;

4° le champ en ce point.

(*Certificat de Physique générale, Grenoble*, 1912.)

---

5. Un condensateur à lame d'air est formé de deux plaques de 1 m² de surface distantes de 1 cm. L'influence des bords est négligeable. La différence de potentiel entre les armatures est 3 000 volts. On demande :

1° la charge de chaque armature ;

2° en grammes-poids la force qui s'exerce sur chacune d'elles.

3° Les armatures étant ainsi chargées puis isolées, on les écarte de façon à porter leur distance à 10 cm. Quel travail a-t-il fallu dépenser et quelle différence de potentiel existe alors entre les armatures ? Comparer ce travail à la variation d'énergie du condensateur.

4° Partant des mêmes conditions, on fait varier la distance des armatures de 1 à 10 cm, mais en maintenant constante la différence de potentiel de 3 000 volts. Quel travail a-t-il fallu dépenser et quelle est la charge à la fin du déplacement ? Comparer à la variation d'énergie du condensateur.

5° Les armatures étant de nouveau distantes de 1 cm, chargées à la différence de potentiel de 3 000 volts et isolées, on remplace l'air par un diélectrique de pouvoir inducteur spécifique $\varepsilon = 5$. Que deviennent la différence de potentiel et la force d'attraction ?

6° On fait la même substitution en maintenant invariable la différence de potentiel. Charge et force d'attraction ?

(*Ecole Navale*, 1914.)

---

6. On construit un pendule, assimilable à un pendule simple, en attachant à un fil isolant fin et flexible, long de 1 m, une boule sphérique d'aluminium (densité égale à 2,67) de 5 mm de diamètre. On place cette boule, loin de tout autre conducteur, au milieu d'une vaste enceinte conductrice reliée au sol, et on la charge en la touchant un instant avec un fil métallique très fin relié à l'un des pôles d'une source éloignée dont l'autre pôle est au sol. La différence de potentiel ainsi obtenue est de 300 volts.

1° Calculer en coulombs la charge prise par la sphère.

2° On place, symétriquement par rapport à la boule dans sa position d'équilibre, deux grands plateaux verticaux formant condensateur à lame d'air, et distants de 10 cm. On charge ce condensateur avec une autre source qui établit aussitôt entre les armatures une différence de potentiel de 15 000 volts. On peut admettre que le champ électrostatique est uniforme entre les deux plateaux et que ceux-ci sont chargés de la même façon que si la boule était enlevée. Le pendule prend une nouvelle position d'équilibre. Expliquer comment il l'atteint et calculer l'angle d'écart avec la verticale en tenant compte que cet angle est petit.

L'accélération de la pesanteur est 981 C. G. S.

3° Le résultat du calcul précédent est indépendant de la longueur du pendule. Montrer que pourtant, si cette longueur est prise trop grande, et dépasse une certaine valeur critique, le calcul n'est plus valable.

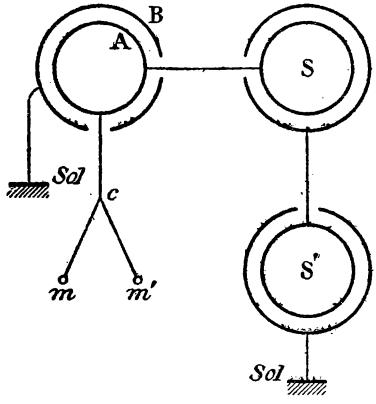
Décrire, sans calcul, ce qu'on verrait alors.

4° Le pendule étant construit et chargé comme au début, on imagine qu'on verse entre les deux plateaux un liquide parfaitement isolant dont le pouvoir inducteur spécifique aurait la valeur constante 2,25 et dont la densité serait 0,80. Chercher comment la déviation est modifiée en supposant successivement que la communication du condensateur à plateaux avec la source a été rompue : 1° après l'introduction du liquide ; 2° avant que l'on verse celui-ci.

(*Ecole Normale Supérieure*, 1904.)

---

7. Un condensateur est formé par deux sphères concentriques de diamètres $2R_1 = 20$ cm, $2R_2 = 21$ cm. L'armature externe B communique avec l'enceinte ; l'armature interne A communique par un fil long et fin avec un système de deux boules métalliques m et m', ayant chacune un rayon r de 5 mm, pesant chacune $\mu = 0{,}2\ g$ et suspendues au même point c par des fils conducteurs très fins cm et cm' qui ont une longueur $l = 8$ cm. On porte l'armature A à un certain potentiel V.



1° Calculer la charge Q de ce condensateur quand l'écartement des fils est $2\theta = 30°$.

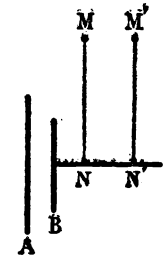
2° Que devient cet angle d'écart si l'on fait communiquer l'armature interne A avec un système de deux condensateurs sphériques en cascade S et S′ dont les sphères ont pour diamètres 20 cm et 20,5 cm. remplies par un diélectrique dont le pouvoir diélectrique est 2 ?

3° Calculer la chaleur dégagée dans les fils au moment où l'on établit la communication.

(Sorbonne.)

---

8. Un appareil, destiné à servir d'électromètre, est constitué par deux plateaux circulaires, verticaux et parallèles, l'un A fixe, l'autre B suspendu par deux fils égaux et parallèles MN, M′N′. B a un rayon de 10 cm ; A est notablement plus grand. Les fils de suspension ont 1 m de long ; l'ensemble du système qu'ils supportent pèse 200 g. La distance des deux plateaux est de 1 cm lorsqu'ils sont au même potentiel, B étant au repos. On a $g = 980$ C. G. S.



1° On établit entre les deux plateaux une différence de potentiel de V volts. Qu'est devenue leur distance x lorsque l'équilibre est établi ? Représenter par une courbe la relation qui lie V et x.

2° Quelle différence de potentiel faut-il établir entre les deux plateaux pour que le déplacement de B soit de 1 mm ?

3° Montrer qu'à chaque valeur de V correspondent deux positions d'équilibre, mais qu'une seule est stable. Montrer que si V dépasse une certaine limite, il n'y a plus de position d'équilibre ; trouver cette limite et la position d'équilibre correspondante. Qu'arrive-t-il si V dépasse cette limite ?

4° Ayant établi une différence de potentiel V assez faible pour qu'il y ait une position d'équilibre stable, on fait osciller B, comme un pendule, de quantités infiniment petites de part et d'autre de cette position. Calculer la période de ce mouvement. Comment dépend-elle de V ?

On traitera cette 4° partie en faisant successivement les deux hypothèses suivantes:

***a*) La différence de potentiel V est maintenue invariable pendant les oscillations;**

***b*) Ayant établi la différence de potentiel V, on laisse le plateau B prendre sa position d'équilibre, puis on isole complètement les deux plateaux, et alors seulement on fait osciller B.**

***Nota.* — On raisonnera comme si le champ électrique était uniforme jusqu'au bord de B et on fera d'autre part, dès le début des calculs, les simplifications qui résultent de ce fait que les fils de suspension ne peuvent faire qu'un angle très petit avec la verticale.**

(Ecole Normale Supérieure, 1910.)

---

9. Un petit conducteur sphérique creux très léger s — dont on désignera le rayon par r et la masse par m — est suspendu à un point O par un fil conducteur de poids et de capacité négligeables. Le point O est relié électriquement au sol. Un second conducteur sphérique S de rayon R, isolé et éloigné de tout conducteur, est porté au potentiel V par rapport au sol au moyen d'une source dont il est ensuite séparé ; après quoi on approche la sphère S de s, et on l'arrête dans une position telle que le centre S soit à une distance d du centre de s et à la même hauteur (opération A). On demande :

1° De former l'expression de l'écart horizontal e entre le centre de s et la verticale du point O, et de déduire de la mesure de e le potentiel V auquel avait été portée la sphère S (on désignera par l la distance du centre de s au point de suspension O).

2° D'évaluer le flux de force électrique qui traverse une surface enveloppant S et s dans la position finale.

3° D'évaluer le travail total des forces électriques s'exerçant entre les sphères S et s lorsque l'on éloigne de nouveau à une grande distance la sphère S. On examinera le cas où la sphère s reste en communication avec le sol, et celui où la communication avec le sol a été coupée.

4° Combien de fois par seconde il faudrait répéter l'opération A pour que la somme des quantités d'électricité transportées sur s à chaque opération soit équivalente à celle que transporte dans le même temps un courant d'intensité i.

Application numérique. — $m = 1\ dg$; $r = 1\ cm$; $R = 5\ cm$; $d = 25\ cm$; $l = 98\ cm$; $e = 6{,}4\ mm$; $i = 40$ millimicro-ampères ; intensité de la pesanteur 980 C. G. S.

Nota. — On supposera que les actions extérieures des sphères électrisées sont sensiblement les mêmes que si la charge de chacune d'elles était concentrée en son centre.

(*Ecole Nationale Supérieure des Mines*, 1916.)

---

10. Un condensateur est fait avec des feuilles d'étain séparées par un papier paraffiné. Le pouvoir inducteur spécifique de l'isolant est $\varepsilon = 2{,}2$; son épaisseur est $e = 0{,}1$ mm.

I. Quelle est la surface de papier paraffiné nécessaire pour obtenir une capacité de $C = 1$ microfarad ?

II. On suppose que le condensateur précédent peut supporter sans être percé une différence de potentiel $V_0 = 300$ volts. Quelle est alors l'énergie emmagasinée dans le condensateur ?

III. Pour charger ce condensateur, on a mis les armatures en relation avec les pôles d'une source d'électricité dont la différence de potentiel constante est V_0, par l'intermédiaire de fils conducteurs de résistance arbitraire r. Montrer que l'énergie emmagasinée dans le condensateur n'est que la moitié de l'énergie débitée par la source pendant la charge. Qu'est devenue l'autre moitié ?

IV. Après avoir chargé le condensateur ($C = 1\ \mu F$), on relie les armatures par un fil de très grande résistance R à travers lequel se décharge lentement le condensateur. Ecrire la relation entre la variation de la charge du condensateur dq pendant le temps dt et l'intensité i du courant dans le fil. En déduire la différence de potentiel entre les armatures en fonction du temps t depuis lequel dure la décharge. Sachant que cette différence de potentiel diminue de moitié en 6,9 secondes, évaluer la résistance R (log. nép. $10 = 2{,}3$).

V. On suppose que le diélectrique qui sépare les armatures n'est pas un isolant parfait, mais qu'il possède une résistivité ρ. Dans ce cas, le condensateur se décharge spontanément. Montrer que le temps t au bout duquel il a perdu la moitié de sa charge est indépendant des dimensions du condensateur et ne dépend que des propriétés du diélectrique. Sachant que $\rho = 10^{16}$ ohms $\times$ cm, et $\varepsilon = 2{,}2$, au bout de combien de temps la charge sera-t-elle réduite à la moitié de sa valeur initiale ?

(*Ecole Navale*, 1931.)

---

11. *Première partie.* — 1° Pour construire des condensateurs, on dispose de feuilles d'épaisseur uniforme $e = 0{,}2$ mm d'un isolant dont la constante diélectrique est égale à 6,28 et de feuilles métalliques de même épaisseur. Les surfaces en regard des armatures étant des rectangles de dimensions utiles 15 et 20 cm, combien faut-il de lames isolantes pour obtenir une capacité $C = 1$ microfarad ? Comment faut-il disposer les éléments du condensateur ? Quelle sera son épaisseur ?

2° On se propose de charger le condensateur C précédent à travers une résistance $r = 10$ mégohms, par un générateur de résistance négligeable et de force électromotrice $E = 300$ volts. Trouver la loi de variation, en fonction du temps, de la charge du condensateur. Calculer le temps nécessaire pour que la charge diffère de sa valeur limite seulement de 1/500 de celle-ci.

3° Calculer l'énergie emmagasinée par le condensateur lorsque sa charge est complète et l'énergie fournie par la source. Comparer les valeurs trouvées.

4° On supposera maintenant que l'isolant utilisé pour construire le condensateur n'est pas absolument parfait, mais légèrement conducteur, sa résistivité étant bien définie, uniforme et constante, égale à 36×10^{12} ohm-centimètre. Montrer que tout se passe comme si le condensateur était parfait, mais en dérivation avec une résistance R, que l'on calculera. Le condensateur étant chargé comme précédemment, quelle sera la différence de potentiel limite entre ses armatures ? Le condensateur étant ensuite isolé, montrer que sa charge diminue ; étudier la loi de variation et trouver au bout de combien de temps la différence de potentiel entre les armatures sera réduite à 1 volt.

Deuxième partie. — Deux plateaux métalliques A et B, de très grande surface, sont disposés parallèlement dans des plans verticaux, à la distance $2D = 20$ cm. A étant maintenu au potentiel du sol, B peut être porté à un potentiel variable $2V_0$. Une sphère conductrice pleine S de rayon $R = 3$ mm, de poids $P = 56$ dynes, est suspendue par un fil très fin à un point fixe O′ de telle manière que son centre soit à une distance de O′ égale à $= 30$ cm et se trouve en équilibre au centre O du système des plateaux A et B lorsque le système ne porte aucune charge électrique. Dans la suite on supposera négligeables le poids du fil et toutes ses actions électrostatiques ; on négligera également toute influence électrique que pourrait exercer la sphère S sur la distribution des charges sur A et B.

1° S étant isolée et initialement neutre, B est porté du potentiel du sol au potentie $2V_0$. Montrer que la sphère S reste immobile. Quel est son potentiel ?

2° Le fil de suspension étant conducteur, l'extrémité fixe O′ est reliée par un fil métallique au plateau A. Analyser les phénomènes qui se produisent, montrer que la sphère S se déplace, le fil de suspension tournant d'un angle α que l'on supposera assez petit pour que $\cos\alpha$ soit assimilable à l'unité. Calculer la charge Q prise par la sphère S et trouver l'abscisse x de la nouvelle position d'équilibre, en fonction de V_0 et des autres grandeurs qui définissent le système.

Calcul numérique de x pour $2V_0 = 3\,000$ volts ; $6\,000$ volts.

3° Un dispositif convenable permet d'apprécier x à 0,2 mm près. Quelle est, à partir des valeurs précédentes de $2V_0$, la plus petite variation du potentiel de B que permet d'observer le voltmètre précédent ?

Troisième partie. — On se propose d'étudier plus complètement les phénomènes électrostatiques dont la sphère S est le siège.

1° Dans un champ électrique uniforme, d'intensité H, on place, en un point O où le potentiel du champ est V_0, un *doublet électrique* de moment μ (système de deux charges égales et de signes contraires $\pm q$, placées à une très petite distance l, telle que $ql = \mu$) dont l'axe est parallèle au champ H et de même sens. Trouver en coordonnées polaires l'expression du potentiel v du champ résultant.

Montrer que le potentiel v reste constant sur une certaine sphère de rayon R ayant son centre en O. Trouver la relation entre R, H, μ.

2° Trouver les expressions des composantes radiale et tangentielle du champ résultant h. Représenter, dans un plan méridien, l'allure des surfaces équipotentielles et des lignes de

force du champ électrique à *l'extérieur* de la sphère de rayon R. (On ne demande pas de trouver l'équation polaire des lignes de force.)

3° Montrer que le champ précédent peut correspondre à une distribution électrostatique en équilibre sur une sphère métallique de rayon R, initialement neutre, et introduite dans le champ H (en l'absence du doublet μ). Admettant qu'il en est bien ainsi, trouver la densité superficielle σ en chaque point de la sphère (on désignera par σ_0 la densité sur l'axe de révolution). Calculer a charge totale de chaque hémisphère et le moment électrique de la sphère.

4° Trouver directement, à partir de la distribution superficielle précédente, les expressions du potentiel qu'elle produit sur l'axe aux points A et B, d'abscisses a et b, respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. En déduire les valeurs du champ électrique. Les résultats trouvés vérifient-ils bien les conclusions antérieures ?

5° La sphère, portée à un potentiel différent de V_0, prend une charge Q. Quelle est la nouvelle loi de distribution électrique sur la sphère ?

(*Ecole Normale Supérieure*, 1939.)

---

12. On considère l'appareil formé par un cylindre fixe A de rayon R_2 et de grande hauteur, à l'intérieur duquel pénètre partiellement un autre cylindre B de rayon R_1 concentrique, également au potentiel zéro et suspendu à l'un des plateaux d'une balance. On établit l'équilibre.

Le cylindre A étant maintenu au potentiel zéro, on fait communiquer le cylindre B avec une source au potentiel V. Quelle masse faut-il déposer dans l'un des plateaux, et dans quel plateau, pour rétablir l'équilibre ?

Données numériques : $V = 10^4$ volts, $g = 981$, $\frac{R_2}{R_1} = e^{\frac{1}{50}}$.

II. — ÉLECTRODYNAMIQUE

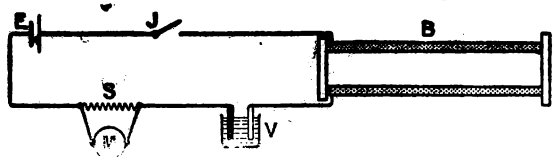
13. 1° Déterminer la longueur l et le rayon r du filament cylindrique, rectiligne, d'une ampe à incandescence, sachant que la résistivité est ρ, la puissance consommée W watts, a différence de potentiel V volts, et que la puissance reçue est rayonnée par la surface latérale à raison de E watts par centimètre carré.

2° Le filament précédent, fonctionnant au même régime, peut être en tungstène. pour lequel la température de fonctionnement est 2600° C. et $\rho = 100$ (microhm $\times$ *cm*); il peut être en carbone pour lequel la température de fonctionnement est 1800° C. et $\rho = 3000$ (microhm-*cm*.). En admettant que les puissances rayonnées E soient proportionnelles aux quatrièmes puissances des températures *absolues*, calculer le rapport des longueurs, d'une part ; le rapport des rayons, d'autre part, entre le filament de tungstène et le filament de carbone.

(*Ecole Centrale*, B, 1925.)

---

14. On considère un circuit électrique représenté par la figure et ainsi constitué : E



source électrique de résistance intérieure négligeable ; J, interrupteur ; B, bobine cylindrique à spires circulaires ; V, voltamètre à sulfate de cuivre de résistance égale à 2,4 ohms M, voltmètre de *faible* résistance égale à 100 ohms ; S, shunt de résistance 1 ohm en dérivation sur le voltmètre M.

1° Calculer en ohms la résistance électrique de la bobine B sachant qu'elle est faite de trois couches, en série, coaxiales, superposées et jointives, de fil de cuivre isolé, chaque couche contenant 400 spires. Le diamètre du fil de cuivre *nu* est de $\frac{12}{10}$ de *mm*, le diamètre moyen des spires est de 4 *cm*. (Résistivité du cuivre = 1,6 microhm-*cm*.).

2° Calculer la valeur qu'aurait l'intensité du champ magnétique au centre de la bobine B, qu'on assimilera à un solénoïde de longueur infinie par rapport à son diamètre, si l'intensité du courant qui la traverse était de 5 ampères. Le diamètre du fil de cuivre *isolé* qui la constitue est de $\frac{16}{10}$ de *mm*; dans chaque couche les spires de l'enroulement sont jointives.

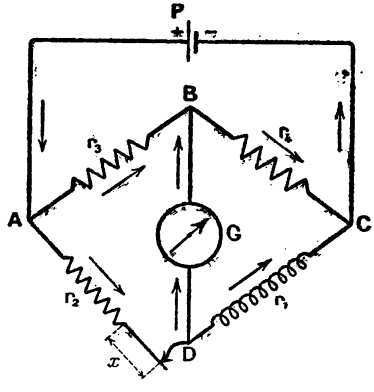
3° En fermant l'interrupteur J, on fait passer dans le circuit total un courant d'intensité constante, n'ayant d'ailleurs aucun rapport avec l'intensité précédente et qui, en 20 minutes, fait croître de 3 *g* la masse de la cathode du voltamètre V. Quel nombre lit-on au *voltmètre* M pendant le passage de ce courant ? Donner le résultat numérique à l'approximation de $\frac{1}{250}$ en valeur relative (96 600 coulombs libèrent une valence-gramme masse atomique du cuivre = 63). Quelle doit être, dans ces conditions, la force électromotrice de la source E ? Les fils de connexion et l'interrupteur J sont supposés de résistance négligeable. Donner le résultat numérique à l'approximation de $\frac{1}{100}$ en valeur relative.

(*École Centrale*, 1922.)

---

15. La résistance r_1 d'un pont de Wheatstone est constituée par un fil de platine: diamètre d; longueur l; résistivité $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$, fonction linéaire de la température t.

Les résistances r_3, r_4 ont même valeur R ; elles sont en fil de manganine : diamètre D; longueur L ; résistivité ρ' indépendante de la température.



La résistance r_2 est formée par une résistance $R = r_3 = r_4$, prolongée par un fil de manganine de même diamètre D et de longueur variable x.

1° Déterminer les longueurs L et l de manière que la longueur x correspondant à l'équilibre du pont soit proportionnelle à la température du fil de platine : $x = at$.

2° Les longueurs L et l ayant les valeurs précédemment déterminées, on demande de calculer l'intensité du courant i qui passe dans le galvanomètre lorsque $x = 0$, c'est-à-dire lorsque $r_2 = r = r_4 = R$.

On désignera par :

G la résistance du galvanomètre, qui fournit une déviation proportionnelle à i ;

E la force électromotrice de la pile, dont la résistance est négligeable.

Montrer que i est sensiblement proportionnel à t lorsque cette température est petite.

Dans ces conditions, quelle sensibilité devra présenter le galvanomètre pour qu'une variation de température d'un degré corresponde à une déviation de N divisions ?

On caractérisera cette sensibilité par le nombre N_0 de divisions de l'échelle du galvanomètre correspondant à un courant d'un microampère.

3° Calculer la température pour laquelle l'erreur commise en admettant la proportionnalité de la température à la déviation atteint $\frac{1}{n}$.

Application numérique. — Fil de platine $d = 0{,}005$ *cm* ; $\rho_0 = 10$ microhms-*cm* $\alpha = 3{,}8 \times 10^{-3}$.

Fil de manganine. D = 0,05 *cm* ; $\rho' = 42$ microhms-*cm*.

E = 1 volt ; G = 50 ohms, $a = 20$ (x étant exprimé en centimètres et t en degrés) N = 50 divisions ; $\frac{1}{n} = \frac{1}{50}$.

(*Ecole des Mines de Saint-Etienne*, 1926.)

---

16. On réalise le montage suivant :

AB, fil de maillechort bien calibré, bien tendu, parfaitement homogène, de longueur AB = 1 *m*;

C, curseur à contact ;

P_1, pile de f. é. m. connue ($E_1 = 1{,}10$ volt) ;

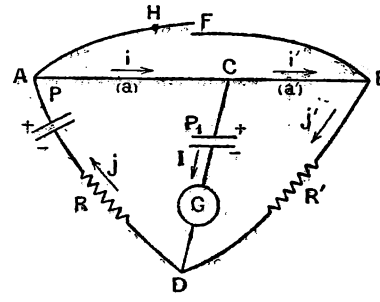
P, pile de f. é. m. (E) et de résistance intérieure (ρ) toutes deux inconnues

R, R′, résistances variables;

G, galvanomètre de résistance inconnue (g) ;

H, interrupteur.

On posera : résistance AC = a, résistance BC = a'.



I. — L'interrupteur H demeurant ouvert et le curseur C fixe, on détermine R et R′ de manière qu'aucun courant ne passe au galvanomètre. Le problème comporte une infinité de solutions. Soit (R_1, R'_1), (R_2, R'_2) deux quelconques de ces solutions. Montrer que le rapport :

$$\frac{R'_2 - R'_1}{R_2 - R_1}$$

ne dépend que du rapport $\frac{E_1}{E}$ des f. é. m. des deux piles. Expliciter les conditions de possibilité de l'expérience et calculer E dans le cas où $R_1 = 3\ \Omega$, $R'_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $R'_2 = 10\ \Omega$.

II. — On retire la pile P_1 de la branche CD qui ne contient plus alors que le galvanomètre G traversé par un certain courant I. Etablir la relation qui doit exister entre les résistances des quatre branches AC, CB, BD et DA pour que la fermeture de l'interrupteur H ne modifie pas la déviation du galvanomètre G. On supposera que la résistance de la branche CD contenant le galvanomètre, est assez grande pour que le courant I qui la traverse puisse être considéré comme négligeable devant les courants qui traversent les autres branches.

La constance de la déviation étant satisfaite pour $R = 2\ \Omega$, $R' = 3{,}6\ \Omega$ et AC = BC calculer la résistance intérieure (ρ) de la pile (P).

III. — On interchange dans le dispositif II, la pile (P) et le galvanomètre (G) en supprimant la résistance R de telle manière que la résistance de la branche AD se réduit à celle du galvanomètre (qui n'est plus supposée très grande), tandis que la résistance de la branche CD se réduit à celle de la pile, qui est supposée négligeable. Etablir la relation qu doit exister entre les résistances des quatre branches AC, CB, AD, BD pour que la déviation du galvanomètre ne change pas, quand on ferme l'interrupteur (H).

Cette condition étant réalisée pour AC = 40 *cm* et $R' = 50\ \Omega$, calculer la résistance du galvanomètre.

Nota. — Aucune hypothèse n'est faite sur la résistance de la branche AHB lorsque l'interrupteur (H) est fermé.

(*Ecole Polytechnique*, 1927.)

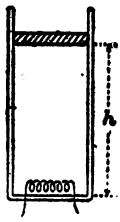
---

17. Entre les extrémités d'un fil de fer de 1 mètre de longueur et 0,2 mm de diamètre on applique une différence de potentiel de 10 volts. On admet que la chaleur produite par effet Joule sert uniquement à échauffer le fil, dont la température centésimale initiale est $\theta = 0°$. Calculer le temps t_1 au bout duquel on devrait avoir $\theta = 200°$, si la résistivité du fer avait la valeur constante $\rho_0 = 12 \times 10^{-6}$ ohm-centimètre.

2° Calculer le temps t_2 au bout duquel on aura $\theta = 200°$ en supposant que la résistivité du fer varie avec la température suivant la loi $\rho = \rho_0 (1 + 0{,}005\,\theta)$.

3° Dans ces deux hypothèses, tracer sur un même graphique les courbes donnant θ en fonction du temps pour les deux premières secondes du phénomène. Echelle des abscisses : 1 cm = 0,2 s. Echelle des ordonnées : 1 cm = 50 degrés.

4° On fait passer dans le fil un courant d'intensité constante et égale à 2 ampères. Calculer le temps t_3 au bout duquel la température sera passée de la valeur initiale $\theta = 0°$ à $\theta = 344°$ en tenant compte de la variation de ρ avec la température.



5° Le fil est enfermé dans une enceinte thermiquement isolée composée d'un cylindre de 10 cm de diamètre intérieur et d'un piston de masse négligeable. On remplit cette enceinte d'air à 0° et à la pression atmosphérique extérieure 76 cm de mercure. On applique aux extrémités du fil, pendant une minute, une différence de potentiel V = 0,3 volt et on maintient constamment le piston à une hauteur $h = 20$ cm au-dessus du fond du cylindre en lui appliquant une surcharge progressive. Quelles sont, à la fin de l'expérience, la température θ de l'air et la masse m de la surcharge ? (Approximations à faire : négliger la capacité calorique du cylindre et du piston, ainsi que la variation de ρ avec la température. Les températures du fil et de l'air enfermé dans l'enceinte sont supposées constamment égales. On considérera l'air comme un gaz parfait ayant un coefficient de dilatation égal à $\frac{1}{273}$).

6° On recommence l'expérience avec les mêmes données, mais on laisse le piston se déplacer librement depuis la hauteur initiale $h = 20$ cm jusqu'à la hauteur finale $h + h_1$. Calculer l'erreur absolue Δh_1 qu'on peut se permettre sur la mesure du déplacement du piston si l'on veut déduire de cette expérience C (chaleur spécifique à pression constante de l'air) à $\frac{1}{50}$ près en valeur relative.

Données numériques :

Densité du fer : 7,85 ; densité du mercure : 13,6.

Chaleur spécifique du fer : 0,11.

— de l'air à volume constant : $c = 0{,}17$.

— de l'air à pression constante : $C = 0{,}24$.

Masse normale du litre d'air : 1,29 gramme.

Equivalent mécanique de la petite calorie : 4,18 joules.

Base des logarithmes népériens : 2,72.

(*Ecole Polytechnique*, 1935.)

---

18. Un secteur continu de 600 volts est utilisé par une Compagnie de Tramways. On considère un tramway pesant 4 tonnes qui, pour se déplacer sur un sol horizontal doit vaincre une force de résistance constante, valant 0,03 fois son poids dans le roulement libre, et 0,5 fois son poids lorsque les roues sont bloquées par le freinage. L'accélération de la pesanteur est : $g = 981$ c g s. Dans ce tramway on trouve en série un rhéostat de résistance variable R et un moteur à courant continu.

1° Le rhéostat réglé pour R = 10 ohms, un ampèremètre indique 30 ampères dans le circuit quand le tramway roule horizontalement en régime permanent. Quelle est alors la vitesse du tramway en kilomètres à l'heure ? On suppose égal à 1 le rendement mécanique du moteur et de la transmission aux roues, la résistance interne du moteur est supposée comptée dans R.

2° On donne maintenant le couple exercé par le moteur qui se traduit par une force

d'entraînement au niveau des roues, faisant avancer le tramway. Cette force, exprimée en kilogrammes-force, vaut quatre fois l'intensité en ampères qui passe dans le moteur. Le tramway arrive sur une côte de 5 %. On règle le rhéostat à 4 ohms. A quelle vitesse de régime le tramway va-t-il monter la côte ? Quel courant passe dans le moteur ? Mêmes questions pour le rhéostat réglé à 2 ohms.

3° Le tramway est au repos en terrain plat. Le rhéostat est réglé à 10 ohms (y compris la résistance interne du moteur, supposée invariable pendant tout le démarrage). On ferme l'interrupteur qui « met le courant » et on demande la loi du mouvement, l'inertie propre du moteur et des roues étant négligeable. (On désire une description de l'allure de ce mouvement, avec graphique des espaces parcourus, des vitesses, des accélérations avec autant que possible quelques valeurs numériques sans rechercher une excessive précision).

Même question en montant une côte de 5 %, le rhéostat étant réglé à 4 ohms.

Même question en descendant une côte de 5 %, le rhéostat étant réglé à 4 ohms également.

4° Le tramway ayant atteint son régime permanent dans le cas de la question 1, le conducteur bloque les roues en freinant et on demande : *a*) le mouvement à partir de ce moment ; *b*) l'intensité qui passe si le conducteur oublie de couper le courant.

5° Dans ce tramway on dispose une masse M de 1 kilogramme qui peut se mouvoir sans frottement seulement sur un axe parallèle au mouvement du tramway. Cette masse est fixée à l'extrémité d'un ressort sans masse, qui s'étire ou se comprime suivant cet axe, et dont l'autre extrémité est fixée au tramway. Ce ressort exerce un effort de rappel vers la position d'équilibre qu'il donne à la masse, effort proportionnel aux changements de longueur qu'on lui applique, et que l'on calculera pour que la fréquence propre du système oscillant masse-ressort soit de 1 vibration par seconde. Le tramway partant du repos, en terrain plat, avec son rhéostat réglé à 10 ohms comme dans la question 3°, on demande quel sera le mouvement pris par la masse M et comment il apparaîtra aux passagers du tramway. On considérera comme négligeable l'influence de la réaction du ressort sur le mouvement du tramway.

(*École Nationale Supérieure des Mines*, 1939.)

---

19. Un expérimentateur dispose du matériel suivant

1° Un galvanomètre G de résistance intérieure égale à 1 ohm et dont la graduation porte 150 divisions ; en l'absence de shunt, chaque division équivaut à 1 milliampère ;

2° Deux boîtes de résistances B_1 et B_2 renfermant chacune quatre résistances en série rigoureusement étalonnées, savoir :

Pour B_1 : 1 ohm, 9 ohms, 90 ohms, 900 ohms ;

Pour B_2 : 1 ohm, $\frac{1}{9}$ ohm, $\frac{1}{99}$ ohm, $\frac{1}{999}$ ohm.

3° Un fil métallique de maillechort, homogène et bien calibré, tendu parallèlement à une règle divisée en millimètres. Sur ce fil, on peut faire glisser un curseur à contact pourvu d'une borne ; les extrémités du fil sont également pourvues de bornes. La position du contact est repérable sur la règle dont les divisions 0 et 100 correspondent exactement aux extrémités du fil ;

4° Une pile.

a) Comment pourra-t-il s'y prendre pour évaluer avec une erreur relative minimum une résistance donnée x ? L'erreur maximum possible ε dans la position du curseur sera supposée constante tout le long du fil.

Application numérique : $x = 1850$ ohms; $\varepsilon = \pm 0{,}5$ mm.

Avec quelle précision x sera-t-il connu

b) Même question pour mesurer, dans les meilleures conditions de précision, une intensité de courant égale à 6,5 ampères. L'erreur dans les lectures galvanométriques étant supposée égale au plus à $\frac{1}{4}$ de division, évaluer cette précision.

c) Même question pour la mesure d'une différence de potentiel égale à 8 volts. Evaluer également la précision.

d) On ajoute aux appareils précédents, un deuxième galvanomètre G′ identique à G et une résistance auxiliaire $\rho = 1$ ohm. Comment faut-il s'y prendre pour mesurer, dans les meilleures conditions de précision, la puissance consommée dans une distribution d'éclairage alimentant, sous 220 volts, 400 lampes demi-watt de 100 bougies chacune ? Quelle est cette puissance ? Avec quelle précision sera-t-elle connue ?

Nota. — Outre les explications nécessaires, la solution devra comporter, pour chacune des questions posées, un schéma explicatif très précis utilisant les mêmes lettres de référence que celles de l'énoncé. On désignera par R la résistance de la boîte B_1, par S celle de la boîte B_2.

(*Ecole Polytechnique*, 1932.)

---

20. Un conducteur homogène, continu, de résistance r par unité de longueur, est disposé suivant une circonférence de rayon a ; le conducteur est alimenté en deux points diamétralement opposés A et B à l'aide d'une source de force électromotrice E et de résistance intérieure R, les fils de connexion ayant une résistance négligeable, le point A étant relié au pôle positif, le point B au pôle négatif.

Une réglette isolante diamétrale MN porte à ses extrémités deux contacts M et N qui frottent contre le contour circulaire. Cette réglette tourne d'un mouvement uniforme avec la vitesse ω. Donner, en fonction du temps, en grandeur et en signe, la valeur de la différence de potentiel U entre les points M et N.

Au temps 0, la réglette coïncide avec le diamètre AB.

Donner la même valeur pour r négligeable. Discussion et traduction graphique dans ce dernier cas.

(*Ecole Supérieure d'Electricité*, 1911.)

---

21. Un fil cylindrique et homogène de ferronickel a, à la température ordinaire, une résistance de 25 ohms et une longueur de 1 m:

1° Sa section droite étant un cercle de 0,1 mm de rayon, quelle est la résistivité de l'alliage ?

2° Avec ce fil AB, bien tendu, on réalise le montage de la figure 1. Les extrémités A et B sont reliées respectivement aux deux pôles d'une pile P ; un galvanomètre G est intercalé entre A et l'un des pôles d'une deuxième pile P′ dont l'autre pôle est relié à un curseur à contact C qui peut se déplacer le long du fil AB. Tous les conducteurs de liaison ont des résistances négligeables.

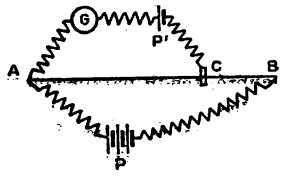


Fig. 1.

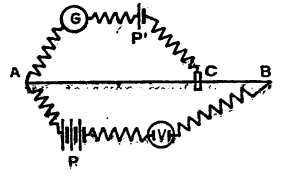


Fig. 2.

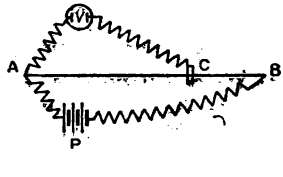


Fig. 3.

Lorsqu'on met en P′ un élément de pile Weston dont la force électromotrice est de 1,018 volt à la température ambiante, on constate que le galvanomètre G n'est parcouru par aucun courant lorsque le curseur C est à 31 cm de A. Que faut-il pour qu'un tel résultat puisse être atteint ? Quels sont alors le courant débité par la pile P et la tension aux bornes de cette pile ?

3° En remplaçant l'élément Weston par une autre pile P″, on doit pour ramener le galvanomètre au zéro déplacer le curseur de 6,4 cm vers B. En déduire la force électromotrice de la pile P″.

4° La pile P étant enlevée du circuit, on réunit ses pôles aux bornes d'un voltmètre de grande résistance ; sachant que ce dernier marque alors 4,05 volts, on demande de déterminer la résistance intérieure de P en utilisant les résultats trouvés dans la deuxième partie.

5° On introduit un voltamètre V à eau acidulée et à électrodes de platine sur le circuit de la pile P, l'élément Weston étant en P' (fig. 2). Pour amener le galvanomètre au zéro, il faut placer le curseur à 64 cm de A. Quel sera, dans ces conditions, le volume gazeux recueilli en 10 minutes dans une éprouvette E qui recouvre l'*ensemble* des deux électrodes de V ? On rappelle que, dans les conditions normales, une molécule-gramme gazeuse occupe un volume de 22,4 litres ; la température ambiante sera supposée voisine de 0°. On prendra 96 600 coulombs pour valeur du faraday.

6° A quelle relation satisfont la force contre-électromotrice et la résistance intérieure du voltamètre dans l'expérience précédente ?

7° Le voltamètre V est mis au lieu et place de l'élément Weston P', le galvanomètre étant supprimé et le curseur étant maintenu à 64 cm de A (fig. 3). On constate alors qu'il faut 30 minutes pour obtenir dans l'éprouvette E le même volume gazeux que précédemment. Déduire de cette expérience et de la relation de la sixième partie la force contre-électromotrice et la résistance du voltamètre.

(*Ecole Navale* 1935.)

III. — MAGNÉTISME

22. Un barreau aimanté de moment magnétique $\mathfrak{M}$ est suspendu par un fil sans torsion à l'intérieur d'un solénoïde qu'on supposera assez long pour rendre négligeable l'influence des extrémités. L'axe du solénoïde est dans le plan du méridien magnétique. Le solénoïde possède n spires par centimètre. Pour un certain sens du courant, la durée d'une oscillation complète est t_1. En inversant le sens du courant, le barreau se retourne de 180° et dans cette nouvelle position la durée d'une oscillation complète est t_2.

Sachant que la composante horizontale du champ magnétique terrestre est H, on demande : 1° l'intensité en ampères du courant qui parcourt le solénoïde ; 2° la durée d'une oscillation du barreau, supposé soumis à la seule action du champ terrestre

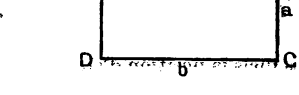
Application numérique :

$t_1 = 8$ s, $t_2 = 12{,}2$ s. $H = 0{,}19$ gauss, $n = 5$.

(*Ecole supérieure d'Electricité*, 1905.)

---

23. Un circuit fermé parcouru par un courant constant I, est constitué par quatre conducteurs métalliques disposés suivant les quatre côtés d'un rectangle. Ce circuit forme un système rigide mobile autour de l'un des côtés AB situé horizontalement. Les côtés du rectangle ont pour longueurs a et b. Les conducteurs sont pesants, homogènes, de diamètre négligeable et ont une masse μ par unité de longueur.



1° Le système étant disposé dans un champ uniforme de direction verticale et d'intensité H, on demande de déterminer la position d'équilibre.

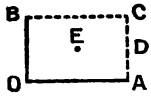
2° Le système, toujours mobile autour de l'axe horizontal AB, est placé dans un champ uniforme H horizontal et perpendiculaire à AB. Il est dépourvu d'amortissement. On l'écarte de sa position d'équilibre d'un angle très petit et on l'abandonne à lui-même. On demande la période des oscillations.

3° Revenons au cas de la première partie. Le système étant maintenant dans un milieu résistant, on l'abandonne sans vitesse initiale quand il se trouve dans un plan vertical. Quelle est la quantité totale de chaleur dégagée par frottement dans le milieu entre le moment où l'on abandonne le système et celui où il atteint sa position d'équilibre ?

Ecole Supérieure d'Electricité, 1907.)

---

24. Deux aimants longs et minces OA et OB sont placés à angle droit et liés rigidement de façon à former un seul corps solide. Les pôles nord sont aux extrémités A et B, les pôles sud en O. Les moments magnétiques sont $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$, les longueurs a et b.



1° L'ensemble des deux aimants est mobile en tous sens dans un plan horizontal, par exemple en flottant sur un liquide. Quelle est sa position d'équilibre quand il est soumis à la seule action d'un champ magnétique uniforme, horizontal, d'intensité H ? A quel effet mécanique est soumis cet ensemble si on le fait tourner d'un angle α autour d'un axe vertical à partir de sa position d'équilibre ?

2° L'ensemble des aimants est rendu mobile dans un plan vertical autour d'un axe horizontal, normal à son plan, passant par E centre du rectangle OABC. On le soumet à l'action d'un champ magnétique uniforme horizontal situé dans le plan OABC, d'intensité H. Quelle surcharge faut-il placer en D, milieu de AC, pour que, sous l'action des forces magnétiques, des poids des aimants et de la surcharge, l'ensemble se place de façon que OA soit horizontal ?

Faire le calcul avec les valeurs numériques suivantes :

$\mathfrak{M} = 18\,000$ C. G. S., $a = 40$ *cm* poids de OA $= 300$ *g*.

$\mathfrak{M}' = 9\,000$ C. G. S., $b = 20$ *cm*. poids de OB $= 150$ *g*.

H $= 50$ gauss, $g = 981$ C. G. S.

3° Pour ces mêmes valeurs numériques, calculer le champ exercé par l'ensemble des deux aimants au point E.

4° Indiquer sommairement la forme des lignes de force du champ magnétique du système des deux aimants.

(*Ecole Navale*, 1916.)

---

25. Un aimant permanent, mobile autour d'un axe horizontal dont la direction fait l'angle φ avec le plan du méridien magnétique, est soumis à l'action du champ magnétique terrestre, d'intensité F et d'inclinaison I, en même temps qu'à celle de son poids P. Le centre de gravité est à une distance a de l'axe de suspension dans une direction qui fait l'angle α avec le plan passant par cet axe et par la direction du moment magnétique de l'aimant.

1° En désignant par i l'angle que fait ce dernier plan avec l'horizon, calculer les moments, par rapport à l'axe de suspension, du poids de l'aimant et du couple exercé par le champ magnétique terrestre. Montrer que ce dernier moment ne fait intervenir le moment magnétique de l'aimant que par sa projection μ sur un plan perpendiculaire à l'axe de suspension.

2° Ecrire l'équation d'équilibre entre les deux actions et en déduire la tangente de l'angle i qui correspond à cet équilibre.

3° Chercher à quelles conditions cet angle i reste invariable quand on fait varier l'angle φ par rotation de l'aimant et de son support autour d'un axe vertical et comment se dirige l'axe magnétique de l'aimant quand cette condition est remplie sans que l'angle I soit droit.

4° Plus généralement, étudier la manière dont varie *cotg i* en fonction de φ pendant cette rotation et discuter les différents cas qui peuvent se présenter, en particulier ceux pour esquels la position d'équilibre est indéterminée.

5° Montrer pourquoi, lorsque l'action de la pesanteur n'est pas négligeable devant l'action magnétique, il n'est pas possible de déduire l'inclinaison I de l'étude expérimentale de la variation de i avec φ. Peut-on en déduire la déclinaison ?

6° Comment doit-on procéder pour en déduire I, quand l'action de la pesanteur est négligeable ?

Pour simplifier, on désignera par A la quantité $\frac{Pa}{\mu F}$.

(*Ecole Navale*, 1921.)

26. Projet de mesure de $\mathcal{M}H$ par la méthode de Gauss à l'approximation de 1/1000. Calculs relatifs aux causes d'erreur.

(On fera usage des unités C. G. S. et de la règle à calcul.)

Accélération de la pesanteur : 981 C. G. S.

Champ magnétique. $\begin{cases} \text{Inclinaison : } i = 60°. \\ \text{Composante horizontale : } H = 0{,}19 \text{ gauss.} \end{cases}$

L'aimant aura la forme d'un cylindre circulaire AOB ayant pour longueur AB = 6 *cm* et pour rayon $r = 0{,}15$ *cm*. Il sera fait d'un acier ayant pour densité 7,85 et susceptible de recevoir un moment magnétique de 420 unités C. G. S. par cm^3.

Il sera suspendu à un fil de torsion négligeable, au moyen d'une monture dont le poids et l'inertie seront négligés, le point d'attache C étant situé dans le plan de symétrie perpendiculaire au milieu O de l'axe du cylindre aimanté, à une distance de cet axe ayant pour valeur OC = 1 *cm*.

1° Calculer le volume v, la masse m, le poids p, le moment magnétique $\mathcal{M}$ de l'aimant.

2° Calculer le moment d'inertie $I = m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12}\right)$, le couple directeur $C = \mathcal{M}H$ et la période d'oscillation T de l'équipage, en négligeant l'inclinaison que donne, à l'aimant AB, la composante verticale du champ magnétique.

3° Calculer cette inclinaison ε et en préciser le sens, en désignant par A l'extrémité australe de l'aimant AB.

4° Calculer l'écart relatif $\frac{H' - H}{H}$ entre la composante H' du champ magnétique dans la direction inclinée de l'aimant et sa composante horizontale H.

5° De quelle longueur η faudra-t-il faire glisser l'aimant dans sa monture, et dans quel sens, pour rétablir l'horizontalité de l'aimant ? Quel changement relatif $\frac{T_1 - T}{T}$ ce déplacement apportera-t-il à la valeur de la période T ?

(*Ecole Polytechnique*, 1911.)

---

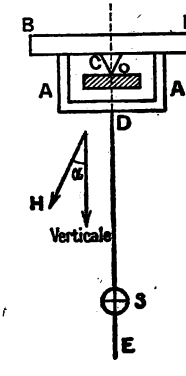
27. On considère deux barreaux d'acier identiques A et A', qui ont été aimantés différemment. En les faisant osciller dans le champ terrestre autour d'axes verticaux (les barreaux restant dans un plan horizontal), on constate que le barreau A fait trois oscillations complètes en 10 secondes, alors que A' n'en fait que deux.

1° Quel est le rapport des moments magnétiques des deux barreaux ?

2° Quelle est la position d'équilibre, par rapport au méridien magnétique, de l'équipage obtenu en fixant en croix les barreaux ? L'équipage est toujours supposé horizontal et mobile autour d'un axe vertical.

3° Quelle est la période du mouvement de cet équipage ?

4° Quelle est la période du mouvement de l'équipage obtenu en fixant l'un sur l'autre les deux barreaux, les pôles en regard étant soit de même nom, soit de noms contraires.



(*Ecole Nationale Supérieure des Mines*, 1911.)

---

28. Un système rigide est formé d'un barreau prismatique d'acier B non aimanté, d'un couteau d'agate C et d'une monture en métal non magnétique ADE, DE étant une tige infiniment mince, normale aux arêtes du barreau et le long de laquelle peut glisser à frottement dur une sphère S dont la masse est de 5 *g*.

Le système peut osciller autour de l'arête O de son couteau. Lorsque la distance SO du centre de la sphère à l'arête du couteau est 20 *cm*, le centre de gravité est sur l'arête et le moment d'inertie est 3000 *g-cm²*.

Première partie. — On fait varier la distance SO = x. Calculer la durée d'oscillation T

pour x = 20, 21, 22, 25, 30 cm et étudier d'une manière générale l'allure de la courbe $T = f(x)$. Intensité de la pesanteur : 980 C. G. S.

Seconde partie. — On aimante le barreau suivant sa longueur BB ; son moment magnétique est 300 C. G. S. On crée dans le plan du tableau un champ magnétique uniforme de 2 C. G. S. représenté par le vecteur H faisant l'angle α avec la verticale. On place le centre S de la sphère à 25 cm de l'arête O.

1° Etudier les positions d'équilibre correspondant aux diverses valeurs de α et calculer approximativement les positions extrêmes ;

2° Calculer les durées d'oscillation qui diffèrent le plus de celle du système non aimanté ;

3° Etudier d'une manière générale la loi de variation de la durée d'oscillation en fonction de α, en profitant des approximations légitimées par les calculs précédents.

(*Ecole Normale Supérieure*, 1906.)

IV. — ÉLECTROMAGNÉTISME

29. 1° Calculer le champ magnétique H produit par un segment de conducteur rectiligne AB parcouru par un courant d'intensité I.

Démontrer que ce champ en un point quelconque M a pour valeur :

$$H = I\,\frac{\cos A + \cos B}{e}$$ (unités électromagnétiques C. G. S.),

A, B désignant les angles à la base du triangle ABM et e la hauteur MP de ce triangle.

2° La figure ABB'A' représentant un rectangle, on considère les deux segments de conducteurs rectilignes AB et A'B' parcourus par les courants I et I',

Démontrer que l'action du champ magnétique produit par le segment de conducteur AB sur le segment A'B' est une force F ayant pour intensité :

$$F = 2II'\left(\frac{1}{\sin\varphi} - 1\right)$$

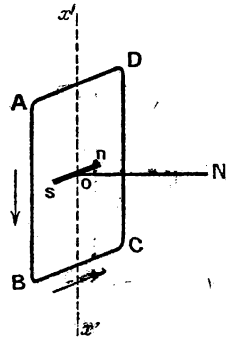
φ désignant l'angle du segment AB et de la diagonale AB' du rectangle.

3° Déduire de cette formule l'action mutuelle de deux cadres carrés ABCD et A'B'C'D' formant les bases d'un prisme droit et parcourus par les courants I et I'. On désignera par a le côté des carrés et par d la distance des deux cadres (c'est-à-dire la hauteur du prisme).

4° *Application numérique.* — Calculer l'action mutuelle des deux cadres dans les deux cas suivants :

1°	a = 50 cm.	d = 1 cm.	I = I' = 3 ampères.
2°	a = 50 cm.	d = 50 cm.	I = I' = 3 ampères.

(*Ecole des Mines de Saint-Etienne*, 1927.)



30. Un cadre carré ABCD de côté $2c$, situé dans le plan du méridien magnétique, porte un enroulement de cinq tours de fil isolé. Une très petite aiguille aimantée ns est supportée horizontalement au centre du cadre par un fil sans torsion.

1° Quelle est, en ampères, l'intensité I du courant qui dévie l'aiguille d'un angle donné ω ? De quel angle β faut-il faire tourner le cadre autour de l'axe vertical xOx' pour ramener ensuite l'aiguille dans le plan du cadre ?

Application numérique

$$2c = 50\ cm\ ;\ \omega = 30°,$$

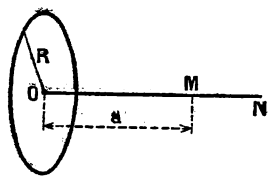
composante horizontale du champ terrestre H = 0,205 gauss.

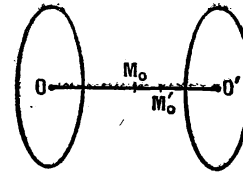
2° Le fil conducteur du cadre précédent est enroulé, en totalité, sur un cadre circulaire de même périphérie. Exprimer en gauss, pour un courant donné I, le champ H au point M de la normale OM au plan du cadre. On posera OM = a.

Application numérique

$$i = 10 \text{ ampères} ; \quad a = R$$

R désignant le rayon du cadre). Evaluer la variation ΔH de ce champ lorsqu'on donne à a un accroissement $\Delta a = 1$ cm.





3° On dispose parallèlement entre eux deux cadres circulaires identiques au précédent, à droite OO′ qui joint leurs centres étant perpendiculaire à leurs plans. On posera $OO' = 2a$. Exprimer, pour un courant donné i traversant dans le même sens les cinq spires de chaque enroulement, le champ H′ au point M_0 milieu de OO′.

Applications numériques :

$$1° \; i = 10 \text{ amp.} ; \quad a = R ;$$

$$2° \; i = 10 \text{ amp.} ; \quad a = \frac{R}{2}.$$

Calculer dans les deux cas la variation du champ lorsqu'on passe du point M_0 au point M'_0 tel que $M_0M'_0 = 1$ cm.

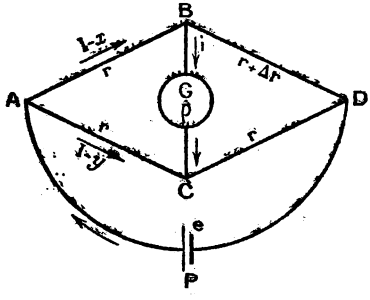
(*École Polytechnique*, 1926.)

---

31. 1° On considère un galvanomètre G à cadre mobile et à miroir, dont les caractéristiques sont les suivantes:

Nombre de spires du cadre : $n = 300$

Longueur moyenne des côtés verticaux des spires : $a = 6$ cm ;



Longueur moyenne des côtés horizontaux des spires : $b = 4$ cm.

Résistance du cadre : $\rho = 100\ \Omega$;

Champ magnétique dans l'entrefer : H = 500 gauss ;

Constante de torsion des fils de suspension : C = 10 C. G. S. par radian ;

Distance de l'échelle au miroir : D = 2 m.

Quelle est l'intensité i en ampères du courant qui doit traverser le cadre pour qu'on observe sur l'échelle un déplacement d du spot égal à 1 mm ? Quelle est alors, en volts, la différence de potentiel v aux bornes du cadre ?

2° On transforme le galvanomètre G en un autre galvanomètre G′ en remplaçant son cadre par un autre cadre de dimensions identiques dont l'enroulement comporte le même poids de fil de cuivre, mais est constitué par un fil de section différente ; le nombre de spires est maintenant n', la résistance est ρ', et les valeurs du courant et de la différence de potentiel aux bornes correspondant au déplacement $d = 1$ mm du spot sont i' et v'. On pose :

$$\rho' = \lambda\rho, \qquad i' = \mu i \qquad v' = \nu v.$$

Exprimer les rapports μ et ν en fonction du rapport λ.

3° Le galvanomètre G′ est placé dans le circuit d'un couple thermoélectrique ; la résistance totale de la partie du circuit extérieure au galvanomètre est : $r = 10\ \Omega$. Calculer

en fonction de la résistance r, des données ρ et i relatives au galvanomètre G, et du coefficient λ caractérisant le galvanomètre G', la valeur e de la f. é. m. du couple qui produit un déplacement $d = 1$ mm du spot.

Chercher la valeur λ_m du coefficient λ pour laquelle e est minimum, et calculer numériquement la résistance ρ'_m et la f. é. m. e_m correspondantes. Sachant que la f. é. m. du couple est de 50 microvolts par degré, quelle est la valeur de la différence de température entre les soudures qui produit la f. é. m. e_m ?

4° Le galvanomètre G constitue la diagonale BC d'un pont de Wheatstone ; une pile P de résistance négligeable maintient entre les sommets A et D une différence de potentiel constante : $e = 2$ volts. Les quatre branches du pont ont des résistances égales : $r = 10\ \Omega$; chacune d'elles est parcourue par un courant I, et le galvanomètre est au zéro. On modifie la résistance de la branche BD, de façon à lui donner la valeur $r + \Delta r$, le rapport $\frac{\Delta r}{r}$ étant très petit ; le galvanomètre est alors parcouru par un courant i, les branches AB et AC par des courants $I - x$ et $I - y$.

Dans une première approximation, on supposera, ρ étant grand par rapport à r, que la répartition des courants et des différences de potentiel dans les conducteurs AB, BD, AC, CD est la même que si la diagonale BC n'existait pas. Calculer numériquement dans cette hypothèse la valeur de Δr qui correspond à un déplacement $d = 1$ mm du spot.

5° Tenant compte maintenant de la modification apportée par le passage du courant i dans la diagonale BC, écrire les équations qui permettent de calculer x, y et i, et exprimer Δr en fonction de r, ρ, I et i. Montrer que le résultat obtenu justifie l'approximation faite au paragraphe précédent.

6° On remplace le galvanomètre G par le galvanomètre G'. Calculer la valeur de Δr qui donne un déplacement $d = 1$ mm du spot, et l'exprimer en fonction de λ, r, ρ, I et du courant i qui donne cette déviation dans le galvanomètre G. Calculer la valeur λ_m de λ pour laquelle Δr est minimum, et la valeur correspondante ρ'_m de la résistance du galvanomètre.

Calculer numériquement la valeur Δr_m de Δr correspondant à $\lambda = \lambda_m$. Si la résistance du conducteur BD varie de $\frac{1}{300}$ de sa valeur quand sa température varie de 1 degré, quelle est la variation de température de ce conducteur qui produit la variation de résistance Δr ? Comparer, au point de vue de la mesure des températures, les résultats trouvés ici et dans la troisième partie.

7° Les branches du pont ayant des résistances quelconques, et le galvanomètre G étant traversé par un certain courant d'intensité i, on intercale dans la diagonale BC une pile P' de résistance intérieure négligeable et de f. é. m. e' telle que le galvanomètre revienne au zéro ; puis on supprime la pile P et on réunit directement les sommets A et D par un conducteur de résistance négligeable. Montrer, en se servant uniquement du fait que les relations de Kirchhoff forment un système d'équations linéaires, que le galvanomètre est alors traversé par un courant ayant même intensité i que précédemment. Utiliser cette propriété pour montrer que le résultat obtenu dans la sixième partie pour la valeur la plus favorable de la résistance ρ' peut être déduit de celui qui a été obtenu dans la troisième partie.

(*Ecole Normale Supérieure*, 1926.)

---

32. Un puissant aimant permanent A est équivalent à l'ensemble de deux pôles magnétiques distants de 8 cm. Cet aimant est fixé sur une règle graduée, la direction de cette règle et celle de la ligne des pôles sont horizontales et dans le plan du méridien magnétique.

1° Une petite boussole B, dont l'aiguille est horizontale, peut être déplacée le long de la règle graduée, et l'on constate que son aiguille se retourne lorsqu'elle passe à 60 cm du milieu de l'aimant A. On demande quel est le moment magnétique de cet aimant A, sachant que la composante horizontale du champ magnétique terrestre, mesurée à

1 ou 2 % près, vaut 0,2 C. G. S. Est-il légitime de faire ce calcul en assimilant l'aimant A à un aimant infiniment court?

2° On fait tourner la règle graduée d'un petit angle autour de la verticale passant par le centre de la boussole B de manière que le déplacement du centre de l'aimant, que l'on mesure à 1 *mm* près, soit de 5 *cm*. Quelle est alors la direction de l'aiguille de la boussole? Si l'on fait osciller cette aiguille autour de sa position d'équilibre, quelle sera la période de ses oscillations sachant qu'en l'absence de l'aimant A, la période des oscillations dans le champ terrestre serait de 1 seconde ?

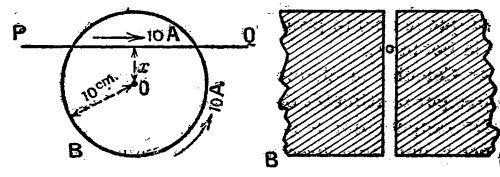
3° On replace ensuite la règle précédente graduée et l'aimant A dans leur position primitive, et l'on retire la boussole B pour lui substituer un pendule constitué par un aimant C identique à A, dont la ligne des pôles est verticale dans la position d'équilibre. On fait osciller ce pendule autour d'un axe perpendiculaire au méridien magnétique et la période des oscillations est de 12 secondes. Cette période devient 10 secondes lorsqu'on désaimante l'aimant C. On sait, en outre, que l'inclinaison du champ magnétique terrestre au lieu considéré est de 60°.

Déduire de là quelle serait la période des oscillations si l'on aimantait à nouveau C exactement de la même manière mais en sens inverse, et quel est le moment d'inertie du pendule par rapport à son axe de suspension. Déterminer enfin quelle serait avec cette nouvelle aimantation, la position d'équilibre que prendrait le pendule C si l'on supprimait l'aimant A.

(*École Normale Supérieure*, 1913.)

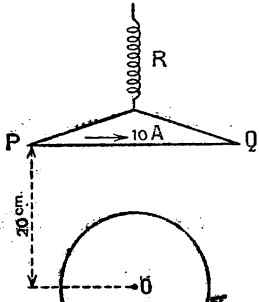
---

33. Une très longue bobine B, horizontale, cylindrique, à section circulaire de rayon $r = 10$ *cm*, est divisée en deux parties par une fente étroite, plane, perpendiculaire à l'axe. Cette bobine porte des spires, à raison de 80 par *cm*. Chacune de ces spires est parcourue par un courant électrique dont l'intensité est de 10 ampères.



On admettra que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur de la bobine et nul à l'extérieur.

Dans la fente peut se déplacer une tige horizontale PQ. Cette tige est parcourue par un courant de 10 ampères.



Les sens des courants sont donnés par la figure.

1° Calculer, en fonction de la distance x à l'axe de la bobine, la force électromagnétique F, exercée sur PQ.

Construire la courbe représentative de F, en fonction de x.

Calculer F pour $x = 0$.

2° Calculer le travail électromagnétique W, dans le déplacement de PQ parallèlement à elle-même, dans la fente, d'une limite à l'autre du champ.

3° La tige PQ est soutenue, à 20 *cm* au-dessus de l'axe O, par un ressort à boudin R, dont la tension augmente de 500 dynes pour chaque centimètre d'allongement. En allongeant ainsi R on amène PQ dans la fente, dans les positions telles que la tension de R équilibre la force électromagnétique F.

Ces positions d'équilibre sont-elles stables ?

Calculer les valeurs correspondantes de x.

Unité électromagnétique C. G. S. d'intensité = 10 ampères.

(*Ecole Centrale*, B, 1927.)

---

34. 1° **Calculer le champ magnétique qu'un conducteur circulaire de rayon R centimètres, parcouru par un courant de I ampères, exerce en un point situé sur son axe à la distance x de son centre O.**

De combien peut-on s'écarter du centre O, sur l'axe, sans que la variation relative du champ dépasse 0,01 ?

Calculer numériquement le rapport du champ au point de distance x, au champ au centre O, pour des valeurs de $\frac{x}{R}$ croissant par dixièmes de 0 à 1.

Indiquer cette variation du champ par une courbe.

2° **Deux conducteurs circulaires A et B, identiques, de même axe, ont leurs plans situés à une distance égale à leur rayon R. Ils sont parcourus dans le même sens par le même courant.**

Utiliser les valeurs numériques obtenues précédemment, pour calculer ce champ aux différents points de l'axe, entre les plans de A et de B, situés à une distance $\frac{R}{10}$ les uns des autres, à partir du centre de l'un des conducteurs.

Tracer la courbe représentative du champ.

3° **On remplace chacun des conducteurs A et B par un cadre circulaire de 10 spires très rapprochées les unes des autres et dont le rayon moyen est de 15 *cm*. La distance des plans de ces deux cadres est de 15 *cm*. Leur axe commun est horizontal et dans le plan du méridien magnétique terrestre. On place au milieu de leur ensemble une petite bobine C, formée de 80 spires circulaires, chacune d'elles ayant 1 *cm* de rayon, et dont l'axe est vertical. On met en série A, B et C, de façon que le courant passe dans le même sens dans A et B. L'intensité de ce courant est de 1,2 ampères. A quelle action mécanique, dont on calculera la grandeur, est soumise la bobine C ? Que devient-elle si l'on renverse le sens du courant dans l'ensemble ?**

La composante horizontale du champ magnétique terrestre vaut 0,200 gauss. On supposera que le champ produit par les deux cadres A et B est uniforme dans tout le volume de la bobine C.

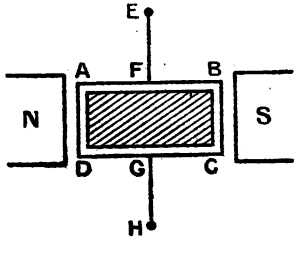
4° **Calculer le champ en un point de l'axe d'une bobine infiniment longue, ayant n spires par centimètre de longueur, en utilisant le résultat du premier paragraphe.**

On rappelle que le champ qu'un élément de courant exerce en un point situé à la distance r, dans une direction faisant l'angle α avec la direction de l'élément, est égal à $\frac{ids \sin \alpha}{r^2}$, où i est l'intensité du courant en unités électromagnétiques C. G. S. Il n'est d'ailleurs pas imposé d'utiliser cette formule.

(*Ecole Navale*, 1926.)

---

35. Sur un galvanomètre à cadre : le cadre ABCD a ses côtés verticaux, AD et BC, dans un champ magnétique d'intensité H, uniforme, horizontal, radial, c'est-à-dire dirigé vers l'axe vertical du fil EFGH qui soutient le cadre.



1° **Au seul point de vue *qualitatif*, étudiez le mouvement du cadre, dans les circonstances suivantes :**

Extérieurement, les bornes E et H sont simplement réunies par une résistance de valeur R. Le cadre est écarté de sa position d'équilibre, puis abandonné.

a) **Expliquez le mouvement que va prendre le cadre.**

b) **Expliquez la variation de ce mouvement lorsque R variera de ∞ (circuit ouvert) à 0 (court-circuit), H étant constant.**

c) Expliquez la variation du cas précédent (*b*), lorsque le champ magnétique est shunté par un morceau de fer doux posé à la fois sur les pièces polaires N et S.

2° **Masse du cadre = 20 *g* ; AB = CD = 15 *cm* ; BC = AD = 5 *cm* ; les fils du cadre, très serrés, seront considérés comme confondus avec les côtés du rectangle ABCD ; période**

de l'oscillation en circuit ouvert = T = 16 s ; un courant de 10^{-8} ampère (10^{-9} unités e. m. C. G. S.) dévie de 1 *mm* le spot lumineux formé sur une échelle placée à 1 mètre nombre de spires = 500. Calculez H.

(*Ecole Centrale*, B, 1926.)

---

36. Le cadre mobile d'un galvanomètre est constitué par 200 spires de fil rectangulaires, enroulées dans le même sens ; l'axe de symétrie de la bobine plate rectangulaire MNPQ formée par ce cadre, parallèle aux grands côtés des spires, est confondu avec les fils de torsion métalliques verticaux BC, B'C' attachés respectivement aux bornes fixes B, B'. Toutes les spires seront supposées de mêmes dimensions : MN = 5 *cm*, NP = 2 *cm* ; elles sont faites de fil isolé qui, nu, a un diamètre de $\frac{5}{100}$ *mm*. Les deux fils BC, B'C', qui ont même résistivité que le cuivre, ont chacun une longueur de 5 *cm* et un diamètre de $\frac{1}{10}$ *mm* ; leur couple de torsion par centimètre de longueur de fil simple est 375 C. G. S. Ce cadre est placé dans un champ magnétique uniforme d'intensité 1000 gauss et de direction fixe, parallèle au plan des spires quand le courant dans celles-ci est nul et quand la torsion des fils BC et B'C' est aussi nulle. Un miroir plan M est fixé rigidement au cadre On supposera dans ce qui suit que les déviations du cadre restent petites.

1° Calculer en ohms la résistance comprise entre les bornes B et B' (50 *m* de fil de cuivre de diamètre 1 *mm* ont une résistance de 1 Ω). L'échelle graduée contenant le filament F lumineux servant d'objet immobile par rapport à cette échelle, se trouvant à 1 *m* du miroir M, quelle est la longueur focale de la lentille fixe qu'on doit mettre contre le miroir M pour obtenir sur l'échelle une image F' nette de F ?

2° α) Quelle est en ampères l'intensité qui passe dans le cadre quand cette image F' se déplace de 1 *cm* sur l'échelle à partir de sa position correspondant à un courant nul ?

β) Quel shunt doit-on adjointre au cadre pour réaliser un milliampèremètre tel que la déviation précédente de 1 *cm* corresponde à un courant de 0,01 ampère ? (Se limiter à l'approximation relative de $\frac{1}{200}$.)

γ) Quelle résistance doit-on mettre en série avec le cadre pour constituer un voltmètre tel que la déviation précédente de 1 *cm* corresponde à une tension de 10 volts entre les bornes du voltmètre ainsi réalisé ? (Se limiter à l'approximation relative de $\frac{1}{200}$.)

(*Ecole Centrale*, B, 1923.)

---

37. Une tige homogène d'acier AB, de forme cylindrique et de faible diamètre, ayant = 15 *cm* de longueur, est suspendue horizontalement à un fil de torsion vertical dont l'axe passe par le milieu de la tige ; en outre, un cylindre, formé d'une matière de densité ρ = 7,83 ayant *h* = 2 cm de hauteur et *d* = 2 *cm* de diamètre est fixé à la tige de manière que l'axe du cylindre soit dans le prolongement de celui du fil.

a) Quel est le moment d'inertie I de AB sachant que la fréquence oscillatoire de l'équipage, d'abord égale à N, prend la valeur 1,028 N lorsqu'on enlève le cylindre.

b) Ayant aimanté la tige d'acier, on la suspend verticalement au-dessous du plateau d'une balance sensible de manière qu'à l'équilibre, son axe coïncide avec celui d'une bobine creuse, également verticale, le pôle le plus bas B étant au centre de la bobine. La bobine employée ayant *l* = 15 *cm* de longueur, *r* = 4 *mm* de rayon et une seule couche de fil comprenant 375 spires, on constate qu'il faut déposer *m* = 2,16 d*g* sur le plateau qui porte l'aimant pour maintenir la balance dans sa position d'équilibre lorsque la bobine reçoit un courant d'intensité *i* = 176 milliampères. Calculer la masse magnétique des pôles de l'aimant que l'on supposera en coïncidence avec les centres des bases de AB.

c) L'aimant ayant été disposé verticalement de façon que son milieu O soit dans le plan du méridien magnétique et sur le prolongement de la ligne des pôles d'une courte aiguille

aimantée horizontale O′ orientée par le seul champ magnétique terrestre, et à la distance $d = OO' = 45$ cm de cette aiguille, on fait tourner AB autour de OO′ d'un angle θ.

Ecrire les équations qui déterminent la déviation correspondante β de l'aiguille dans le plan horizontal, selon que celle-ci (toujours dans le plan du méridien magnétique pour $\theta = 0$) est suspendue : 1° à un fil sans torsion ; 2° à un fil de torsion.

(*Ecole Nationale Supérieure des Mines*, 1927.)

---

38. On considère un circuit fermé de forme carrée de côté $2a$; il est parcouru par un courant i.

1° Quel est le champ au centre du circuit ?

2° Quel est le champ H au point situé à une distance z du centre sur la perpendiculaire au plan du circuit menée par le centre de ce circuit ? Calculer numériquement les valeurs de H pour $z = 0, 1, 2, 3, \ldots, 8$ cm, dans le cas où $i = 1$ ampère, $a = 4$ cm. Utiliser ces valeurs pour construire par points la courbe $H = f(z)$. Au moyen de cette courbe, déterminer graphiquement la distance z à laquelle le champ est réduit à la moitié de sa valeur au centre du circuit. L'échelle des z sera de 20 mm pour 1 cm ; l'échelle des H est laissée au choix du candidat.

3° Deux circuits carrés identiques sont parcourus par le même courant i et placés dans deux plans parallèles verticaux, leurs centres étant sur une même perpendiculaire à leurs plans ; la distance des deux plans est $4a$. Comment doivent circuler les deux courants pour que leurs actions s'ajoutent en tout point du segment de droite compris entre les deux centres ? Calculer numériquement le champ au milieu de l'intervalle des deux circuits dans le cas où $i = 1$ ampère, $a = 4$ cm.

4° Les plans des deux circuits sont parallèles au méridien magnétique, la composante horizontale du champ terrestre est 0,2 gauss. On suspend un aimant très court par un fil sans torsion de façon que l'aimant se trouve au point milieu ci-dessus. Quelle est la déviation de l'aimant quand on fait passer le courant dans les deux circuits ?

(*Ecole Centrale*, 1932.)

---

39. Les centres B et B′ des deux bobines d'un galvanomètre de Thomson sont distants de 10 cm. L'aimant directeur A supposé rectiligne et suffisamment court a un moment magnétique $\mathfrak{M} = 5\,000$ C. G. S.

1° On demande à quelle hauteur il faut placer cet aimant au-dessus du centre C du système pour compenser en ce point la composante horizontale du champ terrestre $\mathcal{H} = 0{,}2$ gauss ?

2° Ecrire l'équation d'équilibre de l'équipage dans ces conditions, sous l'influence d'un courant i, en supposant égales les constantes G des deux bobines et égaux entre eux les moments magnétiques des deux petits aimants placés en B et B′. Comparer la sensibilité de ce galvanomètre avec celle d'une boussole des tangentes ordinaire à une seule bobine.

3° Dire quelle direction prendrait l'équipage en l'absence du courant, si l'on faisait tourner l'aimant directeur de 60° dans un plan horizontal.

4° Ecrire l'équation d'équilibre en supposant inégaux les moments m et m' des deux aimants B et B′. Dans ces conditions, dire comment varie la sensibilité.

5° On supposera ensuite que les deux aimants B et B′ sont rendus parallèles et de même sens et que le sens de l'enroulement de l'une des bobines a été changé. Résoudre à nouveau dans ces conditions les questions 2°, 3° et 4°.

(*Sorbonne.*)

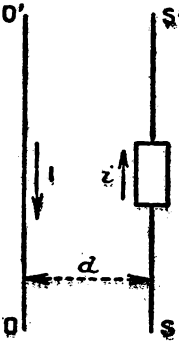
---

40. 1° L'aiguille d'une boussole, légèrement déplacée de sa position d'équilibre, puis abandonnée à elle-même, effectue 6 oscillations complètes en 30 secondes. Calculer son moment magnétique $\mathfrak{M}$ connaissant son moment d'inertie $K = 40$ C. G. S. et la composante horizontale du champ terrestre H = 0,2 gauss. On considère d'autre part un petit

cadre rectangulaire R, de dimensions 2 cm × 4 cm, formé de 50 spires. Quel courant i faut-il y faire passer pour que son moment magnétique soit le 1/20e de celui de l'aiguille aimantée ci-dessus?

2° On suspend ce cadre par un fil de torsion SS′ de manière que, en l'absence de torsion, le plan vertical dans lequel se trouve le cadre contienne un conducteur vertical OO, et soit en même temps *perpendiculaire* au plan du méridien magnétique. La distance d des deux axes OO′ et SS′ est égale à 1 m, et la composante horizontale du champ terrestre est dirigée sur la figure d'avant en arrière du plan OO′SS′. Le courant qui parcourt OO′ étant désigné par I, et celui qui parcourt le cadre par i, on mesure les durées d'une oscillation complète du cadre dans les trois cas suivants :

Fig. E.



$I = 0$, $i = 0$; $I = 0$, $i = 0{,}4$ ampère; $I = x$ ampères, $i = 0{,}4$ ampère. On trouve :

$t_1 = 6$ secondes; $t_2 = 5$ secondes; $t_3 = 5{,}6$ secondes.

Le sens des courants I et i étant indiqué par les flèches dans les trois cas, calculer le moment d'inertie K′ du cadre, le coefficient de torsion C du fil de suspension et l'intensité $I = x$.

3° On suppose maintenant le plan du méridien magnétique *parallèle* au plan de la figure. Le coefficient *de torsion* du fil SS′ étant égal à 1,8 C. G. S. et le courant i à 0,6 ampère, quel courant $I = y$ faut-il faire passer dans le conducteur OO′ pour que le cadre tourne de 90°? L'équilibre obtenu est-il stable ?

(*Ecole Polytechnique*, 1930.)

---

41. Un circuit circulaire réduit à un seul tour de fil de rayon R = 30 cm est suspendu à l'aide d'un bifilaire dont les bras parallèles ont une longueur $l = 1$ m et sont distants de $d = 4$ cm. Ces fils sont très légers et n'ont pas de réaction élastique de torsion appréciable. Le circuit pesant a une masse $m = 12$ g et est parcouru par un courant $i = 5$ ampères.

1° On demande de calculer la durée T des petites oscillations doubles de l'équipage, sachant que la composante H du champ magnétique terrestre vaut 0,2 C. G. S. et que le cadre est placé perpendiculairement au méridien magnétique.

2° Qu'arrivera-t-il si l'un des fils suspenseurs vient à se casser ?

3° On supposera qu'on a oublié la formule qu'on vient d'appliquer. On se rappelle seulement qu'elle comporte le facteur 2π. On demande de démontrer cette formule par des considérations d'homogénéité en admettant que l'action d'un champ uniforme sur un circuit plan est proportionnelle à la surface d'un circuit.

(*Sorbonne.*)

---

42. La bobine fixe d'un électrodynamomètre de Pellat a une longueur $2l = 60$ cm. Elle porte $n = 300$ tours de fil dont le rayon moyen est $r = 10$ cm. La bobine mobile porte $N = 40$ tours dont chacun embrasse une aire moyenne $S = 150$ cm². Le bras de levier de la balance est $l = 15$ cm.

1° Quel poids p faut-il mettre pour équilibrer l'action qui dépose 671 mg d'argent en 20 minutes ?

2° Quelle est l'approximation de la mesure du courant si les pesées sont faites à 1/10 de milligramme près ?

3° Quel est le coefficient de température de l'appareil si toutes les parties sont à la même température ? Les bobines sont enroulées sur des cylindres de laiton dont le coefficient de dilatation linéaire est $\lambda = 19 \times 10^{-6}$; le coefficient de dilatation du fil de cuivre est $\lambda' = 17 \times 10^{-6}$.

4° Qu'arriverait-il si la température des deux bobines surpassait de 10° celle du fléau ?

(*Sorbonne.*)

---

43. On donne :

a) Une bobine comprenant un nombre entier de spires jointives collées entre elles par l'extérieur, distribuées en une couche unique formant un cylindre creux de diamètre $D = 1{,}5$ cm et de longueur $L = 10$ cm. Le pas d'enroulement est presque exactement $h = 0{,}3$ mm.

b) Une aiguille aimantée, extrêmement courte, est suspendue par un fil de cocon de manière qu'elle puisse s'orienter librement dans un plan horizontal. Un petit miroir plan vertical fixé sur la monture de l'aiguille, devant et près duquel est placée une large lentille convergente, de distance focale $F = 3$ m, sert à relever les rotations de l'aiguille : la fente objet et la règle divisée sont disposées au mieux dans le plan focal de la lentille.

c) Un équipage formé d'un fil de diamètre $d = 2$ mm disposé suivant un anneau circulaire fermé de diamètre moyen $D' = 6{,}5$ cm, masse $m = 13$ g, résistivité $\rho = 8{,}9$ microhms-centimètres, suspendu par un fil métallique à un micromètre de torsion, de manière que son plan soit vertical et qu'un courant, d'intensité totale I, puisse entrer et sortir aux extrémités du diamètre vertical sans gêner le mouvement. Durée d'oscillation de l'équipage : $T = 36$ secondes pour $I = 0$.

1° On demande quel devrait être le pôle μ d'un aimant, de distance polaire $L = 10$ cm pour qu'un champ magnétique uniforme lui applique le même couple qu'à la bobine orientée comme l'aimant, et parcourue par le courant I.

2° La bobine agissant sur l'extérieur par les pôles $+\mu$, $-\mu$, on demande de déterminer la composante horizontale H du champ magnétique terrestre, sachant que la bobine, excitée par un courant d'intensité $I = 3$ ampères, disposée dans la position de Gauss la plus avantageuse, à la distance $l = 35$ cm de l'aiguille aimantée, produit un déplacement du spot $\Delta = 26{,}7$ cm.

3° La bobine, en série avec l'équipage, est installée de façon que son axe coïncide avec l'axe de révolution de l'équipage et son pôle $+\mu$ avec le centre. Établir la formule qui donne l'intensité I du courant sachant que pour maintenir l'équilibre dans sa position initiale, il faut tourner le micromètre d'un angle de 5 degrés.

En ce qui concerne l'équipage, calculer la différence de potentiel V entre les points d'entrée et de sortie du courant.

4° Quelle légère modification faut-il apporter à l'anneau et à la manière dont le courant circule pour que l'aimant exerce sur l'anneau au lieu d'un couple, un effort de translation dont on donnera l'expression. Comment disposer l'appareil pour peser commodément cette action ?

Note. — Avant tout calcul, vérifier l'homogénéité des expressions littérales établies d'abord. En ce qui concerne les actions électromagnétiques et l'inertie, on supposera le courant et la matière localisés sur la circonférence moyenne de l'anneau.

(*Ecole Nationale Supérieure des Mines*, 1935.)

---

44. 1° Sachant qu'une bobine traversée par un courant se comporte dans un champ magnétique comme un aimant, calculer en fonction du courant mesuré en ampères l'expression du moment magnétique d'une bobine plate B_1 comprenant 200 spires circulaires de 4 cm de diamètre moyen.

2° On considère d'autre part une bobine B_2, cylindrique, de 50 cm de longueur, régulièrement bobinée et comprenant 500 spires de 8 cm de diamètre. Déterminer le champ au centre de cette bobine en fonction du courant qui la traverse, mesuré en ampères. Quelle erreur relative commettrait-on en supposant la bobine infiniment longue ? Comment varie le champ le long de l'axe quand on s'écarte légèrement du centre ? Quelle est la variation relative à 2 cm du centre ?

3° La bobine B_1 dont l'axe est vertical est placée au centre de la bobine B_2 dont l'axe est horizontal. La bobine B_1 est fixée rigidement à l'extrémité d'un fléau de la balance. A l'autre extrémité est suspendu un plateau qui repose sur un couteau à 16 cm de l'axe de rotation du fléau son propre poids assure l'équilibre en l'absence de tout courant. On fait passer dans les deux bobines connectées en série un courant d'intensité i. Pour maintenir

l'équilibre, on est obligé de mettre dans le plateau de la balance des masses marquées de masse totale m.

a) Déterminer d'abord l'expression du couple qui s'exerce sur la bobine B_1, en supposant que le champ soit uniforme dans toute la région occupée par B_1 et égal au champ au centre de la bobine.

b) Etablir ensuite la relation existant entre le courant i exprimé en ampères et la masse m exprimée en grammes. $g = 980$ C. G. S.

c) Donner la valeur de m relative à un courant de 1 ampère.

d) En supposant la balance sensible au dixième de milligramme, déterminer le courant minimum que l'on peut ainsi évaluer et, d'autre part, l'approximation relative avec laquelle on peut mesurer, par une pesée, un courant quelconque. Application numérique au cas d'un courant de 1 ampère.

4° Dans l'expérience précédente, on n'a pas tenu compte du champ magnétique terrestre. Quelle orientation a-t-il fallu donner au dispositif pour que ce fût légitime ?

a) Corriger l'expression générale reliant i et m en supposant, au contraire, que le système tout entier ait tourné de $\frac{\pi}{2}$ à partir de la position précédente, et en prenant la composante horizontale du champ magnétique terrestre égale à 0,2 C. G. S. Quelle est la valeur de la correction pour $i = 1$ ampère ?

b) Quelle est l'influence du sens de l'orientation et celle du sens du courant ?

Tracer les courbes qui relient i et m dans les divers cas.

c) Y a-t-il là un moyen de mesurer la composante horizontale du champ magnétique terrestre ? De quelle façon faudrait-il s'y prendre ?

5° Dans une nouvelle expérience, la bobine B_2 a son axe horizontal et dans le plan du méridien magnétique. La bobine B_1 est encore placée au centre de B_2, mais elle a maintenant ses spires verticales. Elle est suspendue à un fil, supposé sans torsion et de masse négligeable, qui passe entre les deux spires médianes de B_2 et qui est fixé en un point O à son extrémité supérieure.

a) Quelle est la position d'équilibre de B_1 lorsque les deux bobines sont parcourues par un même courant, et en supposant que le champ magnétique terrestre soit compensé dans tout l'espace où se meut B_1 ?

b) Quelle est la période des oscillations libres infiniment petites de B_1 autour d'un axe vertical passant par O lorsque le courant i, qui passe dans les deux bobines, est de 1/10 d'ampère ? On supposera, pour ce calcul, que la bobine B_1 est en fil de cuivre de 5/10 de millimètre de diamètre et de densité 8,9, que la masse de l'isolant est négligeable et que toutes les spires sont à une distance négligeable de la spire moyenne.

c) Pour quelle intensité du courant i la période sera-telle égale à 1 seconde ?

d) Que deviendrait la période pour ce même courant, si l'on cessait de compenser le champ terrestre ?

6° On suppose enfin que le fil de suspension est un fil de torsion de constante C = 3200 C. G. S. En l'absence de courant, on suppose que l'axe de la bobine B_1 est, dans sa position d'équilibre, perpendiculaire à celui de la bobine B_2.

Le champ terrestre étant compensé, on demande d'établir la relation qui relie l'angle de déviation de B_1 à partir de sa position d'équilibre avec la valeur du courant i commun aux deux bobines. Donner cette déviation pour $i = 0{,}2$ ampère.

(*Ecole Normale Supérieure*, 1932.)

---

45. 1° Calcul de l'intensité du champ magnétique au centre d'une bobine longue.

2° Un petit barreau aimanté SN, mobile autour d'un fil vertical sans torsion, est orienté par la composante horizontale du champ magnétique terrestre, dont la valeur est 0,2 gauss.

On installe autour de ce barreau une longue bobine dont le barreau est le centre, l'axe de la bobine étant horizontal et perpendiculaire à l'axe magnétique SN. On fait passer dans la bobine un courant de 1/1000 d'ampère. Sachant que le nombre de tours de fil

autour de la bobine entre deux sections écartées de 1 cm. est 8, déterminer la valeur de l'angle dont le barreau dévie.

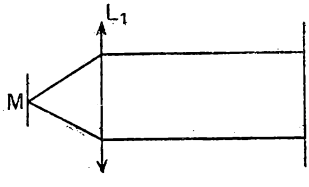
3° Le barreau porte un miroir concave dont l'axe optique est horizontal. Les faisceaux incident et réfléchi étant normaux à l'échelle placée à 1 mètre sur laquelle se forme le spot quand le courant est nul, calculer le déplacement de ce spot sous l'influence du courant.

4° On fait tourner la bobine de sorte que le plan vertical des spires devienne parallèle à la nouvelle position que prendra l'axe du barreau. Calculer l'angle dont le barreau se trouvera ainsi dévié à partir de sa position primitive.

(*École Centrale*, B, 1924.)

V. — PROBLÈMES DONNÉS AUX RÉCENTS CONCOURS

46. — Un galvanomètre à aimant mobile est constitué par une très petite aiguille aimantée horizontale suspendue par un fil sans torsion au centre d'une bobine plate B. Celle-ci est réalisée avec un fil de cuivre de diamètre $d = 0{,}30$ millimètre et de résistivité $\rho = 1{,}6$ microhms-centimètres ; elle comprend 100 spires de diamètre moyen $a = 80$ mm ; le plan des spires coïncide avec le méridien magnétique.



Pour observer la déviation de l'aiguille, on utilise le dispositif ci-contre. La lumière, issue d'une source S_1, traverse une lentille fixe L_1 de distance focale $f_1 = 1000$ mm ; elle se réfléchit sur un miroir M solidaire de l'aiguille et retraverse L_1 ; une image de la source se fait en S'_1 sur une réglette R horizontale. La source et la réglette sont dans le plan focal de la lentille.

I. — On fait passer un courant de 100 microampères dans la bobine B. Calculer la déviation de l'aiguille et le déplacement correspondant du spot sur la réglette. La composante horizontale du champ magnétique terrestre vaut $H = 0{,}20$ gauss.

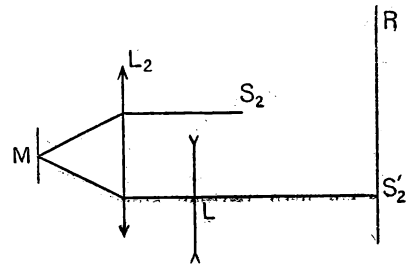
II. — Pour augmenter la sensibilité, on place l'ensemble bobine-aiguille au centre d'un solénoïde Σ convenablement orienté, comprenant 100 spires par centimètre et donnant, quand il est parcouru par un courant, un champ de direction opposée à la composante horizontale du champ terrestre.

1. Le solénoïde est supposé de longueur infinie, calculer l'intensité i du courant nécessaire pour compenser exactement le champ terrestre.

2. En réalité, le solénoïde est constitué par 5 000 spires, de diamètre moyen $b = 10$ centimètres, réparties également sur 50 cm de longueur et faites avec du fil identique à celui de la bobine B.

a) Calculer la puissance P dépensée dans le solénoïde quand celui-ci est parcouru par un courant dont l'intensité i a la valeur i précédemment calculée.

b) Avec du fil de cuivre de diamètre d' différent du diamètre du fil constituant Σ, on réalise un autre solénoïde ayant même longueur, même diamètre moyen et contenant le même volume de métal que Σ. Montrer que la puissance nécessaire pour produire aux centres des deux solénoïdes des champs magnétiques égaux est indépendante du diamètre du fil employé.



c) Avec quelle approximation est-il permis d'assimiler le solénoïde réel de 50 cm de longueur, à un solénoïde de longueur infinie ?

III. — Pour une même rotation du miroir L, on veut tripler les déplacements du spot sur la réglette R qui doit rester à distance constante de M. A cette fin, on met, au lieu et place de la lentille L_1, une lentille convergente L_2 de distance focale $f_2 = 500$ mm et

on place une source lumineuse en S_2 dans le plan focal de L_2. D'autre part, on dispose sur le chemin de retour des rayons, une lentille divergente L de distance focale F, à la distance D de L_2 (voir figure).

Calculer F et D de façon que l'image S'_2 de la source se fasse sur la réglette R (on suppose les rayons lumineux toujours très peu inclinés sur l'axe du système).

On saura gré aux candidats qui indiqueront dans quelles conditions ce procédé augmente vraiment la précision des mesures.

Nota. — Les 3 parties sont indépendantes.

(*École Polytechnique*, 1942.)

---

47. — I. — Une bobine cylindrique longue B est constituée par un enroulement de fil de cuivre entouré d'une gaine isolante d'épaisseur négligeable ; le diamètre de ce fil est d. Les spires sont jointives et forment une seule couche sur une longueur L ; le diamètre des spires est D.

Une seconde bobine cylindrique B', plate, est constituée par N spires circulaires de fil de cuivre de même résistivité que le précédent et de diamètre d'.

1° Quelle doit être la surface moyenne des spires de B' pour que les deux bobines B et B' aient la même résistance ?

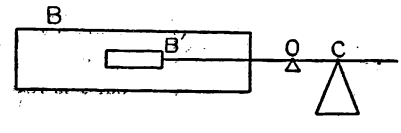
Application numérique : $d = 1$ mm ; $d' = 0{,}5$ mm ; L = 60 cm ; D = 8 cm ; N = 200.

2° La bobine B' satisfaisant à la condition ci-dessus, et dont l'axe est vertical, est placée au centre de la bobine B dont l'axe est horizontal. Les deux bobines sont en série et parcourures par un courant d'intensité I.

Calculer l'intensité du champ magnétique au centre de B. Quelle erreur relative commettrait-on en supposant la bobine B infiniment longue ? Dans ce qui suit, on fera cette hypothèse et on supposera le champ uniforme dans toute la région occupée par B'. Calculer le champ pour I = 1 ampère.

La bobine B', placée dans le champ magnétique de B, se comporte comme un aimant. Calculer son moment magnétique. Montrer que le système de forces électromagnétiques qui s'exercent sur B' se réduit à un couple. Exprimer le moment de ce couple ; calculer sa valeur numérique pour I = 1 ampère.

3° La bobine B' est fixée à l'une des extrémités du fléau d'une balance, mobile autour d'un couteau O. Un plateau est suspendu à l'autre extrémité C ; on pose OC = Δ. On réalise l'équilibre en l'absence de tout courant ; on fait ensuite passer un même courant d'intensité I dans les bobines B et B' et on constate qu'il faut, pour rétablir l'équilibre, ajouter une masse m dans le plateau. Faire une figure indiquant clairement le sens dans lequel doit passer le courant dans les bobines. Etablir la relation entre I et m.

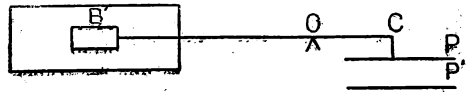


Calculer m pour I = 1 ampère ; Δ = 15 cm ; $g = 981$ C. G. S.

II. — On constitue d'autre part un condensateur par une plaque métallique circulaire horizontale P, de surface S, en face de laquelle on dispose à une distance e une plaque identique fixe P' ; on évaluera sa capacité. On établit entre P et P' une différence de potentiel V (en unités électrostatiques C. G. S.) ; calculer le champ, supposé uniforme, la charge de chaque armature et la force exercée par P' sur P.

Application numérique. — V = 10, S = 200 cm², $e = 1$ cm.

III. — On remplace le plateau fixe en C dans le système défini précédemment par la plaque métallique P ; on réunit électriquement les deux plaques P et P' aux extrémités d'une résistance étalonnée R, intercalée en série dans le circuit des deux bobines B et B'. On réalise l'équilibre en l'absence de tout courant, on fait



ensuite passer un certain courant dans R, B et B' et on règle la distance des plaques P et P'; pour que l'équilibre soit rétabli ; soit e_0 la valeur trouvée.

Calculer la valeur en ohms de la résistance R, sachant que $e_0 = 2$ mm ; $\Delta = 15$ cm.

(*Ecole des Ponts et Chaussées*, 1942.)

---

48. — 1° On considère un fil horizontal pratiquement indéfini, perpendiculaire au plan du méridien magnétique, et parcouru par un courant I = 100 A. Trouver le lieu des points de l'espace où le champ que crée ce courant annule par compensation la composante horizontale $\vec{h} = 0{,}2$ gauss du champ magnétique terrestre.

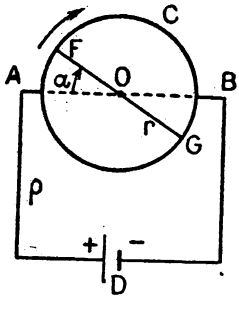
2° Soit un plan horizontal rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires $x'ox$, $y'oy$; ox est parallèle au champ h ci-dessus défini. Un courant I' suit l'axe $z'oz$ normal au plan xoy et crée un champ H. Montrer qu'en tout point de ox la composante horizontale du champ magnétique résultant des champs H et h passe par un point fixe.

3° Dans ce même plan xoy peut glisser sans frottement un barreau aimanté AB de moment magnétique M = 3000 u. e. m. c.g. s., et de longueur $l = 10$ cm ; ses pôles A (de masse magnétique $+ m$) et B (de masse magnétique $- m$) coïncident pratiquement avec ses extrémités. Quel travail W faut-il dépenser contre le champ magnétique dû au courant I', supposé de 100 A, pour amener d'un point quelconque très éloigné le barreau AB dans une position finale où A est sur ox et B sur oy ?

(*Ecole Centrale*, 1942, *Problème* 1.)

---

49. — On considère une paroi cylindrique circulaire mince, électriquement isolante, comprise entre deux plans de section droite, et se projetant sur un de ces deux plans suivant une circonférence C. Sur cette paroi comme support, on enroule régulièrement, en le disposant parallèlement aux génératrices du cylindre, un long fil, de résistance totale 2R, qui occupe uniformément toute la surface cylindrique. En deux points A, B diamétralement opposés sur la circonférence C, cet enroulement est relié aux bornes d'une batterie D, dont la f. é. m. est E, et la résistance intérieure négligeable. On désigne par ρ la résistance de la portion de circuit ADB. Un conducteur diamétral FG, qui constitue un contact tournant et possède une résistance r, relie deux points diamétralement opposés sur la circonférence C. En désignant par x la résistance variable AF, calculer l'intensité du courant i recueilli dans le conducteur FG.



Représenter la variation du courant i pour E = 100 volts R = 40 ohms, ρ = 2 ohms, $r = 4$ ohms.

Echelles du graphique : pour les abscisses, 40 mm doivent correspondre à un angle de rotation de 90° ; pour les ordonnées, on prendra 2,5 mm par ampère.

(*Ecole Centrale*, 1942, *Problème* 2.)

---

50. Un galvanomètre différentiel est constitué par un galvanomètre à cadre mobile portant deux enroulements identiques A et B bobinés en sens inverses l'un de l'autre (voir figure). On supposera que l'action exercée sur le cadre mobile par un même courant passant dans A ou dans B est la même dans les deux cas.

En utilisant cet appareil dans le montage de la figure, on se propose de mesurer la capacité C. La source de force électromotrice E est de résistance négligeable ; le potentiomètre PM a une résistance totale R ; le contact mobile N permet de prendre une résistance r entre P et N ; la lame vibrante S permet de charger et décharger la capacité f fois par seconde. On admettra que l'effet sur le cadre mobile du courant discontinu qui traverse B est le même que celui d'un courant continu de même valeur moyenne.

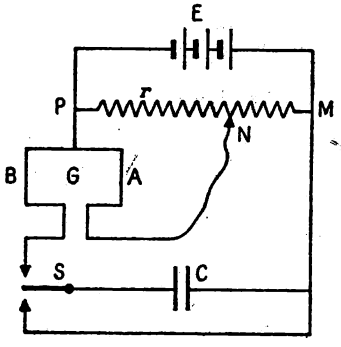
1° Sachant que le galvanomètre est au zéro pour une fréquence f des vibrations de S et pour une position déterminée de N, calculer la capacité C.

On supposera d'abord la résistance r négligeable vis-à-vis de la résistance g de l'enroulement A. On reprendra ensuite le calcul sans faire cette hypothèse ; on en déduira l'erreur relative qu'elle entraîne sur C.

Application numérique:

$f = 70$; $g = 1130$ ohms ; $R = 191$ ohms ; $r = 5$ ohms.

2° La capacité C est constituée par 75 condensateurs identiques groupés en parallèle ; chacun d'eux est constitué par un tube cylindrique de verre argenté sur ses deux faces, de longueur $l = 1$ mètre, diamètre intérieur de 13 mm, diamètre extérieur $D = 14$ mm ; le pouvoir inducteur spécifique du verre est $\varepsilon = 6$.



Calculer C à partir de ces données. En comparant au résultat du (1°), donner une valeur approchée du rapport γ entre le farad et l'unité électrostatique GGS de capacité.

3° On charge une capacité C en établissant entre ses armatures une différence de potentiel V_0 ; on la décharge ensuite à travers une résistance sans self x. Comment la différence de potentiel V aux bornes de la capacité varie-t-elle en fonction du temps t ? Au bout de combien de temps V devient-il égal au $\frac{V_0}{e}$, e étant la base des logarithmes népériens ?

Application numérique :

C'est la capacité du (2°) ; $x = 20$ mégohms.

4° On utilise l'expérience précédente pour la détermination d'une résistance élevée x ; on mesure à cet effet la différence de potentiel initiale V_0 et la différence de potentiel V_1 au bout d'une décharge de durée t. Comment doit-on choisir le rapport $\lambda = \frac{V_0}{V_1}$ pour obtenir sur x la précision maxima ?

On supposera que les erreurs absolues commises sur V_0 et sur V_1 sont toutes deux inférieures à une même quantité v.

On supposera d'abord que l'influence de l'erreur commise sur t est négligeable ; on donnera dans ce cas une valeur approchée à 0,1 près de la meilleure valeur de λ.

On examinera ensuite comment le résultat précédent est modifié quand on tient compte de l'erreur commise sur t.

Dans les deux cas, la valeur de C est supposée connue exactement.

On donne $\log_{10} e = 0{,}43429$.

(*École Polytechnique*, 1943.)

---

51. Deux plateaux métalliques verticaux égaux, circulaires, de rayon R, sont reliés par une tige métallique horizontale rigide, suspendue à deux fils verticaux de longueur l ; la masse de l'ensemble plateaux-tige est M, les fils sont de masse négligeable ; la tige coïncide avec l'axe commun des deux plateaux. Le pendule étant en équilibre, on place deux plateaux métalliques verticaux fixes, de rayon plus grand que R, parallèles aux plateaux mobiles et à une même distance d de ces plateaux mobiles.

Dans tout le problème, on négligera l'influence des bords des plateaux, on prendra $\pi = 10$, et on appellera x le déplacement du centre de gravité du pendule.

Première partie.

1° Les quatre plateaux étant au sol, quelle est la période T_0 des oscillations de petite amplitude du pendule, la tige restant toujours parallèle à elle-même, les fils se déplaçant dans deux plans parallèles ? On prendra, dans tout ce qui suit, $T_0 = 2$ secondes.

2° Le système mobile restant au sol, et la distance d ayant une valeur d_0, les plateaux fixes sont portés au même potentiel V. Quelles sont les positions d'équilibre du pendule ? Etudier leur stabilité. A quelle condition doit satisfaire V pour qu'il y ait une position d'équilibre stable.

On désignera par V_0 la valeur limite trouvée pour le potentiel et on la calculera numériquement en volts, pour M = 129,6 g, d_0 = 2 cm, R = 8 cm. Que se produirait-il si la condition trouvée n'était pas réalisée ?

3° Le pendule oscille autour de la position d'équilibre stable, les fils de suspension restant dans leur plan commun d'équilibre, l'amplitude des oscillations étant très petite devant d_0. Quelle est la période T des oscillations ? L'exprimer en fonction de T_0, V_0, V.

On veut que T = 6 secondes, quelle doit être la valeur de V, en volts ? Si l'on veut maintenir cette période constante à 1 % près, quelles peuvent être les variations possibles de V ?

4° La distance d n'étant plus égale à d_0, et la condition de stabilité de l'équilibre étant satisfaite, exprimer la relation entre $\frac{T}{T_0}$, $\frac{V}{V_0}$ et $\frac{d}{d_0}$, T étant la période des oscillations définies au paragraphe 3.

5° On veut que le système mobile oscille, toujours dans le même plan, avec une amplitude a ; à quelle condition doit satisfaire d, pour une valeur donnée de V ? On admettra ensuite que la relation entre V, d, T trouvée au paragraphe 4 est toujours valable : a et T étant donnés, à quelle condition doit satisfaire d ? Comment s'exprime cette condition si l'on peut négliger T_0^6/T^6 devant l'unité ? Quelle condition en résulte-t-il pour V ? Calculer numériquement les valeurs limites de d et V pour :

a = 1 cm T = 6 secondes
R = 8 cm M = 129,6 g.

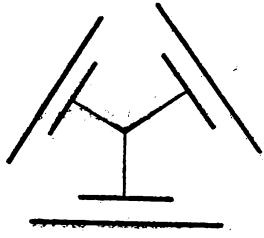


FIG. 1

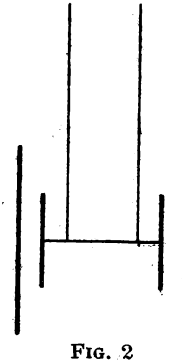


FIG. 2

6° On suppose maintenant que, avant la mise sous tension des plateaux fixes, le système mobile étant en équilibre, la distance plateau fixe-plateau mobile de droite est $d' = d_0 + b$, la distance des deux plateaux de gauche est $d'' = d_0 - b$, b étant petit par rapport à d_0. Les plateaux fixes sont portés au potentiel V déterminé au paragraphe 3, le système mobile oscille comme il est indiqué dans ce paragraphe ; faisant les approximations légitimes, que l'on précisera, on calculera la différence relative $\frac{T' - T}{T}$, en appelant T' la nouvelle période des petites oscillations, et on déterminera la position d'équilibre du système mobile. Application : b = 0,25 mm.

Deuxième partie.

Le pendule est isolé du sol. L'un des plateaux fixes est mis au sol, l'autre porté au potentiel V. Calculer la période des oscillations de faible amplitude du pendule, et montrer qu'elle ne dépend pas de l'azimut des deux plans verticaux parallèles dans lesquels se déplacent les fils de suspension.

Troisième partie.

Trois disques circulaires égaux, de rayon R, sont fixés à trois tiges horizontales égales soudées en un même point O et faisant entre elles trois angles de 120° ; les tiges coïncident avec les axes des disques. Le système est suspendu à trois fils verticaux de même longueur, fixés aux trois tiges à la même distance du centre O ; l'ensemble, conducteur, est mis au sol. Trois plateaux fixes, de grandes dimensions, parallèles aux disques, sont situés à la même distance d_0 de ces disques et sont portés au même potentiel V. On considère les

oscillations pendulaires du système, les trois fils de suspension oscillant dans trois plans verticaux parallèles, l'amplitude étant petite devant d_0. Montrer que la période de ces petites oscillations est indépendante de leur azimut.

On admettra encore que T_0, période des oscillations pour $V = 0$, est égale à 2 secondes, que la masse totale du système mobile est $M = 129{,}6$ g ; $R = 8$ cm $d_0 = 2$ cm.

Calculer V en volts pour que $T = 6$ secondes.

L'unité de différence de potentiel U E S C G S égale 300 volts.

(*École Normale Supérieure*, 1944.)

---

52. 1° Un courant électrique d'intensité I parcourt un fil cylindrique homogène de section S. Montrer que la puissance P dissipée dans ce fil par effet Joule peut s'exprimer par la formule $P = km\,G^2$ dans laquelle m désigne la masse du conducteur et $G = \frac{I}{S}$ la densité de courant. k est un coefficient qui dépend de la nature du conducteur et des unités.

Calculer k pour un conducteur en fer de résistivité 25 $\mu\Omega \times$ cm et de masse spécifique 7,7 g/cm³ lorsqu'on évalue P en watts, m en kg et G en A/mm².

2° On admet qu'un fil, dont la température dépasse de θ° celle du milieu ambiant, perd par rayonnement et conductibilité une puissance

$$Q = h\,\theta\,\Sigma$$

Σ étant la surface latérale du fil et h un coefficient égal à 5 mW/cm²/degré.

En supposant la température ambiante égale à 15° C, donner en A/mm² les densités de courant nécessaires pour maintenir un fil de fer cylindrique de 1 mm de diamètre respectivement aux températures :

$T_1 = 100$°C $\qquad T_2 = 200$° C $\qquad T_3 = 250$ C

3° Les hypothèses précédentes restant valables, on demande comment varie en fonction du temps t, la température centésimale T d'un fil de fer de 1 mm de diamètre et de 100 m de long, aux extrémités duquel on applique à l'instant $t = 0$ une différence de potentiel égale à 240 volts. La température initiale du fil est égale à celle du milieu ambiant, soit 15° C.

Au bout de combien de temps le fil a-t-il atteint une température inférieure de 5° à sa température limite.

Chaleur spécifique du fer : 0,11 cal/g.

4° On se propose de dissiper par effet Joule une puisance P_1 de 100 kW produite sous une tension de 500 volts. On utilise dans ce but un grillage de fil de fer à mailles carrées, livré en une longue bande rectangulaire de 50 cm de largeur. Les côtés de la bande sont constitués par des fils rectilignes, les diagonales des mailles sont parallèles à ces côtés et ont 5 cm de longueur. Le diamètre du fil est uniformément égal à 1,5 mm.

a) Calculer la résistance d'une bande de grillage de 100 m de longueur.

b) On prend une longueur de grillage suffisante pour absorber la puissance P_1. Calculer, en supposant la température ambiante égale à 15° C. et en admettant que les hypothèses du 2° restent valables, la température prise par le grillage en régime permanent.

5° On a supposé dans tout ce qui précède que la résistivité du fer est invariable, mais en réalité elle dépend de la température. On admettra maintenant que

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{T}{300}\right)$$

avec $\rho_0 = 18\ \mu\Omega \times$ cm.

a) Reprendre dans cette hypothèse le 2° et expliquer les résultats.

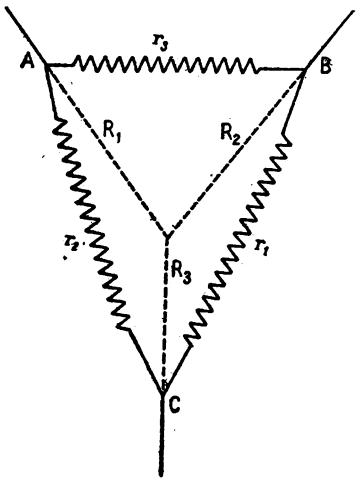
b) Reprendre aussi dans cette hypothèse le 3°. Il sera inutile de pousser les calculs jusqu'au bout, mais on indiquera l'allure du résultat.

Nota : Les résultats seront donnés avec une précision de 2 %.

(*École Polytechnique* 1944.)

---

53. 1° **Un câble cylindrique est constitué par deux armatures coaxiales de rayons R_1 = 1 cm et R_2 = 2 cm séparées par un diélectrique légèrement conducteur de résistivité ρ = 10^{10} ohm × cm. Calculer le courant de déperdition latérale I_1 de 1 km câble par kilovolt de différence de potentiel appliquée aux armatures.**



N. B.— On donne : log nep 2 = 0,693.

2° Montrer que dans un réseau maillé de Kirchhoff on peut, sans rien changer au régime des courants, remplacer un triangle de résistances r_1 r_2 r_3 de sommets A B C par une étoile de résistances R_1 R_2 R_3 que l'on demande de calculer en fonction de r_1, r_2, r_3.

Inversement, étant donné l'étoile de résistances R_1 R_2 R_3, calculer en fonction de R_1 R_2 R_3 les résistances r_1 r_2 r_3 du triangle par lequel on peut remplacer l'étoile :

On pourra faire le calcul en fonction des conductances ($G = 1/R$, $g = 1/r$).

(*Ecole Centrale*, 1945. *Problème II.*)

---

54. 1° En deux points A et B de l'espace sont disposées les charges électriques suivantes : une charge q positive au point A et une charge négative $-\lambda q$ au point B. On désignera par d la distance AB et λ est un nombre positif compris entre 0 et 1, soit $0 < \lambda < 1$. Un point M de l'espace étant défini par MA = r et MB = r', évaluer le potentiel en M. Montrer que la surface équipotentielle de potentiel nul est une sphère (S) que l'on déterminera par son centre O et son rayon R ; pour cela on calculera $a = \overline{AO}$ et R en fonction de λ et d.

2° Déterminer en fonction de q, d, r, λ le champ $\vec{H}$ (intensité, direction et sens) créé par les charges précédentes un point M de la sphère (S) défini par MA = r. Déterminer aussi l'intensité de ce champ en fonction de q, a, R, r.

3° On métallise la sphère (S) et on la porte au potentiel zéro en supprimant la charge portée par B. Déduire des calculs précédents la densité électrique superficielle σ en un point M défini par MA = r ; la densité σ sera exprimée uniquement en fonction des paramètres a, q, R, r. Quelle est la charge totale q_1 créée sur la sphère (S) par l'influence de la charge (q) placée en A ? Comparer q et q_1.

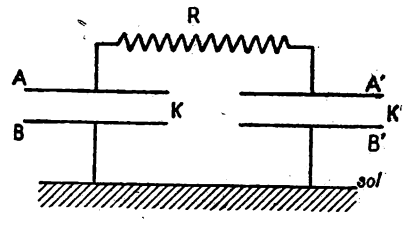
4° Calculer dans les mêmes conditions et en fonction de a, q, R, l'action de la sphère (S) sur la charge q placée en A, et l'action de la charge q placée en A sur la sphère (S).

5° La sphère (S) coupe le segment AB en un point P_1. Calculer $AP_1 = l$. On suppose que P_1 et A restant fixes le point O s'éloigne indéfiniment sur la droite AB.

(*Ecole des Mines de Paris*, 1945. *Problème II.*).

---

55. 1° **Dans un condensateur plan, la surface utile de chaque armature est S = 200 cm²** es armatures sont séparées par une couche d'air d'épaisseur e = 4 mm. A quel potentiel V (volts) faut-il porter l'armature A pour qu'elle prenne une charge Q = 1 micro-coulomb, l'autre armature B étant au sol ? Que seront alors le champ électrique H entre les armatures, la pression électrostatique p et l'énergie W du condensateur ?



2° Quelle valeur C_1 prendrait la capacité si 'on introduisait entre ses armatures et parallèlement à elles une lame de verre d'épaisseur e_1 = 3 mm et de pouvoir inducteur spécifique k = 6 ? (On pourra raisonner comme es faces de cette lame étaient métallisées et non sur tranche.

3° **On enlève la lame de verre**, le condensateur restant chargé de Q. Un autre condensateur plan à air K' de surface utile S' = S et d'épaisseur $e' = \frac{e}{2}$ a l'une de ses armatures au potentiel V' = 3 V, l'autre armature B' étant au sol. On réunit métalliquement A et A'. Calculer leurs nouvelles charges finales Q_1 et Q'_1

4° La liaison entre A et A' est établie à l'aide d'un conducteur de résistance R = 10.000 Ω. Déterminer la valeur initiale I_0 du courant dans le conducteur et sa variation en fonction du temps. Calculer l'énergie ΔW transformée en chaleur dans le conducteur.

5° Les condensateurs étant reliés comme au 3°, calculer le travail nécessaire pour écarter B' de A' jusqu'à rendre l'épaisseur e' égale à e.

(*Ecole Navale*, 1945.)

---

56. Un cadre rectangulaire de fil de cuivre ABCD a ses côtés AB = CD = a horizontaux et ses côtés BC = DA = $3a$ verticaux; il peut tomber verticalement dans un champ magnétique uniforme horizontal H = 10.000 gauss. Le côté AB est dans le champ et le côté CD reste extérieur au champ. Soit φ le flux magnétique évalué en Maxwell qui traverse le cadre à l'instant t ; on admettra que le cadre est à tout instant le siège d'une *f. é. m.* e volt $= 10^{-8} \frac{d\varphi}{dt}$ et de sens tel que le courant i qui en résulte s'oppose à la chute du cadre.

1° Représenter le cadre, H, i, les résultantes p des forces de pesanteur et f des forces électromagnétiques appliquées au cadre. Montrer que le cadre admet une vitesse limite de chute u. Calculer u connaissant la résistivité $\rho = 1{,}6 \times 10^{-6}$ ohm × cm du cuivre. Masse spécifique du cuivre $\mu = 8{,}9$.

2° Calculer la vitesse de chute v en fonction de t. Au bout de combien de temps la vitesse limite est-elle atteinte à 1 % près ? Représenter graphiquement v quand le cadre est abandonné sans vitesse initiale, et sort brusquement et totalement du champ au bout de 0,2 *s*.

(*Ecole Centrale*, 1946.)

---

57. 1re *Partie.* Les armatures d'un condensateur plan c sont séparées par un diélectrique d'épaisseur e = 0,5 mm et de pouvoir inducteur spécifique k = 8.

1° Quelle est la surface s des armatures du condensateur c, sachant que sa capacité est C = 0,5 microfarad ?

2° Ce condensateur est chargé sous une différence de potentiel V = 10 volts ; quelles sont : sa charge Q, son énergie W et la force F avec laquelle ses armatures s'attirent ?

3° Le condensateur c est à nouveau chargé sous 10 volts puis, par un dispositif convenable qui maintient les armatures isolées à la distance invariable e = 0,5 *mm*, on réduit de moitié la surface de ces armatures. Reçoit-on du travail ou en fournit-on au cours de cette dernière opération ? Evaluer ce travail T.

2e *Partie.* On dispose d'un galvanomètre balistique, c'est-à-dire d'un galvanomètre dont l'élongation maxima α, mesurée par le déplacement d'un spot sur une échelle graduée est proportionnelle à la quantité d'électricité qui le traverse. On admettra que cette proportionnalité est rigoureuse et que l'erreur absolue de lecture dα dans la position du spot est toujours la même quel que soit α. La plus grande déviation possible du spot sur l'échelle est : $\alpha_0 = 20$ *cm*.

On dispose également d'une boîte B de condensateurs parfaitement étalonnés, d'une résistance R = 20 mégohms elle aussi parfaitement étalonnée et enfin d'une source d'électricité donnant des différences de potentiel V_0, V_1, V_2, V_3... que l'on peut choisir à son gré et mesurer exactement.

Si l'on décharge le condensateur c dans le balistique après l'avoir préalablement chargé sous la différence de potentiel $V_0 = 20$ volts, on obtient ainsi l'élongation maxima : $\alpha_0 = 20$ *cm*. Etant entendu que la capacité du condensateur c est : C = 0,5 microfarad, on se propose, à titre de manipulation, de contrôler sa valeur par les trois méthodes suivantes :

1° On charge le condensateur c sous la différence de potentiel V_1, on le décharge dans le balistique, ce qui donne l'élongation maxima α_1. On répète les mêmes opérations avec un

condensateur c'_1 de capacité C'_1 pris dans la boîte B, on obtient ainsi l'élongation maxima α'_1. Quelles sont les valeurs de α_1, V_1, α'_1, C'_1 qui permettent d'obtenir la précision maxima dans la mesure de C ?

2° On charge le condensateur c sous la différence de potentiel V_2, on le décharge dans le balistique d'où l'élongation maxima α_2. On charge à nouveau le condensateur c sous la même différence de potentiel V_2, on l'isole de la source d'électricité, on le met en parallèle avec un condensateur c'_2 de capacité C'_2, pris dans la boîte B, on sépare les deux condensateurs puis, on envoie à travers le balistique la charge conservée par le condensateur c, on observe alors l'élongation maxima α'_2. Quelles sont les valeurs de α_2, α'_2, V_2 et C'_2 qui donnent la précision maxima dans cette nouvelle mesure de C ?

3° On charge le condensateur c sous la différence de potentiel V_3, puis on le décharge dans le balistique, d'où l'élongation α_3. On charge à nouveau le condensateur c sous la même différence de potentiel V_3, on le sépare de la source d'électricité, on réunit ses armatures par la résistance R, au bout du temps t (que l'on sait mesurer exactement) on coupe le circuit de décharge ainsi constitué et l'on envoie à travers le balistique la charge conservée par le condensateur c, on observe l'élongation maxima α'_3. Quelles sont les valeurs de α_3, α'_3, V_3 et t qui donnent la précision maxima dans cette autre mesure de C ?

N. B. — Si pour résoudre la 3e question de la 2e partie du problème, on se sert d'un développement en série, on se limitera à l'ensemble de ses deux premiers termes, ce qui donne une approximation suffisante.

(*Ecole Polytechnique*, 1946.)

---

58. Un ohmmètre est constitué par un milliampèremètre, dont la graduation porte 100 divisions, dont l'aiguille dévie de 100 divisions quand il est traversé par un courant de $i_0 = 1$ milliampère, et dont la résistance est $\rho = 100$ ohms. En série avec le milliampèremètre, se trouvent une résistance R, la résistance X à mesurer et une pile de *f. e. m.* E, de résistance intérieure négligeable. Un interrupteur K permet de court-circuiter la résistance à mesurer X.

1° E étant égal à 4,5 volts, calculer la valeur à donner à R pour que, la résistance X étant court-circuitée, l'aiguille s'arrête à la divison 100.

R ayant cette valeur, on supprime le court-circuit de X; l'aiguille s'arrête à la division n. Tracer la courbe X fonction de n. Calculer les valeurs de X qui correspondent aux divisions 10-50-90.

En admettant que l'on peut lire la position de l'aiguille à 1/5 de division près, quelle est l'erreur commise sur X, quand l'aiguille s'arrête aux divisions 10-50-90. Tracer la courbe donnant l'erreur relative sur X en fonction de X, entre les indications 10 et 90 de l'aiguille.

2° En réalité, la *f. e. m.* de la pile E n'est pas constante ; elle diminue petit à petit de 4,5 volts à 3 volts; pour essayer de rendre la graduation de l'appareil en résistances invariable, on shunte le milliampèremètre avec une résistance S variable. Quand E = 3 volts, le shunt S a une résistance infinie. X étant court-circuitée, quelle est la valeur de R qui amène l'aiguille à la division 100 ? On veut alors que cette indication reste constante quand E décroît de 4,5 à 3 volts. Quelle valeur faut-il donner au shunt S, en fonction de E, dans ces limites de variation de E ? Quelle est la valeur de S pour E = 4,5 volts et 4 volts. En admettant la même erreur de lecture que plus haut (0,2 division), quelle valeur maximum suffit-il de donner à S quand E = 3 volts ?

3° La *f. e. m.* de la pile E étant 3 volts, montrer qu'on peut diminuer l'erreur de mesure sur X = 300 ohms, en shuntant l'ensemble $R + \rho$ par une résistance $z = \frac{R + \rho}{9}$; de même, que pour X = 30 ohms, on prendra un shunt $z = \frac{R + \rho}{99}$.

(*Ecole Normale Supérieure*, 1947. *Première partie modifiée*).

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

NOTIONS FONDAMENTALES — UNITÉS

Paragraphes — Pages

CHAPITRE PREMIER. — *Notions fondamentales* 7

I. — *Angle solide* 7
1 Angle solide 7

II. — *Moments d'inertie* 8
2 Moments d'inertie 8

III. — *Mouvements pendulaires* 10
3 Mouvement d'un solide mobile autour d'un axe 10
4 Mouvements pendulaires 12
5 Choix de l'amortissement pour un appareil de mesure 16
Exercices 16

CHAPITRE II. — *Généralités sur les mesures* 18
6 Mesure d'une grandeur 18
7 Appareils de mesure 19
Erreurs 19
8 Erreurs 19
9 Erreurs systématiques et erreurs fortuites 20
10 Limite supérieure de l'erreur sur le résultat d'une mesure indirecte 21
11 Calcul des erreurs 21
Exercices 23

CHAPITRE III. — *Systèmes d'unités* 25
12 Systèmes cohérents d'unités 25
13 Unités fondamentales 26
14 Unités dérivées 28
15 Dimensions des unités dérivées 29
16 Différents systèmes d'unités mécaniques 30
17 Système C. G. S 31
18 Unités pratiques rattachées au système C.G.S 32
19 Système : mètre, kilogramme-masse, seconde 33
20 Système : mètre, tonne-masse, seconde 33
21 Système : mètre, kilogramme-force, seconde 34
22 Résultats généraux 35
23 Systèmes d'unités électriques 35
24 Problèmes relatifs aux changements d'unités 36
Exercices 38

DEUXIÈME PARTIE

ÉLECTROSTATIQUE

CHAPITRE IV. — *Phénomènes fondamentaux de l'électrostatique* 39
I. — *Electrisation* 39
25 Electrisation par frottement 39
26 Electrisation par contact 39

Paragraphes		Pages
27	Autres modes d'électrisation	40
28	Attractions et répulsions électriques	40
29	Existence de deux espèces d'électricité	41
30	Electroscope à feuilles	42
II. — *Charges électriques*		42
31	Quantités d'électricité	42
32	Comparaison des charges	43
33	Principe de la conservation de l'électricité	44
34	Etalonnage d'un électromètre	45
III. — *Nature de l'électricité*		46
35	Théories anciennes de l'électricité	46
36	Théorie électronique	47
CHAPITRE V. — ***Loi de Coulomb***		49
37	Loi de Coulomb	49
38	Expériences de Coulomb	50
39	Unités de quantité d'électricité	52
40	Application de la loi de Coulomb	53
	Exercices	54
CHAPITRE VI. — ***Champ électrique***		55
I. — *Définition. Calcul de quelques champs*		55
41	Champs électriques. Vecteur champ en un point	55
42	Unité électrostatique C. G. S. d'intensité de champ	56
43	Couches d'électricité sans épaisseur. Densité en un point	56
44	Champ produit par une couche mince, plane, circulaire, de densité uniforme en un point de son axe	57
45	Champ d'une couche sphérique infiniment mince de densité uniforme en un point situé à l'intérieur	58
II. — *Flux de force*		61
46	Lignes de force. Surfaces de niveau	61
47	Représentation de quelques champs électriques particuliers par leurs lignes de force et leurs surfaces de niveau	61
48	Flux de force	63
49	Flux de force envoyé dans un cône par une masse électrique située en son sommet	64
50	Théorème de Gauss	65
51	Applications du théorème de Gauss	68
III. — *Potentiel*		70
52	Travail du champ électrique	70
53	Potentiel	71
54	Superposition de plusieurs champs admettant chacun un potentiel	72
55	Relations entre le potentiel et le champ	72
56	Surfaces équipotentielles	74
57	Application au champ électrique	74
58	Représentation des champs électriques	75
59	Un champ électrique ne peut avoir une direction uniforme sans avoir en même temps une intensité uniforme	77
	Exercices	78
CHAPITRE VII. — ***Equilibre d'un conducteur unique isolé***		79
I. — *Distribution de l'électricité*		79
60	Définition d'un conducteur	79
61	Sur un conducteur en équilibre électrique, éloigné de tout autre corps, l'électricité est localisée à la surface extérieure	79
62	Etude expérimentale de la répartition de l'électricité sur un conducteur	81
63	Résultats	82
II. — *Champ électrique*		83
64	Champ à l'intérieur d'une cavité creusée dans un conducteur	83
65	Champ à l'intérieur d'un conducteur électrisé	83

Paragraphes		Pages
66	Champ au voisinage d'un conducteur électrisé	84
67	Pression électrostatique	85
68	Pouvoir des pointes	87
69	Interprétation électronique des propriétés des conducteurs	87
70	Rappel des principes fondamentaux de l'électrostatique	88
III. — *Potentiel et Energie*		88
71	Potentiel d'un conducteur	88
72	Capacité d'un conducteur éloigné de tout autre corps	89
73	Unités de capacité	90
74	Mesure de potentiel d'un conducteur	91
75	Remarques sur les indications des pendules électriques	91
76	Energie électrique d'un conducteur électrisé	92
	Exercices	93
CHAPITRE VIII. — ***Influence électrique***		94
77	Electrisation par influence	94
78	Influence totale : Le corps influencé enveloppe complètement le corps influençant	95
79	Influence produite par un corps électrisé sur un autre qui ne l'enveloppe pas complètement	97
80	Eléments correspondants	98
81	Explication théorique des phénomènes d'influence	98
82	Ecrans électriques	100
83	Emploi des écrans électriques	101
84	Interprétation de quelques phénomènes fondamentaux d'électrostatique	102
CHAPITRE IX. — ***Equilibre d'un système de conducteurs***		106
85	Problème général	106
86	Principe de la superposition de plusieurs états d'équilibre	106
87	Relations entre les potentiels et les charges d'un système de conducteurs en équilibre	107
88	Energie électrique d'un système de conducteurs électrisés	108
89	Passage d'un état d'équilibre électrique à un autre. Identité de Gauss	109
90	Relations fondamentales entre les capacités et les coefficients d'influence dans un système de conducteurs	110
CHAPITRE X. — ***Condensateurs***		112
I. — *Formules générales*		112
91	Formules fondamentales des condensateurs	112
92	Energie d'un condensateur	113
II. — *Calcul des capacités*		115
93	Condensateur sphérique	115
94	Condensateur cylindrique	116
95	Condensateur plan	118
96	Condensateur de forme quelconque mais d'épaisseur uniforme et très petite	119
97	Condensation électrique	120
98	Vérification expérimentale	121
III. — *Condensateurs usuels*		121
99	Importance du diélectrique	121
100	Interprétation du rôle du diélectrique	122
101	Formes usuelles des condensateurs	123
IV. — *Association des condensateurs*		126
102	Utilisation des condensateurs	126
103	Groupement en parallèle	126
104	Groupement en série	127
105	Choix du groupement	128
	Exercices	129
CHAPITRE XI. — ***Mesures électrostatiques***		130
106	Mesure de la charge d'un condensateur	130

Paragraphes Pages

107 Mesure de l'énergie d'un condensateur 131
108 Mesure des différences de potentiel. Electromètres 133
109 Mesure des capacités 138
110 Décharge d'un condensateur 140
Exercices 141

TROISIÈME PARTIE

ÉLECTRODYNAMIQUE

CHAPITRE XII. — *Généralités sur le courant électrique* 142

111 Courant électrique 142
112 Sens du courant 143
113 Nature du courant électrique 144
114 Intensité d'un courant électrique 144
115 Mesure de l'intensité d'un courant 146
116 Energie électrique 147

CHAPITRE XIII. — *Electrolyse. Lois de Faraday* 148

117 Phénomène de l'électrolyse 148
118 Loi qualitative 148
119 Réactions secondaires 149
120 Lois quantitatives 151
121 Lois de Faraday 152
122 Applications de l'électrolyse 153
Théorie des ions 154
123 Hypothèses fondamentales 154
Exercices 156

CHAPITRE XIV. — *Effet Joule. Résistance* 157

124 Effet Joule 157
125 Loi de Joule 157
126 Résistance d'un conducteur 158
127 Unité de résistance : ohm 158
128 Résistance d'un conducteur cylindrique et homogène 159
129 Résistivité 160
130 Variations de la résistivité 161
131 Interprétation électronique des résultats précédents 162
132 Applications de la loi de Joule 163
Exercices 164

CHAPITRE XV. — *Energie électrique* 165

133 Généralités sur l'énergie 165
I. — *Différence de potentiel* 165
134 Différence de potentiel entre deux points d'un circuit 165
II. — *Force électromotrice* 166
135 Définition de la force électromotrice d'un générateur 166
136 Association de générateurs en série 168
III. — *Force contre-électromotrice* 168
137 Définition de la force contre-électromotrice d'un récepteur 168
138 Différents types de récepteurs 169
139 Association de récepteurs en série 170
Exercice 170

CHAPITRE XVI. — *Lois d'Ohm et de Kirchhoff* 171

140 Loi d'Ohm. Définition légale du volt 171
141 Application de la loi d'Ohm aux électrolytes 172
142 Loi d'Ohm généralisée 174
143 Loi d'Ohm étendue à un circuit fermé 177

Paragraphes Pages

144 Lois de Kirchhoff ... 178
145 Utilisation des lois de Kirchhoff ... 180
Exercices ... 183

CHAPITRE XVII. — ***Applications des lois d'Ohm et de Kirchhoff*** ... 184
I. — *Courants dérivés* ... 184
146 Lois des courants dérivés ... 184
147 Résistance équivalente à un ensemble de dérivations ... 184
148 Boîtes de résistances. Rhéostats ... 185
149 Shunts des ampèremètres ... 187
150 Voltmètre ... 189
II. — *Association des générateurs* ... 189
151 Association en série ... 189
152 Association en parallèle ... 190
153 Association en séries parallèles ... 191
154 Choix du mode de groupement ... 191
III. — *Superposition des états d'équilibre* ... 192
155 Principe fondamental ... 192
Exercices ... 193

CHAPITRE XVIII — ***Mesures électriques basées sur les lois d'Ohm et de Kirchhoff*** ... 194
I. — *Mesure des résistances* ... 194
156 Méthode du Pont de Wheatstone ... 194
157 Méthode du Pont à corde ... 196
158 Mesure des très faibles résistances ... 198
159 Mesures industrielles des résistances ... 199
160 Principe des mesures absolues des résistances ... 202
II. — *Mesure des différences de potentiel et des forces électromotrices* ... 203
161 Voltmètre ... 203
162 Méthode d'opposition ... 203
163 Etalon de f. é. m ... 205
Exercices ... 206

CHAPITRE XIX. — ***Différence de potentiel de contact. Piles*** ... 207
164 Propriétés des chaînes de conducteurs ... 207
165 Polarisation ... 207
166 Piles hydro-électriques ... 208
167 Accumulateurs ... 211
168 Piles thermo-électriques ... 213
169 Effet Peltier et Effet Thomson ... 215
Exercices ... 215

QUATRIÈME PARTIE

MAGNÉTISME

CHAPITRE XX. — ***Phénomènes fondamentaux du magnétisme*** ... 217
170 Aimants ... 217
171 Propriétés qualitatives des aimants ... 218
172 Etude quantitative des aimants ... 218
173 Unité de quantité de magnétisme ... 220
174 Constitution des aimants ... 220

CHAPITRE XXI. — ***Champs magnétiques*** ... 222
I. — *Propriétés fondamentales des champs magnétiques* ... 222
175 Définitions ... 222
176 Unité d'intensité de champ magnétique ... 222
177 Propriétés des champs magnétiques ... 223
178 Unité de flux magnétique ... 224

Paragraphes		Pages
179	Spectres magnétiques	224
180	Champ magnétique uniforme	225
II. —	*Action d'un champ magnétique uniforme sur un aimant*	226
181	Action d'un champ uniforme sur un aimant	226
182	Application au champ terrestre	227
183	Moment magnétique d'un aimant	228
184	Unité C. G. S. de moment magnétique	229
185	Oscillations d'un aimant dans un champ uniforme	229
186	Vérifications expérimentales des résultats théoriques	230
187	Energie d'un aimant dans un champ magnétique	231
III. —	*Champ créé par un petit aimant à grande distance*	232
188	Potentiel créé par un petit aimant	232
189	Champ créé par un petit aimant	233
190	Positions principales de Gauss	234
191	Vérification expérimentale de la loi de l'inverse carré de la distance	236
	Exercices	238
CHAPITRE XXII.	— ***Magnétisme terrestre***	239
192	Déclinaison et inclinaison magnétiques	239
193	Equilibre, sous l'action du champ magnétique terrestre, d'une aiguille aimantée assujettie à certaines liaisons mécaniques	240
194	Boussole de déclinaison	241
195	Boussole d'inclinaison	243
196	Principes des méthodes de mesure de l'inclinaison	244
197	Composante horizontale du champ magnétique terrestre	245
198	Résultats	245
	Exercices	246
CHAPITRE XXIII.	— ***Mesures magnétiques***	248
199	Principe des méthodes de mesure	248
200	Mesure de $\mathfrak{M}H$	248
201	Mesure de $\frac{\mathfrak{M}}{H}$	250
I. —	*Mesures des moments magnétiques*	251
202	Mesures absolues	251
203	Mesures relatives	253
II. —	*Mesures des champs magnétiques*	254
204	Mesures absolues	254
205	Mesures relatives	255
206	Application des méthodes précédentes. — Vérification de la loi de l'inverse carré de la distance	256
	Exercices	256
CHAPITRE XXIV.	— ***Aimantation***	258
207	Vecteur aimantation en un point d'un barreau aimanté	258
208	Cas particuliers d'aimantation	259
209	Champ magnétique à l'intérieur d'un aimant	260
210	Propriétés du vecteur champ magnétique et du vecteur induction	261
Feuillets magnétiques		263
211	Définitions	263
212	Potentiel créé par un feuillet en un point	264
213	Champ magnétique créé par un feuillet	266
214	Propriétés des feuillets magnétiques	267
215	Energie potentielle d'un feuillet	267
216	Applications	268
217	Unité électromagnétique C. G. S. de puissance de feuillet	269
Aimantation par un champ magnétique		269
218	Etude qualitative	269
219	Etude quantitative	270
220	Résultats. Saturation	271

Paragraphes Pages

221 Perméabilité magnétique ... 272
222 Hystérésis. Aimantation rémanente. Champ coercitif. Cycle d'aimantation ... 273
223 Applications ... 275
Exercices ... 276

CINQUIÈME PARTIE

ÉLECTROMAGNÉTISME

CHAPITRE XXV. — *Lois fondamentales de l'électromagnétisme* ... 277
224 Phénomènes généraux ... 277
225 Lois fondamentales ... 277
226 Lois élémentaires ... 278
227 Unités électromagnétiques et unités pratiques ... 280

CHAPITRE XXVI. — *Champ magnétique produit par un courant électrique* ... 281
228 Existence du champ magnétique d'un courant ... 281
229 Loi fondamentale ... 281
230 Principe des courants sinueux ... 282
231 Champ magnétique d'un courant rectiligne ... 282
232 Courants angulaires ... 285
233 Champ magnétique d'un courant circulaire ... 286
234 Champ magnétique d'un solénoïde ... 288
235 Théorème d'Ampère ... 292
236 Circuit magnétique fermé. Reluctance. Force magnétomotrice. Nombre d'ampères-tours ... 294
Exercices ... 295

CHAPITRE XXVII. — *Action d'un champ magnétique sur un courant* ... 297
237 Existence de l'action d'un champ magnétique sur un courant ... 297
238 Loi fondamentale ... 297
239 Expériences relatives à l'action d'un champ magnétique sur une portion mobile d'un circuit siège d'un courant ... 298
240 Action réciproque de deux courants ... 300
241 Travail des forces électro-magnétiques dans le déplacement d'un circuit dans un champ magnétique ... 301
242 Applications de la loi de Maxwell ... 303
243 Action d'un courant sur son propre circuit. Expérience d'Ampère ... 305
244 Balance de Cotton ... 306
245 Comparaison entre les deux lois de Laplace ... 308
Exercices ... 309

CHAPITRE XXVIII. — *Phénomènes d'induction* ... 311
I. — *Induction par déplacement relatif d'un circuit et d'un champ magnétique* ... 311
246 Déplacement, dans un champ magnétique, d'un circuit traversé par un courant. Force électromotrice d'induction ... 311
247 Déplacement, dans un champ magnétique, d'un circuit fermé ne contenant aucun générateur. Loi de Lenz ... 314
248 Phénomènes d'induction produits sans déplacement ... 316
249 Enoncé général des lois de l'induction ... 317
250 Force électromotrice d'induction dans un élément de courant mobile ... 317
251 Expériences montrant la production de courants induits ... 318
252 Induction dans les masses métalliques. Courants de Foucault ... 321
253 Quantité d'électricité induite ... 323
254 Mesure relative de l'intensité d'un champ magnétique uniforme ... 323
II. — *Self-induction* ... 325
255 Phénomène de self-induction ... 325
256 Expériences de self-induction ... 326
257 Coefficient de self-induction. Henry ... 327

Paragraphes		Pages
258	Réalisation matérielle d'étalons de self-induction	329
259	Etablissement du courant dans un circuit	329
260	Suppression d'un courant dans un circuit	331
261	Coefficient d'induction mutuelle de deux circuits	332
	Exercices	332
CHAPITRE XXIX.	— ***Applications des lois de l'électromagnétisme. — Mesures électriques***	333
I.	— *Electrodynamomètres*	333
262	Electrodynamomètre de Pellat	333
263	Ampère-étalon	334
II.	— *Galvanomètres*	335
264	Galvanomètre à cadre mobile	335
265	Galvanomètre à aimant mobile	339
III.	— *Ampèremètres et voltmètres*	342
266	Comparaison d'un ampèremètre et d'un galvanomètre	342
267	Ampèremètre à aimant mobile	343
268	Ampèremètre à fer mobile et à ressort	343
269	Ampèremètre à cadre mobile	344
IV.	— *Wattmètre et galvanomètre balistique*	345
270	Wattmètre	345
271	Galvanomètre balistique	346
	Exercices	347
CHAPITRE XXX.	— ***Unités électriques***	348
272	Différents systèmes d'unités électriques	348
273	Dimensions des unités électriques	348
274	Comparaison des différentes unités	349
	Exercices	351
PROBLÈMES		352

LIBRAIRIE MASSON ET Cie
C. O. L. 150.015
Paris N° 616
Dépôt initial en 1942
Dépôt légal : 3e trimestre 1947

Imprimé en France

SOCIÉTÉ FRANÇAISE D'IMPRIMERIE ET DE LIBRAIRIE ET IMP. MARC TEXIER RÉUNIES
Poitiers
C. O. L. 31.0873.

ET
VIE
M
No
13-31

QUATORZIEME EDITION